


HARVARDIANAE IN NOV ANG SIGILLVM ACADEMIAE
ET
CHRISTO ECCLESIAE
VE RI
TAS







GRUNDRISS

der

Differential- und Integral-Rechnung.

I. Theil: Differential-Rechnung.

Von

Dr. Ludwig Kiepert,

Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Achte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens von

weil. Dr. Max Stegemann.

Mit 160 Figuren im Texte.



Hannover 1897.

Helwing'sche Verlagsbuchhandlung.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung der vorliegenden Schrift habe ich gesucht, neben der Forderung wissenschaftlicher Strenge vor allen Dingen der didaktischen Forderung möglichster Fasslichkeit zu genügen.

In Betreff der speciellen Ausführung bemerke ich, dass ich mich bemüht habe, die Einsicht in den Gang der analytischen Untersuchung durch graphische Darstellungen zu erleichtern, und ferner, dass ich bei schwierigen oder wichtigen Stellen die Entwickelung der allgemeinen Theorie durch Erörterung eines speciellen Falles eingeleitet habe.

Die grosse Anzahl von Beispielen und Anwendungen in jedem Capitel, sowie die gelegentlichen Bemerkungen sind zunächst für solche Leser bestimmt, welche durch Selbst-Studium sich in der Wissenschaft weiter ausbilden und mehr befestigen wollen; indess dürften sie auch dem Lehrer ein Mittel bieten, um seine Schüler zur freien Selbstthätigkeit anzuregen.

In Betreff der äusseren Ausstattung ist die Verlagshandlung sowohl wie die Druckerei allen meinen Wünschen bereitwillig entgegengekommen.

Hannover, den 1. August 1862.

M. Stegemann.



Vorrede zur fünften Auflage.

Als der Unterzeichnete den Auftrag erhielt, die neue Auflage dieses Werkes herauszugeben, ahnte er noch nicht, dass Aenderungen in so weitem Umfange nothwendig sein würden. Erst bei der Bearbeitung überzeugte er sich davon, dass sehr viele Lücken auszufüllen und zahlreiche Irrthümer, die sich in den früheren Auflagen finden, richtig zu stellen waren.

Neben den angedeuteten Mängeln besass aber das Buch von Stegemann doch auch grosse Vorzüge, welche namentlich in der leicht fasslichen Darstellung liegen, und welche durch den verhältnissmässig schnell erfolgten Absatz von vier Auflagen bestätigt worden sind.

Der Herausgeber hat sich bemüht, diese Vorzüge nach Möglichkeit beizubehalten, ohne die wissenschaftliche Strenge und Gründlichkeit ausser Acht zu lassen. Das Buch hat demnach den Zweck, den Anfänger, — mag er nun an der Universität, an der technischen Hochschule oder an irgend einer anderen Bildungs-Anstalt studiren, an der höhere Mathematik getrieben wird, — auf möglichst bequeme Weise mit den wichtigsten Sätzen und Aufgaben der Differential-Rechnung vertraut zu machen. Auch zum Selbst-Studium ist das Buch seiner ganzen Anlage nach geeignet.

Für die Abgrenzung des Stoffes waren dem Herausgeber im Grossen und Ganzen seine eigenen Vorträge an der technischen Hochschule in Hannover massgebend. Da die für diese Vorträge verfügbare Zeit eine beschränkte ist, so war dadurch auch für den Umfang des Buches ein Rahmen gegeben, so dass

der Inhalt nicht so erschöpfend sein konnte wie z. B. bei Lehrbüchern der Differential-Rechnung hervorragender französicher Mathematiker.

Aber diese Beschränkung ist vielleicht gerade ein wesentlicher Vorzug, weil die Fülle des Stoffes den Anfänger häufig mehr verwirrt und abschreckt als fördert. Der vorliegende Leitfaden soll daher eine feste und sichere Grundlage bieten, welche dem Techniker genügen, dem Mathematiker aber eine nützliche Vorbereitung zu weitergehenden Studien sein wird.

Als Anhang ist eine Tabelle der wichtigsten Formeln hinzugefügt, welche einerseits die Anwendungen sehr erleichtert, andererseits aber ein durch langjährige Erfahrung erprobtes Hülfsmittel bei Repetitionen ist.

Dem Herrn Verleger spricht der Herausgeber hierdurch seinen verbindlichsten Dank aus für das liebenswürdige Entgegenkommen, das allen seinen Wünschen entgegengebracht worden ist.

Hannover, im Juli 1887.

L. Kiepert.

Vorrede zur sechsten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, welche die fünfte Auflage in weiten Kreisen gefunden hat, war für den Herausgeber ein Antrieb, bei der Bearbeitung der neuen Auflage mit grösster Sorgfalt die hervorgetretenen Mängel zu beseitigen und die vorhandenen Lücken auszufüllen. Den Herren Lampe, von Mangoldt, Franz Meyer, Runge und Voss, welche dabei den Herausgeber durch werthvolle Winke unterstützt haben, sei hierdurch der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Durch die angedeuteten Verbesserungen hat das Buch an Umfang und Inhalt wesentlich zugenommen; namentlich sind die geometrischen Anwendungen vermehrt worden, auch hat eine kurzgefasste Darstellung der Determinanten-Theorie Aufnahme gefunden. Die Figuren sind sämmtlich neu gezeichnet worden, ihre Zahl ist von 66 auf 154 gewachsen.

Mit Rücksicht darauf, dass das Buch auch vielfach von Studirenden der Mathematik an den Universitäten benutzt worden ist, schien es zweckmässig, noch mehr Gewicht auf wissenschaftliche Strenge zu legen, als es in den früheren Auflagen geschehen war. Da aber die elementare Art der Behandlung darunter nicht leiden sollte, so war es nicht immer ganz leicht, den richtigen Mittelweg zu finden.

Durch die mühsame Umarbeitung und die erhebliche Erweiterung des Buches ist die Drucklegung etwas verzögert worden. Der Herausgeber ist der Verlagsbuchhandlung für die

Nachsicht, die ihm dabei gewährt worden, und für das bereitwillige Entgegenkommen, das er bei allen seinen Wünschen gefunden hat, zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Schliesslich sei noch mit bestem Danke die gütige Mitwirkung des Herrn Petzold bei dem Lesen der Correctur hervorgehoben.

Hannover, den 15. November 1892.

L. Kiepert.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Schon bei der Herausgabe der fünften und sechsten Auflage waren die erforderlichen Aenderungen so grundlegend und umfassend, dass von dem Stegemann'schen Grundrisse nur äusserst wenig übrig geblieben ist. Deshalb ist es nicht mehr gerechtfertigt, Stegemann als Verfasser des Buches zu bezeichnen. Die neue Auflage erscheint vielmehr unter dem Namen des Unterzeichneten, der die vollständige Umarbeitung des Stegemann'schen Leitfadens ausgeführt hat. Da die siebente Auflage der sechsten in sehr kurzer Zeit gefolgt ist, so unterscheidet sie sich von dieser nur an wenigen Stellen. Doch hat der Verfasser die Verbesserungsvorschläge, die ihm von befreundeter Seite zugegangen sind, nach Möglichkeit berücksichtigt und benutzt diese Gelegenheit, um allen Fachgenossen für die gütige Empfehlung des Buches und für die freundschaftliche Unterstützung durch wohlwollende Rathschläge den aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Insbesondere dankt er auch den Herren Franz Meyer und Petzold für die förderliche Mitwirkung beim Lesen der Correctur und der Verlagsbuchhandlung für die opferfreudige Gewährung aller bei der schwierigen Drucklegung hervortretenden Wünsche.

Hannover, den 21. Mai 1895.

L. Kiepert.

Vorrede zur achten Auflage.

Seit dem Erscheinen der siebenten Auflage ist eine so kurze Zeit verflossen, dass der Verfasser inzwischen nur wenig Musse finden konnte, um durchgreifende Aenderungen an dem Leitfaden vorzunehmen. Deshalb weicht die achte Auflage nur in einigen Punkten von der vorhergehenden ab. Vorangestellt ist eine kurze geschichtliche Darstellung, in welcher Weise gerade Aufgaben aus der Technik mit Nothwendigkeit zur Auffindung der Differential- und Integral-Rechnung geführt haben. Damit sollte darauf hingewiesen werden, wie unentbehrlich die Infinitesimalrechnung, d. h. die Rechnung mit unbegrenzt wachsenden und unbegrenzt abnehmenden Grössen für die Technik ist, und wie zweckmässig es andererseits ist, diese Rechnungsart in möglichst weitem Umfange der Technik dienstbar zu machen.

Aus diesem Grunde würde der Verfasser für freundliche Rathschläge und nützliche Anregungen, welche er von Seiten der Herren Techniker zur Verbesserung und Bereicherung des Stoffes in späteren Auflagen erhalten sollte, besonders dankbar sein. Ein solches Zusammenarbeiten der Techniker und der Mathematiker würde die Sache und auch die beiderseitigen Interessen mehr fördern als umfangreiche Auseinandersetzungen über Ausdehnung oder Beschränkung des mathematischen Unterrichts an technischen Hochschulen, wie sie zur Zeit an der Tagesordnung sind. Ob die Mathematik für die Techniker eine grundlegende Wissenschaft oder nur Hülfswissenschaft sei, ist ein Streit um Worte. Es kommt vielmehr darauf an, den mathematischen Unterricht an der technischen Hochschule so zu

gestalten, dass er bei einem nicht übermässig grossen Zeitaufwande der Technik recht gute Dienste leistet. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen sich aber die Techniker und Mathematiker möglichst eng in ihren Bestrebungen an einander anschliessen. Mit vereinten Kräften wird es gelingen, die mathematische Behandlung technischer Aufgaben in nutzbringender Weise auszugestalten und gleichzeitig der Mathematik den Anstoss zu weiteren Fortschritten zu geben.

Für die Abfassung der geschichtlichen Einleitung stellte mir Herr Max Simon in Strassburg ein umfangreiches Manuscript zur Verfügung, wofür ich hiermit bestens danke.

Auch Herrn Petzold habe ich wieder für die Mitwirkung beim Lesen der Correctur und der Verlagsbuchhandlung für das freundliche Entgegenkommen bei Drucklegung der neuen Auflage meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Hannover, im October 1897.

L. Kiepert.

Inhalts-Verzeichniss.

II. Abschnitt.

Functionen von Functionen.

III. Abschnitt.

Abteitungen und Differentiale höherer Ordnung.

IV. Abschnitt.

Herleitung und Anwendungen der Taylor'schen und der Mac-Laurin'schen Reihe.

V. Abschnitt.

Convergenz der Reihen.

VI. Abschnitt.

Maxima und Minima von entwickelten Functionen einer Veränderlichen.

VII. Abschnitt.

Bestimmung von Ausdrücken, welche an der Grenze eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ haben.

VIII. Abschnitt.

Differentiation der nicht entwickelten Functionen.

IX. Abschnitt.

Vertauschung der Abhängigkeit der veränderlichen Grössen.

X. Abschnitt.

Untersuchung von Curven, die auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen sind.

XI. Abschnitt.

Untersuchung von Curven, die auf ein Polarcoordinaten-System bezogen sind.

XII. Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

Zweiter Theil.

Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

XIII. Abschnitt.

Differentiation der Functionen von mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen.

XIV. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

XV. Abschnitt.

Herleitung und Anwendungen der Taylor'schen Reihe für Functionen von mehreren Veränderlichen.

XVI. Abschnitt.

Theorie der complexen Grössen.

Geschichtliches.

Die *Differential-Rechnung* und ihre Umkehrung, die *Integral-Rechnung*, werden mit dem gemeinsamen Namen *Infinitesimal-Rechnung* zusammengefasst, weil sie auf dem Gebrauche der *unbegrenzt wachsenden* und der *unbegrenzt abnehmenden* (oder *unendlich kleinen*) Grössen beruhen. Unendlich kleine Grössen und die damit in Beziehung stehenden Begriffe der *Grenze* und der *Stetigkeit* finden sich bereits in den mathematischen und philosophischen Untersuchungen des Alterthums, wenn auch die Vorstellungen über diese Begriffe theilweise noch unklar und mangelhaft waren.

Schon bei den Schülern des *Pythagoras* (etwa 582 v. Chr. geb.) und bei dem Eleaten *Zeno* (etwa 500 v. Chr.) spielen unendlich kleine Grössen eine Rolle. *Aristoteles* (384—322 v. Chr.) gab sogar eine Erklärung der Begriffe „Stetigkeit" und „Mächtigkeit". Daraus entwickelte sich dann in der Schule des *Plato* (429—347 v. Chr.) und noch mehr in der des *Eudoxos* (etwa 370 v. Chr.) der Begriff der Grenze mit Hülfe der sogenannten „*Exhaustions-Methode*", deren Wesen darin besteht, dass eine Grösse, welche berechnet werden soll, z. B. der Flächeninhalt eines Kreises, zwischen zwei Reihen bekannter Grössen eingeschlossen wird, von denen die eine beständig zunimmt und die andere beständig abnimmt. Bei der Kreisfläche benutzt man dazu die einbeschriebenen und umschriebenen regelmässigen n-Ecke, wobei n nach und nach die Werthe 6, 12, 24, ... annimmt. Der Unterschied zwischen den Grössen der zunehmenden und abnehmenden Reihe wird immer kleiner und schliesslich

beliebig klein, so dass sich daraus auch der Werth der gesuchten Grösse selbst mit beliebiger Genauigkeit ergiebt.

Derartige Schlüsse wurden namentlich von *Euklid* (etwa 300 v. Chr.), *Archimedes* (287—212 v. Chr.) und *Pappus* (etwa 400 n. Chr.) angewendet. *Archimedes* hat bei der Berechnung des Flächeninhaltes von Figuren, des Kubikinhaltes der Körper und der Lage des Schwerpunktes ein Verfahren benutzt, welches der Integral-Rechnung nahe verwandt ist und den Forschern der Neuzeit wesentliche Dienste geleistet hat.

Nach *Pappus* tritt aber Stillstand ein. Erst *Kepler* (1571 bis 1630) und *Galilei* (1564—1642) knüpfen, von astronomischen und physikalischen Gesichtspunkten ausgehend, an die von *Archimedes* gefundenen Resultate an. *Kepler* dehnt die Anwendung der unendlich kleinen Grössen aus auf die Lösung von Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima. Damit war für die wirkliche Erfindung der Differential- und Integral-Rechnung, welche in die Zeit von 1615 bis 1684 fällt, der Anfang gemacht.

Einen weiteren Schritt that der Franzose *Descartes* (1596 bis 1650), der die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen benutzte, um das sogenannte „Tangenten-Problem" zu lösen, bei welchem es darauf ankommt, die Lage der Tangente an eine gegebene Curve in einem Punkte derselben zu bestimmen. Dieselbe Aufgabe behandelte in jener Zeit auch der Franzose *Fermat* (1608—1665), der die Methoden der Differential-Rechnung bereits in umfangreicher Weise beherrschte und die Methoden der Integral-Rechnung für die Ermittelung des Flächeninhaltes, der Länge von Curvenbögen, der Lage des Schwerpunktes u. s. w. geschickt verwendete. Auch den Begriff der Stetigkeit kannte *Fermat* genau und löste mit Hülfe der Differential-Rechnung Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima.

Noch schärfer und zielbewusster werden die neuen Methoden von dem Engländer *Wallis* (1616—1703) und dem Franzosen *Pascal* (1623—1662) erfasst. *Wallis* rechnete bereits mit unendlichen Reihen, d. h. mit Summen, welche unendlich viele Summanden enthalten, und mit Producten, welche aus unendlich vielen Factoren bestehen. *Pascal* wendete sogar schon mehrfache Integrale an.

So war die Erfindung der Infinitesimal-Rechnung in vielseitigster Weise vorbereitet durch die Behandlung von Aufgaben, deren Lösung die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen erfordert. Solche Aufgaben lieferte

1. die *Mechanik*, und zwar die *Statik* bei der Bestimmung der Lage des Schwerpunktes und die *Dynamik* bei der Erklärung und Anwendung der Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung u. s. w.;
2. die Theorie der Maxima und Minima;
3. die Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren, des Kubikinhaltes der Körper und der Länge von Curvenbögen;
4. das Tangenten-Problem;
5. die Rechnung mit unendlichen Reihen, unendlichen Producten, periodischen Kettenbrüchen u. s. w.

Es kam nur noch darauf an, den innigen Zusammenhang zwischen allen diesen Aufgaben zu erkennen und in die unklaren, den weiteren Kreisen der Mathematiker bisher unzugänglichen Methoden Gesetz und Ordnung zu bringen.

Diesen letzten, wichtigsten Schritt thaten der englische Astronom und Mathematiker *Newton* (1643—1727) und der deutsche Mathematiker und Philosoph *Leibniz* (1646—1716), welche als die eigentlichen Erfinder der Infinitesimal-Rechnung zu betrachten sind. *Newton* hatte schon im Jahre 1665 bei seiner „*Fluxionen-Rechnung*“ die Methoden zur Anwendung gebracht, welche für die Differential-Rechnung grundlegend geworden sind. Er veröffentlichte aber seine Erfindung erst im Jahre 1711, *Leibniz* dagegen schon im Jahre 1684. Es darf jetzt wohl als sicher angesehen werden, dass beide Forscher von einander unabhängig auf die neue Rechnungsart geführt worden sind, wenn auch *Leibniz* bei seinem ersten Aufenthalte in London, welcher in das Jahr 1673 fällt, durch den Verkehr mit Freunden von *Newton* zweifellos zu seinen Untersuchungen über Infinitesimal-Rechnung angeregt worden ist. Jedenfalls gebührt *Leibniz* das unsterbliche Verdienst, für die neue Rechnung Formen gefunden zu haben, welche auch einem grösseren Leserkreise verständlich sind, während die Fluxionen-Rechnung *Newton*'s nur von

wenigen auserwählten Geistern erfasst werden konnte. Die Bezeichnungen und Kunstausdrücke, welche noch heut in der Differential- und Integral-Rechnung gebräuchlich sind, stammen zumeist von *Leibniz* her, der auch zuerst erkannte, welche ausserordentliche Bedeutung der neuen Rechnungsweise für die gesammte Mathematik zukommt.

Auf die weitere Ausgestaltung der Infinitesimal-Rechnung verwandten sodann die beiden Brüder *Jacob Bernoulli* (1654—1713) und *Johann Bernoulli* (1667—1748) alle Kraft, und zwar im besten Einvernehmen mit *Leibniz* und als eifrige Vorkämpfer desselben, während zwischen *Leibniz* und *Newton* ein heftiger Prioritäts-Streit entbrannt war. Die beiden Brüder *Bernoulli* hielten die ersten Vorlesungen über Infinitesimal-Rechnung, über die *Johann Bernoulli* auch das erste Lehrbuch verfasste.

Aus der nun folgenden Entwickelungsgeschichte der Infinitesimal-Rechnung mögen noch besonders hervorgehoben werden: *Euler* (1707—1783), *Lagrange* (1736—1813) und *Cauchy* (1789—1857). Es würde aber nicht zweckmässig sein, an dieser Stelle noch tiefer auf die wissenschaftlichen Leistungen dieser Männer einzugehen, da zur richtigen Würdigung derselben eine genaue Kenntniss der Infinitesimal-Rechnung erforderlich ist.

Einleitung.

§ 1.

Begriff und Eintheilung der Functionen.

Erklärung. *Eine Grösse heisst variabel oder veränderlich, wenn sie im Verlaufe derselben Untersuchung nach und nach verschiedene Werthe annehmen darf; eine Grösse heisst dagegen constant oder unveränderlich, wenn sie im Verlaufe derselben Untersuchung denselben Werth beibehält.*

Die *unveränderlichen* Grössen werden gewöhnlich mit den ersten Buchstaben des Alphabets, also mit

$$a, b, c, \ldots,$$

oder mit

$$A, B, C, \ldots,$$

oder mit

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$$

bezeichnet. Zum Unterschiede davon werden die *veränderlichen* Grössen gewöhnlich mit den letzten Buchstaben des Alphabets, also mit

$$x, y, z,$$

oder mit

$$u, v, w,$$

oder mit den x, y, z entsprechenden griechischen Buchstaben

$$\xi, \eta, \zeta$$

bezeichnet.

Man kann den Werth einer (veränderlichen oder unveränderlichen) Grösse auch durch die Lage eines Punktes auf einer geraden Linie geometrisch darstellen, wenn auf derselben ein

fester Punkt O als Anfangspunkt gegeben ist. Sind z. B. in Figur 1 die Strecken

Fig. 1.

O A P B

$$OA = a, \quad OP = x, \quad OB = b,$$

so entsprechen die Punkte A, P, B den Werthen a, x, b. Die Masseinheit, durch welche dabei die Strecken gemessen sind, ist beliebig; dagegen muss man festsetzen, dass die Punkte auf der *einen* Seite des Anfangspunktes O, z. B. auf der rechten Seite von O, *positiven* Zahlwerthen entsprechen; dann müssen alle Punkte, welche *negativen* Zahlwerthen entsprechen, auf der *anderen* Seite von O liegen, während O selbst dem Werthe Null entspricht.

Gewöhnlich denkt man sich x in der Weise veränderlich, dass x *alle* Werthe zwischen zwei constanten Werthen a und b annehmen kann. Der Punkt P, welcher x entspricht, durchläuft dann in Figur 1 die Strecke von A bis B. Deshalb sagt man in diesem Falle: *„Die veränderliche Grösse x durchläuft das Intervall von a bis b.“* Wenn a gleich $-\infty$ und b gleich $+\infty$ wird, wobei mit ∞ eine in's Unbegrenzte wachsende Zahl bezeichnet werden möge, so darf die Veränderliche x alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so dass der Punkt P die ganze unbegrenzte gerade Linie durchläuft.

Wenn man zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y eine Gleichung aufstellt, so sind diese beiden Grössen dadurch in eine gegenseitige Abhängigkeit gebracht, und zwar so, dass die eine Grösse, z. B. y, nur einen oder mehrere *ganz bestimmte* Werthe haben kann, sobald der Werth der anderen veränderlichen Grösse x gegeben ist. Es sei z. B.

$$y = x^2 + 3x - 2, \tag{1.}$$

dann wird

$$\begin{array}{lll}
y = +8, & \text{wenn} & x = -5, \\
y = +2, & \text{„} & x = -4, \\
y = -2, & \text{„} & x = -3, \\
y = -4, & \text{„} & x = -2, \\
y = -4, & \text{„} & x = -1, \\
y = -2, & \text{„} & x = 0, \\
y = +2, & \text{„} & x = +1, \\
y = +8, & \text{„} & x = +2, \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Hätte man in der Gleichung (1.) beliebige Werthe für y angenommen, so wären dadurch die entsprechenden Werthe von x ebenfalls bestimmt gewesen. Weil aber die Gleichung (1.) in Bezug auf x vom *zweiten* Grade ist, so entsprechen jedem beliebigen Werthe von y *zwei* (reelle oder imaginäre) Werthe von x. So sind z. B. dem Werthe

$$y = +2$$

die beiden Werthe

$$x = +1, \quad x = -4$$

zugeordnet. Die veränderliche Grösse x, deren Werthe man beliebig annimmt, nennt man „die *unabhängige* Veränderliche oder das *Argument*"; die andere veränderliche Grösse y dagegen nennt man „die *abhängige* Veränderliche oder eine *Function* von x".

In der Gleichung (1.) wurde also zuerst x als die *unabhängige* Veränderliche und y als eine von x *abhängige* Veränderliche, d. h. als eine *Function* von x betrachtet.

Gewöhnlich ist das Gesetz der Abhängigkeit zwischen einer Function y und der unabhängigen Veränderlichen x durch eine *Gleichung* zwischen x und y gegeben. Ganz allgemein kann man aber den Begriff der Function in folgender Weise erklären:

Eine veränderliche Grösse y heisst eine Function einer anderen veränderlichen Grösse x in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$, wenn jedem Werthe von x in diesem Intervalle ein oder mehrere Werthe von y nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.

So ist z. B. der Umfang eines Kreises eine Function von dem Halbmesser des Kreises. Dasselbe gilt vom Flächeninhalt des Kreises. Diese Functionen können auch durch die Gleichungen

$$y = 2x\pi, \quad y = x^2\pi$$

dargestellt werden.

Ebenso sind Oberfläche und Volumen einer Kugel Functionen von dem Halbmesser der Kugel, welche bezw. durch die Gleichungen

$$y = 4x^2\pi, \quad y = \frac{4x^3\pi}{3}$$

dargestellt werden.

Bei diesen Beispielen war der Halbmesser als eine *veränderliche* Grösse betrachtet worden. Lässt man aber den Halbmesser *unveränderlich*, so kann man z. B. auch die Sehne, das Segment und den Sector des Kreises als Functionen des zugehörigen Centriwinkels ansehen.

Ferner ist die Intensität des Lichtes eine Function von der Entfernung des leuchtenden Punktes; die Spannkraft des Dampfes ist eine Function der Temperatur desselben; die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers ist eine Function der Fallzeit; die Schwingungsdauer bei einem Pendel ist eine Function seiner Länge, u. s. w.

Wie oben schon erwähnt wurde, kann man die Abhängigkeit einer Function von der unabhängigen Veränderlichen häufig durch eine Gleichung ausdrücken. Demnach sind z. B. folgende Ausdrücke Functionen von x:

$$y = x^2 + 3x - 2, \quad y = 4x^3 - 7x^2 + 2x - 11,$$
$$y = \frac{2x - 1}{x + 3}, \quad y = \frac{1}{x} - \frac{3x + 4}{x^2 + x},$$
$$y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2}}{x - \sqrt{a^2 - x^2}},$$
$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$
$$y = \log x, \quad y = \log(\sin x),$$
$$y = a^x, \quad y = b^x + b^{-x},$$
$$y = a^x + b\cos x - cx^m.$$

Ist die Abhängigkeit zwischen x und y durch eine nach y *aufgelöste* Gleichung gegeben, wie das in den soeben erwähnten Beispielen geschehen ist, so nennt man y eine „*entwickelte* (oder *explicite*) Function von x“.

Ist dagegen die Gleichung zwischen x und y nicht nach y aufgelöst, so nennt man y eine „*unentwickelte* (oder *implicite*) Function von x“. Durch jede der Gleichungen

$$xy^3 - 3x^2y^2 + (2x^2 - 5)y - x^3 = 0,$$
$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 7x + 3 = 0,$$
$$y^x - \cos x + x^n + 7 = 0$$

ist z. B. y als *unentwickelte* Function von x gegeben.

In vielen Fällen ist es möglich, y als eine *entwickelte* Function von x darzustellen, obgleich y zunächst als eine *unentwickelte* Function von x gegeben ist. Aus

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

folgt z. B.

$$y = 2x \pm \sqrt{7x - 3};$$

und aus

$$y^x - \cos x + x^n + 7 = 0$$

folgt

$$y = \sqrt[x]{\cos x - x^n - 7}.$$

Will man andeuten, dass y eine *entwickelte* Function von x ist, so schreibt man gewöhnlich

$$y = f(x), \quad \text{oder } y = F(x), \quad \text{oder} \quad y = \varphi(x), \quad \text{oder} \quad y = \Phi(x).$$

Hat man es mit mehreren Functionen zu thun, die man von einander unterscheiden will, so geschieht dies durch Indices, indem man schreibt

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots.$$

Will man andeuten, dass y eine *unentwickelte* Function von x ist, so schreibt man gewöhnlich

$$f(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Man denkt sich dabei die Gleichung zwischen x und y so umgeformt, dass auf der rechten Seite nur 0 stehen bleibt.

Aus den angeführten Beispielen erkennt man auch, wie schon oben gelegentlich bemerkt wurde, dass jedem Werthe der unabhängigen Veränderlichen x nicht immer nur *ein* Werth der Function y entspricht, sondern dass häufig jedem Werthe von x *mehrere* Werthe von y zugeordnet sind. Demnach muss man *eindeutige* und *mehrdeutige* Functionen unterscheiden.

In einer Gleichung zwischen x und y wurde bisher x als diejenige Veränderliche angesehen, deren Werth man beliebig annehmen durfte. Mit demselben Rechte kann man aber auch y als die *unabhängige* und x als die *abhängige* Veränderliche betrachten. (Vergl. das Beispiel auf S. 6.) Das giebt den Satz:

Wenn y durch eine Gleichung (welche die beiden Veränderlichen x und y wirklich enthält) als eine entwickelte oder un-

entwickelte Function von x gegeben ist, so ist auch umgekehrt x eine Function von y, oder mit anderen Worten: *Die durch eine Gleichung gegebene Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Grössen x und y ist eine gegenseitige.*

Daraus ergiebt sich auch die Erklärung solcher Functionen, welche aus bereits bekannten Functionen „*durch Umkehrung*“ hervorgehen, indem man das Argument zur Function und die Function zum Argumente macht.

Es sei z. B.

$$y = b^x, \tag{2.}$$

dann kann auch x als eine Function von y betrachtet werden, und zwar wird diese Function der „*Logarithmus*“ von y mit der Basis b genannt. Dies giebt die Gleichung

$$x = \overset{b}{\log} y; \tag{2a.}$$

das stimmt überein mit der bekannten Erklärung des Logarithmus: „*Der Logarithmus einer Zahl y ist der Exponent, zu dem die Basis b erhoben werden muss, damit man y erhält.*“

Die Gleichungen (2.) und (2a.) sagen also dem Sinne nach genau dasselbe aus.

Ein zweites Beispiel liefert die Gleichung

$$y = \sin x. \tag{3.}$$

Es sei aber hier zunächst darauf hingewiesen, dass man in der höheren Mathematik bei den trigonometrischen Functionen

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \mathrm{tg}\, x, \quad \mathrm{ctg}\, x$$

unter x nicht einen Winkel in Graden, Minuten und Secunden, sondern das Verhältniss des dem Centriwinkel entsprechenden Kreisbogens zum Halbmesser des Kreises versteht. Macht man den Halbmesser der Einheit gleich, so ist x geradezu die Länge des Kreisbogens. Einem Winkel von 360^0 entspricht also der Bogen 2π, nämlich der Umfang des ganzen Kreises mit dem Halbmesser 1, einem Winkel von 1^0 entspricht daher der Bogen

$$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0{,}017\,453\,29,$$

und einem Winkel von α^0 entspricht der Bogen

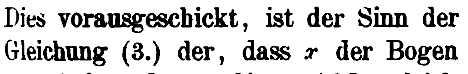
$$\frac{\alpha\pi}{180} = \alpha \,.\, 0{,}017\,453\,29.$$

In Figur 2 sei deshalb

$$MA = MB = 1,$$

dann entspricht dem Centriwinkel AMB oder α der Bogen

$$AB = x = \frac{\alpha\pi}{180}.$$



Dies vorausgeschickt, ist der Sinn der Gleichung (3.) der, dass x der Bogen (arcus) ist, dessen Sinus (CB) gleich y wird. Dasselbe soll auch die Gleichung

(3a.) $$x = \arcsin y$$

(sprich: x gleich Arcus Sinus y) aussagen; nämlich x ist gleich dem Arcus, dessen Sinus gleich y ist.

In ähnlicher Weise sind die Gleichungen

(4.) $y = \cos x$ und (4a.) $x = \arccos y$,

(5.) $y = \operatorname{tg} x$ und (5a.) $x = \operatorname{arctg} y$,

(6.) $y = \operatorname{ctg} x$ und (6a.) $x = \operatorname{arcctg} y$

gleichbedeutend.

Diese Functionen

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x,$$

welche durch *Umkehrung* aus den *trigonometrischen* Functionen abgeleitet werden, heissen „*cyklometrische* Functionen". Man kann es leicht so einrichten, dass dieselben *eindeutige* Functionen werden, indem man alle Werthe ausserhalb gewisser Grenzen ausschliesst.

Eintheilung der entwickelten Functionen. Die *entwickelten* Functionen, von denen zunächst nur die Rede sein soll, theilt man wieder ein in *algebraische* und *transcendente* Functionen, und zwar heisst y eine *algebraische* Function von x, wenn y einem Ausdrucke gleich ist, welcher aus x und aus constanten Grössen nur durch die gewöhnlichen algebraischen Operationen,

nämlich nur durch *Addition*, *Subtraction*, *Multiplication*, *Division* und *Wurzelausziehung* gebildet ist.

Ist dieses nicht der Fall, so heisst y eine *transcendente* Function von x. Durch jede der Gleichungen

$$y = 2x^3 + 3\sqrt{x} - x^2\sqrt[5]{x}, \tag{7.}$$

$$y = \frac{3x^2 + 7x - 11}{2x + 5} - 13x + 9, \tag{8.}$$

$$y = \sqrt{\frac{2x^2 + 3x - 8}{x + 1}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2}} \tag{9.}$$

wird daher y als eine *algebraische* Function von x erklärt; durch jede der Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \tag{10.}$$

$$y = a^x, \quad y = \log x, \tag{11.}$$

$$y = 3\sin x + 4\cos x, \tag{12.}$$

$$y = a^x + 2\sqrt[x]{b} + x^3 - c \tag{13.}$$

dagegen wird y als eine *transcendente* Function von x erklärt.

Die *algebraischen* Functionen werden wieder eingetheilt in *rationale* und *irrationale*, und die *rationalen* Functionen werden weiter eingetheilt in *ganze rationale* und in *gebrochene rationale* Functionen.

1) *Die ganzen rationalen Functionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen x und aus constanten Grössen nur durch die Operationen des Addirens, des Subtrahirens und des Multiplicirens gebildet.*

(Die Division und die Wurzelausziehung sind also hierbei ausgeschlossen.)

Es ist z. B.

$$y = 3x^4 - \tfrac{7}{2}x^3 + \tfrac{2}{5}x^3 - 11x + \tfrac{3}{8}$$

eine *ganze rationale* Function von x, denn sie ist aus x und den constanten Grössen 3, $\tfrac{7}{2}$, $\tfrac{2}{5}$, 11, $\tfrac{3}{8}$ nur durch Addition, Subtraction und Multiplication zusammengesetzt.

Bemerkung.

Da hierbei die Brüche $\tfrac{7}{2}$, $\tfrac{2}{5}$, $\tfrac{3}{8}$ vorkommen, so könnte man glauben, die Bildung dieser Function widerspräche der soeben angegebenen Regel, weil diese Brüche durch Division entstanden sind.

Dieser Einwand ist aber deshalb unbegründet, weil die Resultate dieser Division selbst wieder constante Grössen sind, die man bei der Bildung einer ganzen rationalen Function beliebig verwenden darf.

Ferner ist zu beachten, dass die Potenzen von x, also

$$x^2 = xx, \quad x^3 = xxx, \quad x^4 = xxxx, \ldots$$

durch Multiplication entstanden sind, so lange der Exponent eine *positive ganze* Zahl ist.

Die Function

$$y = ax + a_1$$

heisst eine *ganze rationale* Function *ersten Grades*, weil x (ohne dass Klammern auftreten) nur in der ersten Potenz vorkommt.

Ebenso heisst

$$y = ax^2 + a_1x + a_2$$

eine ganze rationale Function *zweiten Grades*,

$$y = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

eine ganze rationale Function *dritten Grades*,

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

eine ganze rationale Function n^{ten} *Grades*, weil (ohne dass Klammern auftreten) die höchste Potenz von x, welche vorkommt, x^n ist.

Die Gleichung

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

giebt auch diejenige Form an, auf welche *jede* ganze rationale Function gebracht werden kann, wenn man sämmtliche Klammern auflöst. Ist z. B.

$$y = (2x^2 - 3x + 11)(3x - 5) + x[(2x+3)(x+2) + (x-1)(x+1) - 7],$$

so findet man, indem man alle Klammern auflöst und die Glieder mit gleichen Potenzen von x vereinigt,

$$\begin{aligned} y &= 6x^3 - 19x^2 + 48x - 55 + x[(2x^2 + 7x + 6) + (x^2 - 1) - 7] \\ &= 9x^3 - 12x^2 + 46x - 55. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren führt immer zum Ziele, wie auch die Function durch Addition, Subtraction und Multiplication gebildet sein mag, wenn nur die Anzahl der angewendeten Operationen eine endliche ist. Unter dieser Voraussetzung kann man nämlich zunächst die innersten Klammern auflösen, d. h. diejenigen

Klammerausdrücke, in denen keine weiteren Klammern stehen, und in den gefundenen Resultaten die Glieder vereinigen, welche mit gleichen Potenzen von x multiplicirt sind. Indem man dieses Verfahren fortsetzt, kann man nach und nach alle Klammern auflösen, die Glieder mit gleichen Potenzen von x vereinigen und nach fallenden Potenzen von x ordnen.

Um anzudeuten, dass y eine *ganze* rationale Function von x ist, schreibt man

$$y = g(x), \quad \text{oder} \quad y = G(x).$$

2) *Die gebrochenen rationalen Functionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen x und aus constanten Grössen gebildet durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division.* (Die Wurzelausziehung ist also hierbei ausgeschlossen.)

So sind z. B.

$$y = \frac{ax^2 - b}{cx + d},$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{7x}{2x - 3},$$

$$y = \frac{\dfrac{2x^2 - 1}{5x + 2} + \dfrac{2x + 9}{3x - 4}}{\dfrac{1}{2x} - \dfrac{3x^2}{2x + 5}}$$

gebrochene rationale Functionen von x. Hier tritt also zu den Operationen, welche bei der Bildung von *ganzen* rationalen Functionen zulässig waren, noch die Division hinzu. Wie oft aber auch die Division bei der Bildung einer gebrochenen rationalen Function verwendet sein mag, es lässt sich die Function immer so umformen, dass bei ihrer Bildung nur *eine einzige* Division vorkommt. Es gilt nämlich der Satz:

Jede gebrochene rationale Function lässt sich darstellen als Quotient von zwei ganzen rationalen Functionen, d. h. es lässt sich jede gebrochene rationale Function auf die Form

$$y = \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{bx^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

bringen.

Der Beweis dieses Satzes folgt daraus, dass man Brüche addirt oder subtrahirt, indem man sie auf gleichen Nenner bringt und die Zähler addirt oder subtrahirt, dass man ferner Brüche mit einander multiplicirt, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, und dass man endlich Brüche durcheinander dividirt, indem man den Divisor umkehrt und dann multiplicirt. Alle diese Operationen liefern, wenn sie auf Quotienten von ganzen rationalen Functionen angewendet werden, als Endresultat immer wieder den Quotienten von zwei ganzen rationalen Functionen.

Führt man also bei der Bildung einer gebrochenen rationalen Function alle Additionen, Subtractionen, Multiplicationen und Divisionen in der gehörigen Reihenfolge wirklich aus, indem man immer nur mit Brüchen operirt, welche schon die vorgeschriebene Form haben, so kann man schliesslich die Function selbst auf diese vorgeschriebene Form bringen. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Anzahl der Operationen nicht unendlich gross ist.

Es ist z. B.

$$y = \frac{\dfrac{2x-3}{x-1} + \dfrac{3x-2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-2}} + 7x$$

$$= \frac{\dfrac{5x^2-6x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x}{x-2}} + 7x$$

$$= \frac{5x^2-6x-1}{x^2-1} \cdot \frac{x-2}{x} + 7x$$

$$= \frac{5x^3-16x^2+11x+2}{x^3-x} + 7x$$

$$= \frac{7x^4+5x^3-23x^2+11x+2}{x^3-x}.$$

Bekanntlich ist

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n};$$

deshalb sind Potenzen von x mit *negativen*, ganzzahligen Exponenten auch *gebrochene* rationale Functionen von x.

Um anzudeuten, dass y eine (ganze oder gebrochene) *rationale* Function von x ist, schreibt man gewöhnlich

$$y = R(x).$$

4) *Die irrationalen, entwickelten Functionen werden aus der unabhängigen Veränderlichen x und aus constanten Grössen gebildet durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Wurzelausziehung.*

Hier tritt also noch die Wurzelausziehung hinzu.

Durch die Gleichungen

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - 7} = (2x^2 - 7)^{\frac{1}{3}},$$

$$y = \sqrt[5]{3x - \sqrt{4x^2 + 5}},$$

$$y = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5}}{x^2 - 1}$$

werden also *irrationale* Functionen erklärt. Man erkennt aus diesen Beispielen, dass Potenzen von x mit *gebrochenen* (positiven oder negativen) Exponenten *irrationale* Functionen von x sind, denn es ist

$$x^{+\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

Bemerkung.

Bei dieser Eintheilung der Functionen handelte es sich nur um *entwickelte* Functionen; nimmt man aber die *unentwickelten* Functionen hinzu, so erweitert sich der Begriff der *algebraischen* Functionen, und zwar heisst dann y eine algebraische Function von x, wenn y die Wurzel einer Gleichung von der Form

$$G_0(x) \,.\, y^n + G_1(x) \,.\, y^{n-1} + \cdots + G_{n-1}(x) \,.\, y + G_n(x) = 0$$

ist, wobei $G_0(x)$, $G_1(x)$, ... $G_{n-1}(x)$, $G_n(x)$ sämmtlich *ganze rationale* Functionen von x sind. Vorläufig können aber solche algebraische Functionen übergangen werden.

§ 2.

Geometrische Darstellung der Functionen.

Von dem Verlaufe einer Function kann man sich auf zweifache Weise eine Vorstellung machen, *erstens* durch eine Tabelle und *zweitens* durch eine Figur.

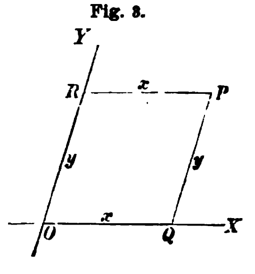
Solche Tabellen sind z. B. für die Functionen $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\log x$, $\log(\sin x)$, $\log(\cos x)$, ... hergestellt und zwar in der Weise, dass in der einen Colonne die verschiedenen, nach regelmässigen Intervallen eingetheilten Werthe von x und in der anderen Colonne die zugehörigen Werthe von y stehen, z. B.

x	$y = \log x$
1	0
2	0,301 030 0
3	0,477 121 3
4	0,602 060 0
.	. . . .

Das andere Mittel bietet die analytische Geometrie. Sind nämlich in einer Ebene zwei sich schneidende gerade Linien OX und OY gegeben (Fig. 3), und legt man durch einen beliebigen Punkt P die Gerade RP parallel zu OX und die Gerade QP parallel zu OY, so erhält man ein Parallelogramm $OQPR$, in welchem

$$OQ = RP = x,$$
$$OR = QP = y$$

Fig. 3.



die *Coordinaten* des Punktes P heissen, und zwar nennt man x die „*Abscisse*" und y die „*Ordinate*" des Punktes P. Die gegebenen Geraden OX und OY heissen die „*Coordinaten-Axen*", und zwar heisst OX die „*Abscissen-Axe*" oder „*X-Axe*", OY heisst die „*Ordinaten-Axe*" oder „*Y-Axe*", und ihre Zusammenstellung heisst ein „*Parallel-Coordinatensystem*". Dabei nennt man O den „*Nullpunkt*" oder den „*Anfangspunkt* des Coordinatensystems".

Durch die Lage des Punktes P sind also seine Coordinaten x und y bestimmt; umgekehrt ist aber auch die Lage des Punktes P bestimmt, wenn seine Coordinaten x und y gegeben sind. Schneidet man nämlich $OQ = x$ von O aus auf der X-Axe und $OR = y$ von O aus auf der Y-Axe ab, so schneiden sich die Geraden, welche man bezw. durch R parallel zur X-Axe und durch Q parallel zur Y-Axe legt, im Punkte P.

Allerdings ist diese Construction nur dann eindeutig, wenn man die *eine* Seite der X-Axe, z. B. die rechts von O verlaufende, als die *positive* und deshalb die andere Seite als die *negative* festsetzt, so dass $OQ = x$ auf der positiven oder negativen Seite abzutragen ist, jenachdem x einen positiven oder negativen Werth hat. Ebenso muss man auf der Y-Axe die *eine* Seite, z. B. die über der X-Axe, als die *positive* und deshalb die andere als die *negative* festsetzen.

Für viele Untersuchungen ist es am bequemsten, ein „*rechtwinkliges*" Coordinatensystem zu Grunde zu legen, bei welchem die Coordinaten-Axen sich rechtwinklig schneiden. Das Parallelogramm $OQPR$ wird dann ein *Rechteck.*

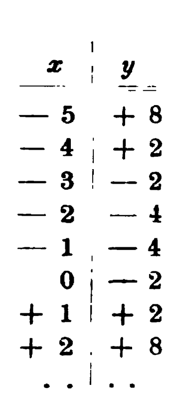
Betrachtet man nun x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so entspricht jedem Werthepaare der eben beschriebenen Tabelle ein Punkt. Da man den Unterschied zwischen je zwei aufeinander folgenden Werthen von x, wie eine nähere Untersuchung zeigt, beliebig klein machen kann, so wird die Anzahl dieser Punkte beliebig gross; auch werden im Allgemeinen die auf einander folgenden Punkte einander beliebig nahe liegen und dadurch eine stetig verlaufende Curve bestimmen, welche der Gleichung

$$y = f(x)$$

entspricht. Ist z. B.

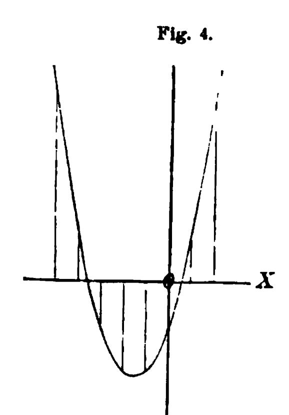
$$y = x^2 + 3x - 2, \tag{1.}$$

so ergiebt sich die Tabelle



x	y
-5	$+8$
-4	$+2$
-3	-2
-2	-4
-1	-4
0	-2
$+1$	$+2$
$+2$	$+8$
. .	. .

Fig. 4.



und daraus die in Fig. 4 dargestellte Curve.

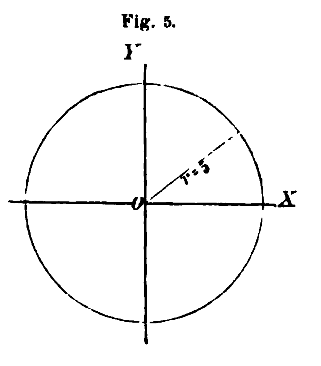
Ein zweites Beispiel liefert die Gleichung

(2.) $$x^2 + y^2 - 25 = 0,$$

oder

(2a.) $$y = \pm\sqrt{25 - x^2}.$$

Fig. 5.



Die Curve, welche dieser Gleichung entspricht, ist der in Fig. 5 dargestellte Kreis.

Liegt die einer Gleichung zwischen x und y entsprechende Curve gezeichnet vor, so kann man zu jedem Werthe von x die zugehörigen Werthe von y finden, indem man im Abstande x eine Parallele zur Y-Axe zieht, welche die Curve in einem oder in mehreren Punkten P schneidet. Der Abstand eines solchen Punktes P von der X-Axe ist dann ein zugehöriger Werth von y.

Möglicher Weise wird diese Parallele die Curve in gar keinem Punkte schneiden. Dies tritt in dem zweiten Beispiele ein, wenn $x^2 > 25$ ist; dann wird nämlich y imaginär.

§ 3.

Functionen von mehreren Veränderlichen.

Besteht eine Gleichung zwischen *drei* Veränderlichen x, y, z, ist z. B.

$$z = 3x^2 - 7xy + 11y^2,$$

so heisst z eine Function der beiden Veränderlichen x und y, weil jedem Werthepaare x, y ein oder mehrere Werthe von z nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.

Ganz allgemein kann man eine Function von zwei Veränderlichen in folgender Weise erklären:

Eine veränderliche Grösse z heisst eine Function der beiden Veränderlichen x und y für $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, wenn jedem Werthsysteme x, y in den angegebenen Intervallen ein oder mehrere Werthe von z nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.

Diese Erklärung lässt sich leicht auch auf Functionen von *drei* und *mehr* Veränderlichen erweitern.

So ist z. B. der Flächeninhalt $\left(\frac{gh}{2}\right)$ eines Dreiecks eine Function der Grundlinie g und der Höhe h; das Volumen $\left(\frac{r^2\pi h}{3}\right)$ eines Kreiskegels ist eine Function vom Halbmesser r des Grundkreises und der Höhe h.

Das Volumen eines Kegelstumpfes

$$\frac{h\pi}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

ist eine Function der Höhe h und der Halbmesser r_1 und r_2 der beiden begrenzenden Kreise.

Die Schwingungszahl einer gespannten Saite ist eine Function ihrer Länge, ihrer Dicke und der spannenden Gewichte.

Der Zins, welchen ein ausgeliehenes Capital bringt, ist eine Function des Capitals, der Zeit und des Zinsfusses.

Um anzudeuten, dass y eine Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, schreibt man

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$y = F(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Die Functionen von *mehreren* Veränderlichen kann man in derselben Weise eintheilen wie die Functionen von *einer* Veränderlichen; es giebt also auch hier *eindeutige* und *mehrdeutige*, *entwickelte* und *unentwickelte* Functionen.

Die *entwickelten* Functionen werden eingetheilt in *algebraische* und *transcendente*. Dabei unterscheidet man unter den *algebraischen* Functionen je nach ihrer Bildung aus den unabhängigen Veränderlichen und constanten Grössen gerade so wie bei den Functionen von *einer* Veränderlichen

1) *ganze rationale* Functionen,
2) *gebrochene rationale* Functionen,
3) *irrationale* Functionen.

Alle übrigen Functionen heissen *transcendent*.

§ 4.

Begriff der Grenze.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 1.)*)

Wenn eine veränderliche Grösse X *(oder eine Reihe von Grössen* X_1, X_2, $X_3, \ldots$*) sich einer constanten Grösse* A *immer mehr nähert, so dass schliesslich der Unterschied zwischen* X *und* A *(bezw. zwischen* X_n *und* A *für hinreichend grosses* n*) beliebig klein wird, so heisst* A *die Grenze (limes) von* X, *bezw. von* X_n.

Dabei kann es vorkommen, dass X immer kleiner bleibt als die Grenze A, oder dass X immer grösser bleibt als die Grenze A; es kann aber auch vorkommen, dass diese veränderliche Grösse X bald grösser ist, bald kleiner als die Grenze A, der sie sich nähert. Ausserdem ist es möglich, dass für gewisse Werthe von n der Unterschied zwischen X_n und A *kleiner* ist als der Unterschied zwischen X_{n+1} und A, wenn nur für *hin-*

*) Die wichtigsten Formeln sind im Anhange zu einer Tabelle zusammengestellt.

reichend grosse Werthe von n dieser Unterschied *beliebig klein* gemacht werden kann.

Um auszudrücken, dass A die Grenze von X ist, schreibt man

$$A = \lim X.$$

Beispiele.

1) Der Umfang eines Kreises ist die Grenze vom Umfange des dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks, wenn die Anzahl der Seiten immer grösser wird, denn der Unterschied zwischen beiden wird *beliebig klein*, wenn man n *hinreichend gross* macht.

Ebenso kann der Umfang des Kreises als Grenze des dem Kreise umschriebenen regelmässigen n-Ecks angesehen werden.

2) Auch die Fläche des Kreises ist die Grenze vom Flächeninhalt des dem Kreise einbeschriebenen und ebenso des umschriebenen n-Ecks, wenn n immer grösser wird.

3) Es ist

$$0{,}7777\ldots = \lim_{n=\infty}\left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots + \frac{7}{10^n}\right) = \frac{7}{9}.$$

Hierbei bedeutet das Zeichen $\lim\limits_{n=\infty}$ (sprich: limes für n gleich unendlich), dass der Werth der Summe $\left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots + \frac{7}{10^n}\right)$ gesucht wird, wenn n über jedes Mass hinaus wächst.

Dieser gesuchte Grenzwerth ist in der That $\frac{7}{9}$, denn es wird

$$\frac{7}{9} - \frac{7}{10} = \frac{7}{90},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100}\right) = \frac{7}{90} - \frac{7}{100} = \frac{7}{900},$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000}\right) = \frac{7}{900} - \frac{7}{1000} = \frac{7}{9000},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{7}{9} - \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots + \frac{7}{10^n}\right) = \frac{7}{9 \cdot 10^n}.$$

Der Unterschied zwischen $\frac{7}{9}$ und 0,7777 ... wird also *beliebig klein*, wenn man eine *hinreichend grosse* Anzahl von Decimalstellen berücksichtigt.

Aehnliches gilt ganz allgemein, wenn man einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner von 2 und 5 verschiedene Factoren enthält, in einen periodischen Decimalbruch verwandelt.

4) Es ist

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=2.$$

In der That, es wird

$$2-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8},$$

. . . .

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}.$$

Der Unterschied zwischen $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ und 2 wird also *beliebig klein*, wenn man n *hinreichend gross* macht.

5) Die Gleichung

$$\sqrt{3}=1{,}732\,05$$

ist nicht genau, denn es wird

$$1{,}732\,05^2=2{,}999\,997\,202\,5,$$

ein Ausdruck, der von 3 um eine kleine Grösse verschieden ist; nimmt man aber mehr Decimalstellen, so kann man den Unterschied zwischen dem Quadrat des Decimalbruches und 3 immer kleiner machen. Es ist also $\sqrt{3}$ die Grenze, welcher sich der Decimalbruch nähert; d. h. der Unterschied zwischen dem Decimalbruch und $\sqrt{3}$ wird *beliebig klein*, wenn man die Anzahl der Stellen *hinreichend gross* macht.

6) $$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

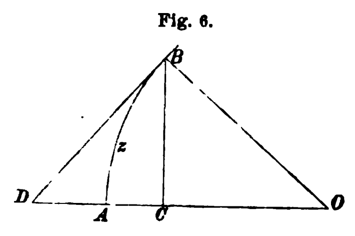


Fig. 6.

Hierbei bedeutet das Zeichen $\lim\limits_{z=0}$ (sprich: limes für z gleich 0), dass der Werth von $\frac{\sin z}{z}$ bestimmt werden soll, wenn sich der Werth des Bogens z der Null beliebig nähert.

Zum Beweise beachte man, dass für alle Bögen z, welche kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (d. h. kleiner als 90^0) sind, in Figur 6

(1.) $$\triangle OCB \leqq \text{Sector } AOB \leqq \triangle OBD$$

wird. Das Gleichheitszeichen kommt hierbei nur in Betracht, wenn der Bogen AB gleich Null wird. Macht man den Halbmesser des Kreises um O gleich 1, so ist

$$2\triangle OCB = CB \,.\, CO = \sin z \cos z,$$

$$2 \text{ Sector } AOB = \widehat{AB} \,.\, AO = z,$$

$$2\triangle OBD = OB \,.\, BD = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

folglich gehen die Ungleichungen (1.) über in

(1 a.) $$\sin z \cos z \leqq z \leqq \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Indem man durch $\sin z$ dividirt, erhält man

(2.) $$\cos z \leqq \frac{z}{\sin z} \leqq \frac{1}{\cos z},$$

oder

(3.) $$\frac{1}{\cos z} \geqq \frac{\sin z}{z} \geqq \cos z;$$

d. h. $\frac{\sin z}{z}$ liegt immer zwischen $\cos z$ und $\frac{1}{\cos z}$. Da nun aber

(4.) $$\lim_{z=0} \cos z = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z=0} \frac{1}{\cos z} = 1$$

wird, so muss auch

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1 \tag{5.}$$

sein.

Der Sinn dieses Resultates lässt sich folgendermassen aussprechen:

Der Unterschied zwischen dem Sinus eines Bogens z und dem Bogen selbst wird im Verhältniss zu diesem Bogen z *beliebig klein*, wenn man den Bogen *hinreichend klein* macht. So ist

$$\begin{array}{ll}
\text{arcus } 4^0 = 0{,}069\,818\,17, & \sin 4^0 = 0{,}069\,756\,47, \\
\text{arcus } 2^0 = 0{,}034\,906\,58, & \sin 2^0 = 0{,}034\,899\,42, \\
\text{arcus } 1^0 = 0{,}017\,453\,29, & \sin 1^0 = 0{,}017\,452\,41, \\
\text{arcus } 30' = 0{,}008\,726\,64, & \sin 30' = 0{,}008\,726\,54, \\
\text{arcus } 15' = 0{,}004\,363\,32, & \sin 15' = 0{,}004\,363\,31, \\
\text{arcus } 7\tfrac{1}{2}' = 0{,}002\,181\,66, & \sin 7\tfrac{1}{2}' = 0{,}002\,181\,66, \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

also

$$\frac{\text{arcus } 4^0 - \sin 4^0}{\text{arcus } 4^0} = \frac{5\,670}{69\,813\,17} = 0{,}000\,812\,17,$$

$$\frac{\text{arcus } 2^0 - \sin 2^0}{\text{arcus } 2^0} = \frac{716}{34\,906\,58} = 0{,}000\,205\,12,$$

$$\frac{\text{arcus } 1^0 - \sin 1^0}{\text{arcus } 1^0} = \frac{88}{17\,453\,29} = 0{,}000\,050\,42,$$

$$\frac{\text{arcus } 30' - \sin 30'}{\text{arcus } 30'} = \frac{10}{8\,726\,64} = 0{,}000\,011\,46,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

§ 5.

Das unendlich Kleine und das unendlich Grosse.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 2—4.)

Nähert sich eine veränderliche Grösse der Grenze 0, *so sagt man, sie werde unendlich klein.*

Nach den Auseinandersetzungen des vorhergehenden Paragraphen könnte man die Erklärung des unendlich Kleinen daher auch so fassen:

Wenn eine veränderliche Grösse immer kleinere und kleinere Werthe annimmt, so dass sie kleiner werden kann als jede gegebene Grösse, so sagt man, sie werde unendlich klein, oder noch besser, *sie werde verschwindend klein.*

Wenn man also von „*verschwindend kleinen*“ oder von „*unendlich kleinen Grössen*“ spricht, so muss man sich stets dessen bewusst bleiben, dass man zunächst mit kleinen veränderlichen Grössen rechnet, die sich dann der Grenze 0 beliebig nähern sollen.

Es ist sehr bequem, diese vereinfachte Bezeichnung zu benutzen, damit man es nicht nöthig hat, in jedem einzelnen Falle die Auseinandersetzung des hier angedeuteten Grenzverfahrens zu wiederholen.

Wenn eine veränderliche Grösse immer grössere und grössere Werthe annimmt, so dass sie jede gegebene Grösse übersteigen kann, so sagt man, sie werde unendlich gross, oder noch besser, *sie sei eine unbegrenzt wachsende Grösse.*

Das Zeichen für unendlich gross ist ∞.

Wenn man also von „*unbegrenzt wachsenden*“ oder von „*unendlich grossen Grössen*“ spricht, so will man wiederum ein Grenzverfahren andeuten, welches darin besteht, dass man zunächst mit endlichen, veränderlichen Grössen rechnet, die dann aber grösser werden dürfen als jede angebbare Grösse.

So wird z. B. $\operatorname{tg}\alpha$ erklärt als das Verhältniss der beiden Katheten im rechtwinkligen Dreieck, von denen die erste dem spitzen Winkel α gegenüberliegt. Wächst der Winkel α, so wächst auch $\operatorname{tg}\alpha$. Für $\alpha = 90^0$ hat diese Erklärung keinen Sinn mehr, weil es kein geradliniges Dreieck giebt, das *zwei* rechte Winkel enthält; trotzdem sagt man

$$\operatorname{tg} 90^0 = \infty$$

und will damit ausdrücken, dass $\operatorname{tg}\alpha$ über jede angebbare Grösse hinaus wächst, wenn sich α dem Werthe 90^0 beliebig nähert.

Eine Grösse heisst „endlich“, wenn sie weder unendlich klein noch unendlich gross ist.

Satz 1. *Neben einer endlichen Grösse darf eine verschwindend kleine Grösse vernachlässigt werden,* oder mit anderen

Worten: *eine endliche Grösse bleibt unverändert, wenn man sie um eine unendlich kleine Grösse vermehrt oder vermindert.*

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der Erklärung der unendlich kleinen oder verschwindend kleinen Grössen. Man könnte die unendlich kleinen Grössen geradezu dadurch erklären, dass sie neben einer endlichen Grösse vernachlässigt werden dürfen.

Von diesem Satze kann man sofort einige Anwendungen machen. Es sei

$$\lim X = A, \qquad \lim Y = B,$$

$$\text{also} \quad X = A + \alpha, \qquad Y = B + \beta,$$

wobei α und β beim Uebergange zur Grenze *verschwindend kleine* Grössen sind. Dann werden aber auch $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ *verschwindend klein*, folglich wird

$$\lim (X \pm Y) = \lim [(A \pm B) + (\alpha \pm \beta)] = A \pm B,$$

oder

$$\lim (X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y. \tag{1.}$$

Dies giebt in Worten die beiden folgenden Sätze:

Satz 2. *Der Grenzwerth einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerthe der einzelnen Summanden.*

Dieser Satz gilt auch für Summen von beliebig vielen Gliedern.

Satz 3. *Der Grenzwerth einer Differenz zweier Grössen ist gleich der Differenz ihrer Grenzwerthe.*

Ferner ist

$$X . Y = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta.$$

Da A und B *endliche* Grössen sind, so werden beim Uebergange zur Grenze αB und βA *verschwindend klein*, und da auch $\alpha\beta$ *verschwindend klein* wird, so erhält man

$$\lim (X . Y) = A . B,$$

oder

$$\lim (X . Y) = \lim X . \lim Y. \tag{2.}$$

Dies giebt in Worten:

Satz 4. *Der Grenzwerth eines Productes ist gleich dem Producte der Grenzwerthe der einzelnen Factoren.*

Schliesslich ist

$$\frac{Y}{X} = \frac{B+\beta}{A+\alpha} = \frac{B}{A} + \frac{\beta A - \alpha B}{A(A+\alpha)}.$$

Beim Uebergang zur Grenze werden βA und αB *verschwindend klein*, während unter der Voraussetzung, dass $A \lesseqgtr 0$ ist, $A(A+\alpha)$ den endlichen Werth A^2 erhält, folglich wird

$$\lim\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{B}{A},$$

oder

$$\lim\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{\lim Y}{\lim X}, \tag{3.}$$

wenn $\lim X \lesseqgtr 0$ ist. Daraus ergiebt sich

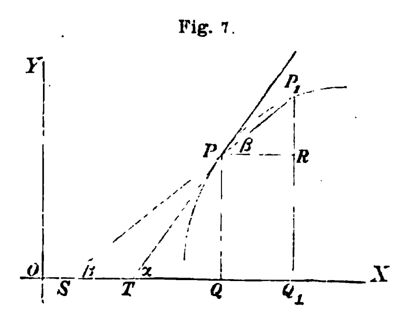
Satz 5. ***Der Grenzwerth eines Bruches, dessen Nenner an der Grenze von Null verschieden bleibt, ist gleich dem Grenzwerthe des Zählers, dividirt durch den Grenzwerth des Nenners.***

Aus der Erklärung der unbegrenzt wachsenden Grössen folgt:

Satz 6. ***Eine unbegrenzt wachsende Grösse wächst auch dann noch unbegrenzt, wenn man sie um eine endliche Grösse vermehrt oder vermindert,*** oder mit anderen Worten: ***eine Grösse bleibt unendlich gross, auch wenn man eine endliche Grösse zu ihr addirt oder von ihr subtrahirt.***

Manche scheinbar elementare Untersuchungen setzen bereits den Begriff des Grenzwerthes, bezw. den Begriff der unendlich kleinen Grössen voraus, wie die beiden folgenden Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik zeigen mögen.

Fig. 7.



1. Es sei

$$y = f(x) \tag{4.}$$

die Gleichung einer Curve PP_1 (Fig. 7), in welcher die Punkte P und P_1 durch eine Secante verbunden sind. Der Winkel β.

den diese Secante mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} RPP_1 = \frac{RP_1}{PR}. \tag{5.}$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten des Punktes P mit x und y, die des Punktes P_1 mit x_1 und y_1*), so wird

$$OQ = x, \quad QP = y, \quad OQ_1 = x_1, \quad Q_1P_1 = y_1,$$

also

$$PR = QQ_1 = OQ_1 - OQ = x_1 - x,$$
$$RP_1 = Q_1P_1 - QP = y_1 - y,$$

folglich wird

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \tag{6.}$$

Die Differenzen $x_1 - x$ und $y_1 - y$ bezeichnet man gewöhnlich mit Δx und Δy. Die Gleichung (6.) nimmt dadurch die Form

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{6a.}$$

an. Nähert sich jetzt der Punkt P_1 dem Punkte P, so werden auch Δx und Δy immer kleiner. Wird schliesslich der Abstand des Punktes P_1 von P verschwindend klein, so werden auch Δx und Δy verschwindend kleine Grössen, welche man dann „*Differentiale*" nennt und mit dx und dy bezeichnet. Gleichzeitig geht die *Secante* PP_1 in die *Tangente* TP über, welche mit der positiven Richtung der X-Axe den Winkel α bildet. *Die Tangente im Curvenpunkte P ist nämlich eine Secante, bei der zwei Schnittpunkte P und P_1 in einen Punkt, den Berührungspunkt P zusammengefallen sind.*

Die Gleichung (6a.) geht daher über in

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{7.}$$

---

*) In dem Folgenden sollen die Coordinaten eines Punktes P immer mit x, y, die eines Punktes P_1 mit x_1, y_1, allgemein die eines Punktes P_n mit x_n, y_n bezeichnet werden.

Den Quotienten der beiden Differentiale dy und dx nennt man einen „*Differential-Quotienten*“.

2. Unter der Geschwindigkeit c eines (z. B. in gerader Linie) *gleichförmig* fortbewegten Massenpunktes versteht man die Länge des Weges, der in der Zeiteinheit (Secunde) zurückgelegt wird. In t Secunden ist daher die Länge des zurückgelegten Weges

$$s = ct. \tag{8.}$$

Ebenso ist die Länge des Weges, welchen der Massenpunkt in t_1 Secunden zurücklegt,

$$s_1 = ct_1, \quad \text{also} \quad s_1 - s = c(t_1 - t). \tag{8a.}$$

Dabei ist $s_1 - s$ der in dem Zeitintervall von t bis t_1 zurückgelegte Weg. Dies giebt für die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung den Werth

$$c = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}. \tag{9.}$$

In dieser Formel ist es ganz gleichgültig, wie gross, bezw. wie klein das Zeitintervall $t_1 - t$ ist, weil der zurückgelegte Weg $s_1 - s$ in demselben Verhältnisse wächst und abnimmt wie $t_1 - t$.

Wenn die Bewegung nicht mehr gleichförmig ist, d. h. wenn der bewegte Massenpunkt in gleichen Zeiten nicht mehr gleiche Strecken zurücklegt, so kann man doch noch von der *mittleren* Geschwindigkeit im Zeitintervall von t bis t_1 sprechen und diese wieder erklären als das Verhältniss der in der Zeit $t_1 - t$ zurückgelegten Strecke $s_1 - s$ zu diesem Zeitintervall $t_1 - t$. Bezeichnet man diese Differenzen $s_1 - s$ und $t_1 - t$ bezw. mit $\varDelta s$ und $\varDelta t$, so ist also die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{\varDelta s}{\varDelta t} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t}.$$

Wird das Zeitintervall $\varDelta t$ immer kleiner und schliesslich verschwindend klein, so wird auch $\varDelta s$ verschwindend klein. Diese verschwindend kleinen Grössen bezeichnet man bezw. mit dt und ds und nennt

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{10.}$$

„*die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung zur Zeit t*".

Auch hier nennt man die verschwindend kleinen Grössen ds und dt „*Differentiale*" und ihren Quotienten einen „*Differential-Quotienten*".

§ 6.

Ueber die Rechnung mit unendlich kleinen Grössen.

Nach den Erklärungen des vorhergehenden Paragraphen wird eine Grösse dann unendlich klein (oder verschwindend klein), wenn man sie kleiner machen kann als jede gegebene Grösse. Wie gross auch die Genauigkeit sein mag, mit der man rechnen will, man kann die verschwindend kleinen Grössen so klein machen, dass sie neben einer endlichen Grösse nicht mehr in Betracht kommen.

Verlangt man z. B., dass eine Zahl bis auf n Decimalstellen genau berechnet wird, so genügt es, eine etwa hinzutretende unendlich kleine Grösse kleiner anzunehmen als

$$\frac{1}{2 \cdot 10^n},$$

damit sie im Vergleich zu der endlichen Zahl *verschwindend* klein wird. Man kann daher die unendlich kleinen Grössen nicht mit *endlichen*, sondern nur mit *unendlich kleinen* Grössen vergleichen; das *Verhältniss* zweier unendlich kleinen Grössen kann nämlich sehr wohl einen *endlichen* Werth haben, wie schon die Beispiele

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad v = \frac{ds}{dt}$$

in § 5 gezeigt haben. Mit solchen *Differentialen* und *Differential-Quotienten* hat man es hauptsächlich in der *Differential-Rechnung* zu thun.

Man kann aber auch in anderer Weise mit verschwindend kleinen Grössen rechnen.

Theilt man nämlich eine *endliche* Grösse F in n Theile (die übrigens nicht gleich zu sein brauchen), so ist F gleich der

Summe aller dieser Theile. Wenn nun die Zahl n, d. h. die Anzahl der Theile in's Unbegrenzte wächst, so dass die einzelnen Theile immer kleiner und schliesslich unendlich klein werden, so erkennt man, dass auch die Summe von *unendlich vielen, unendlich kleinen* Grössen sehr wohl einen *endlichen* Werth F haben kann.

Solche Summen von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen treten in der *Integral-Rechnung* auf.

Beispiele davon kommen schon in der Planimetrie und Stereometrie vor.

So berechnet man die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser r, indem man sie in unendlich viele, unendlich schmale Sectoren zerlegt. Jeder solche Sector wird dann als ein Dreieck betrachtet, dessen Spitze der Mittelpunkt des Kreises ist, und dessen Grundlinie in der Peripherie des Kreises liegt. Da diese Dreiecke alle dieselbe Höhe r haben, so braucht man nur ihre Grundlinien zu addiren und erhält als Summe derselben den Umfang des Kreises, nämlich

$$u = 2r\pi.$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist daher

$$F = \frac{ur}{2} = r^2\pi.$$

In ähnlicher Weise berechnet man die Oberfläche einer Kugel, indem man sie in unendlich viele, unendlich schmale Zonen zerlegt, welche man als Mäntel von Kegelstumpfen betrachtet.

Ferner findet man das Volumen V einer Kugel, indem man die Kugeloberfläche in unendlich kleine Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke als die Grundflächen von Pyramiden betrachtet, die alle ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel haben. Die Höhe ist bei allen diesen Pyramiden gleich dem Halbmesser r der Kugel, folglich ist die Summe ihrer Volumina gleich der Summe ihrer Grundflächen, multiplicirt mit $\frac{r}{3}$. Da die Summe der Volumina gleich dem Volumen der Kugel und die Summe der Grundflächen gleich der Kugeloberfläche $(4r^2\pi)$ ist, so findet man

$$V = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Bei der Rechnung mit unendlich kleinen Grössen kommen daher hauptsächlich nur zwei Aufgaben in Betracht:

1) *Es ist der Werth zu bestimmen, welchen das Verhältniss von zwei unendlich kleinen Grössen annimmt.*

2) *Es ist die Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen zu bestimmen.*

In dem Folgenden wird daher auch nur auf diese beiden Aufgaben Rücksicht genommen werden.

§ 7.

Verschiedene Ordnungen der unendlich kleinen Grössen.

Die verschwindend kleinen Grössen, welche in einer Rechnung vorkommen, können noch sehr verschiedenartig sein. Zerlegt man z. B. einen Würfel durch Schnitte, senkrecht zu einer Seitenkante, in n gleiche Schichten, so werden die einzelnen Schichten verschwindend kleine Grössen, wenn n in's Unbegrenzte wächst.

Legt man jetzt noch Schnitte, senkrecht zu einer zweiten Kante, so kann man jede dieser Schichten in n gleiche Säulen zerlegen. Wenn jetzt n wieder in's Unbegrenzte wächst, so werden diese Säulen verschwindend kleine Grössen, und zwar sind sie auch noch verschwindend klein im Verhältniss zu jeder einzelnen Schicht, weil erst unendlich viele Säulen eine solche Schicht ausmachen.

Schliesslich kann man noch durch Schnitte, senkrecht zu einer dritten Kante des Würfels jede Säule in n Würfel zerlegen. Wächst n wieder in's Unbegrenzte, so werden diese Würfel noch verschwindend klein sein im Verhältniss zu den verschwindend kleinen Säulen, weil erst unendlich viele Würfel eine solche Säule ausmachen.

Dieses Beispiel zeigt, dass man die unendlich kleinen Grössen noch in verschiedene Ordnungen eintheilen muss.

Kommen also in einer Rechnung verschiedenartige unendlich kleine Grössen vor, so kann man eine, z. B. α, nach Belieben

auswählen und festsetzen, dass α eine *unendlich kleine Grösse erster Ordnung* heisse.

Ist dann β eine andere unendlich kleine Grösse, und wird

$$\frac{\beta}{\alpha} = p$$

eine *endliche* Grösse, so heisst β gleichfalls eine „*unendlich kleine Grösse erster Ordnung*".

Die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung haben daher nach dieser Festsetzung alle die Form αp.

Wenn dagegen $\frac{\beta}{\alpha}$ selbst wieder eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, wenn also $\frac{\beta}{\alpha}$ auf die Form αp gebracht werden kann, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = p$$

eine *endliche* Grösse. Man sagt dann, β sei eine „*unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung*".

Die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung haben daher alle die Form $\alpha^2 p$.

Ist auch noch $\frac{\beta}{\alpha^2}$ eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, lässt sich also $\frac{\beta}{\alpha^2}$ auf die Form αp bringen, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha^3} = p$$

eine endliche Grösse, und β heisst eine „*unendlich kleine Grösse dritter Ordnung*".

So kann man fortfahren; es heisst dann β eine „*unendlich kleine Grösse n^{ter} Ordnung*", wenn

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = p$$

eine *endliche* Grösse ist, wenn also

$$\beta = \alpha^n p.$$

Dabei ist n nicht nothwendiger Weise eine *ganze* Zahl, sondern n darf auch eine *gebrochene potitive* Zahl sein.

Auch wenn man für n gebrochene Werthe zulässt, so sind in der Form $\alpha^n p$ noch nicht alle unendlich kleinen Grössen erschöpft, wie später gezeigt werden soll. Deshalb möge die gegebene Erklärung dahin erweitert werden, dass γ *im Vergleich zu* α *eine „unendlich kleine Grösse höherer Ordnung" heissen möge, wenn noch* $\frac{\gamma}{\alpha}$ *unendlich klein wird.*

Dies vorausgeschickt, gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. *Unterscheiden sich die unendlich kleinen Grössen derselben Ordnung* α *und* α' *von einander nur durch eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung* γ, *so ist der Grenzwerth ihres Verhältnisses gleich 1.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\alpha' - \alpha = \gamma, \quad \text{oder} \quad \alpha' = \alpha + \gamma, \tag{1.}$$

wobei γ eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung ist, so dass $\frac{\gamma}{\alpha} = \varepsilon$ selbst noch unendlich klein wird. Deshalb folgt aus Gleichung (1.)

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \text{oder} \quad \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1, \tag{2.}$$

denn die unendlich kleine Grösse ε darf neben der endlichen Grösse 1 vernachlässigt werden (nach Satz 1 in § 5).

Von diesem Satze gilt auch die **Umkehrung:**

Ist der Grenzwerth, dem sich das Verhältniss zweier unendlich kleinen Grössen α *und* α' *nähert, gleich 1, so können sich* α *und* α' *nur durch eine unendlich kleine Grösse höherer Ordnung von einander unterscheiden.*

Beweis. Ist nämlich wieder

$$\alpha' - \alpha = \gamma, \quad \alpha' = \alpha + \gamma,$$

also

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma}{\alpha},$$

so folgt aus $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$, dass $\frac{\gamma}{\alpha}$ unendlich klein sein muss.

Beispiel. Es war (vergl. Formel Nr. 1 der Tabelle)

$$\lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

folglich wird $z - \sin z$ unendlich klein von höherer Ordnung wenn z unendlich klein von der *ersten* Ordnung wird.

Satz 2. *Hat das Verhältniss zweier unendlich kleinen Grössen α und β einen endlichen Grenzwerth (oder den Grenzwerth 0), so ändert sich dieser Grenzwerth nicht, wenn man α und β um unendlich kleine Grössen höherer Ordnung vermehrt oder vermindert.*

Man soll also zeigen, dass

$$\lim \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta},$$

wenn α und β unendlich kleine Grössen von beliebiger Ordnung sind, während γ und δ unendlich kleine Grössen höherer Ordnung sein sollen, so dass

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma' \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\beta} = \delta'$$

selbst noch unendlich kleine Grössen sind.

Beweis. Es ist

$$\frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \frac{\alpha(1 \pm \gamma')}{\beta(1 \pm \delta')} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'}\right) \tag{3.}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'}.$$

Da

$$\lim (1 \pm \delta') = 1, \quad \lim (\pm \gamma' \mp \delta') = 0,$$

und da $\frac{\alpha}{\beta}$ einen endlichen Werth hat, so wird

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'} = 0, \tag{4.}$$

d. h. $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\pm \gamma' \mp \delta'}{1 \pm \delta'}$ wird *verschwindend* klein und darf neben der *endlichen* Grösse $\frac{\alpha}{\beta}$ vernachlässigt werden. Man erhält daher

(5.) $$\lim \frac{\alpha \pm \gamma}{\beta \pm \delta} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Da sich die verschwindend kleinen Grössen α und β von

$$\alpha' = \alpha \pm \gamma \quad \text{und} \quad \beta' = \beta \pm \delta$$

nur durch verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung unterscheiden, so kann man die Gleichung (5.) auf die Form

(5a.) $$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

bringen und dem Satze 2 die folgende Fassung geben:

Satz 2a. *Der Grenzwerth von* $\frac{\alpha}{\beta}$ *bleibt ungeändert, wenn man die verschwindend kleinen Grössen* α *und* β *durch andere* α' *und* β' *ersetzt, welche sich von den ersteren nur durch verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung unterscheiden.*

Beispiel. Nach Formel Nr. 1 der Tabelle ist, wenn man für z das eine Mal $3x$ und das andere Mal $4x$ setzt,

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1, \quad \lim_{x=0} \frac{\sin(4x)}{4x} = 1,$$

folglich unterscheiden sich $\lim \sin(3x)$ und $\lim \sin(4x)$ von $\lim(3x)$ und $\lim(4x)$ nur durch verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung; man erhält daher

$$\lim_{x=0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} = \lim \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Satz 3. *Sind* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *verschwindend kleine Grössen, deren Anzahl* n *in's Unbegrenzte wächst, und weiss man, dass die Summe dieser unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen einen endlichen Grenzwerth* S *besitzt, dass also*

$$S = \lim_{n=\infty} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)$$

ist, so bleibt dieser Grenzwerth unverändert, wenn man die verschwindend kleinen Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *um verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ *vermehrt oder vermindert.*

Dem Beweis dieses Satzes möge ein Beispiel zur Erläuterung vorangestellt werden.

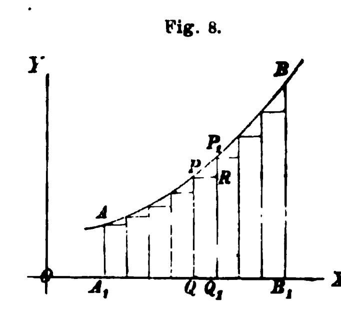


Fig. 8.

Es sei eine ebene Figur A_1ABB_1 (Fig. 8), oben begrenzt durch einen Curvenbogen AB, links und rechts von den Ordinaten A_1A, B_1B und unten durch den Abschnitt A_1B_1 der X-Axe. Indem man A_1B_1 in n (gleiche oder ungleiche) Theile zerlegt und durch die Theilpunkte Parallelen zu der Y-Axe zieht, kann man den Flächeninhalt F der Figur in n Streifen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ zerlegen. Dadurch wird

$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \Sigma\alpha. \tag{6.}$$

Ist nun QPP_1Q_1 ein solcher Streifen, und zieht man durch P eine Parallele PR zur X-Axe, so zerfällt der Streifen α in das Rechteck $QPRQ_1 = \alpha'$ und das Dreieck $PRP_1 = \gamma$, folglich wird, wenn man dieselbe Construction für sämmtliche Streifen ausführt,

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \gamma_1, \quad \alpha_2 = \alpha_2' + \gamma_2, \ldots \alpha_n = \alpha_n' + \gamma_n, \tag{7.}$$

oder

$$\alpha_1' = \alpha_1 - \gamma_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2 - \gamma_2, \ldots \alpha_n' = \alpha_n - \gamma_n, \tag{7a.}$$

$$F = \Sigma\alpha = \Sigma(\alpha' + \gamma) = \Sigma\alpha' + \Sigma\gamma. \tag{8.}$$

In Figur 8 sind die Streifen α sämmtlich grösser als die Rechtecke α', so dass in den Gleichungen (7.) und (8.) die Grössen γ sämmtlich *positiv* sind. Es können aber auch (wie in Figur 9) die Streifen α *sämmtlich kleiner* sein als die Rechtecke α', oder es können (wie in Figur 10) die Streifen α zum

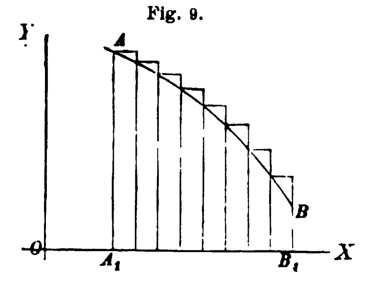


Fig. 9.

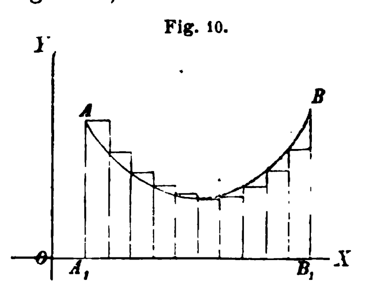


Fig. 10.

Theil *grösser*, zum Theil *kleiner* sein als die Rechtecke α'. Die Gleichungen (7.) und (8.) bleiben auch in diesen Fällen

noch richtig, wenn man unter den Grössen γ auch *negative* zulässt.

Wird jetzt die Anzahl n der Streifen immer grösser, werden also die Streifen selbst immer schmaler, so werden die Dreiecke γ nicht nur selbst immer kleiner, sondern auch ihre Summe wird immer kleiner. Selbst wenn man die Dreiecke γ alle positiv nimmt, so ist ihre Summe kleiner als ein Rechteck, das die Seite A_1B_1 zur Grundlinie und die grösste Höhe der Dreiecke γ zur Höhe hat. Da nun aber diese Höhe mit wachsendem n immer kleiner wird, so wird auch der Flächeninhalt des Rechtecks und deshalb erst recht $\Sigma\gamma$ beliebig klein. Man erhält daher

$$\lim \Sigma\gamma = 0, \quad F = \lim \Sigma\alpha = \lim \Sigma\alpha'. \tag{9.}$$

Nach diesem Beispiele möge der oben ausgesprochene Satz zunächst für den Fall bewiesen werden, dass die Grössen α und γ sämmtlich positiv sind. Es wird dann

$$\begin{cases} S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \\ S_2 = (\alpha_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2) + \cdots + (\alpha_n + \gamma_n) \geqq S_1. \end{cases} \tag{10.}$$

Nach Voraussetzung sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung, d. h. es sind

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \varepsilon_2, \ldots \frac{\gamma_n}{\alpha_n} = \varepsilon_n \tag{11.}$$

selbst wieder verschwindend kleine Grössen, die man also kleiner machen kann als jede gegebene Grösse. Man kann sie z. B. kleiner machen als

$$\varepsilon = \frac{1}{10^{\varkappa}}, \tag{12.}$$

wobei man den Exponenten $\varkappa$ noch so gross machen kann, wie man will. Dies giebt

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \quad \varepsilon_2 \leqq \varepsilon, \ldots \varepsilon_n \leqq \varepsilon. \tag{13.}$$

Deshalb wird

$$\begin{aligned} S_2 &= (\alpha_1 + \alpha_1\varepsilon_1) + (\alpha_2 + \alpha_2\varepsilon_2) + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n\varepsilon_n) \\ &= \alpha_1(1 + \varepsilon_1) + \alpha_2(1 + \varepsilon_2) + \cdots + \alpha_n(1 + \varepsilon_n), \end{aligned}$$

oder

$$(14.)\qquad S_2 \leqq \alpha_1(1+\varepsilon) + \alpha_2(1+\varepsilon) + \cdots + \alpha_n(1+\varepsilon),$$

$$(14a.)\qquad S_2 \leqq (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(1+\varepsilon) = S_1(1+\varepsilon),$$

oder mit Rücksicht auf die Ungleichung (10.)

$$(15.)\qquad S_1 < S_2 \leqq S_1 + \varepsilon S_1.$$

Wächst jetzt n in's Unbegrenzte, so wird nach Voraussetzung $\lim S_1 = S$ eine bestimmte, endliche Grösse, und ε wird beliebig klein; folglich wird auch $\lim \varepsilon S_1$ beliebig klein, d. h. verschwindend klein, so dass die Ungleichung (15.) übergeht in die Gleichung

$$(16.)\qquad \lim S_2 = \lim S_1 = S.$$

Sind die Grössen α und γ theilweise positiv und theilweise negativ, so möge der Satz nur unter der Voraussetzung bewiesen werden, dass

$$S = \lim_{n=\infty}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \lim_{n=\infty} \Sigma\alpha$$

auch dann noch einen endlichen Werth behält, wenn man die Grössen α alle *positiv* nimmt. Bezeichnet man also den absoluten Betrag von α mit $|\alpha|$ und den absoluten Betrag von γ mit $|\gamma|$, so kann man jetzt in derselben Weise wie vorhin zeigen, dass

$$\lim_{n=\infty} \Sigma|\gamma| = 0$$

wird. Folglich ist erst recht

$$\lim_{n=\infty} \Sigma\gamma = 0$$

und deshalb

$$\lim_{n=\infty} \Sigma\alpha = \lim_{n=\infty} \Sigma(\alpha + \gamma).$$

Setzt man

$$\alpha_1' = \alpha_1 \pm \gamma_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2 \pm \gamma_2, \ldots \alpha_n' = \alpha_n \pm \gamma_n,$$

so unterscheiden sich die verschwindend kleinen Grössen α und α' von einander nur um verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung; nach dem eben bewiesenen Satze 3 wird dann

$$\lim(\alpha_1' + \alpha_2' + \cdots + \alpha_n') = \lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n).$$

Man kann daher diesem Satze auch die folgende Fassung geben:

Satz 3a. *Der Grenzwerth von $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ bleibt unverändert, wenn die verschwindend kleinen Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ durch andere $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_n'$ ersetzt werden, die sich von ihnen nur um verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung unterscheiden.*

Eine Anwendung dieses Satzes macht man schon bei der Berechnung der Kreisfläche, denn man betrachtet dabei die unendlich vielen Kreissectoren, in welche die Kreisfläche zerlegt werden kann, als geradlinige Dreiecke. Ein solches Dreieck unterscheidet sich von dem entsprechenden Sector um ein Kreissegment; da aber diese Segmente unendlich kleine Grössen höherer Ordnung werden, so darf man sie nach dem vorigen Satze in der That vernachlässigen.

Ebenso dürfen bei der Berechnung der Kugeloberfläche die Kugelzonen nur deshalb durch die Mäntel abgestumpfter Kegel ersetzt werden, weil sie sich von den letzteren nur um verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung unterscheiden.

Schliesslich sind auch bei der Berechnung des Volumens einer Kugel die in § 6 angegebenen Theile, streng genommen, keine dreiseitigen Pyramiden, sondern sie unterscheiden sich von diesen um verschwindend kleine Grössen höherer Ordnung.

§ 8.

Begriff der Stetigkeit.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 5.)

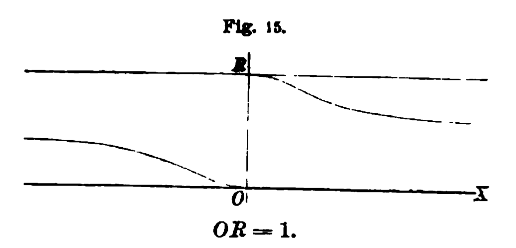
Wenn durch die Gleichung

$$y = f(x) \tag{1.}$$

irgend eine Function von x erklärt ist, so werden im Allgemeinen unendlich kleine Aenderungen von x auch unendlich kleine Aenderungen von y nach sich ziehen. Für alle Werthe von x, bei welchen dies der Fall ist, heisst die Function *stetig* oder *continuirlich*.

Diese Bezeichnung ist der in § 1 angedeuteten geometrischen Darstellung einer Veränderlichen entnommen. Durchläuft nämlich der Punkt Q, welcher auf der X-Axe den Werthen der

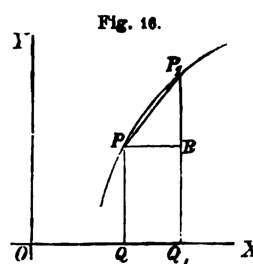
Fig. 15.



$OR = 1.$

Daraus erkennt man, dass sich y sprungweise ändert, wenn x den Werth 0 passirt, und zwar springt y von 0 bis 1. (Vergl. Fig. 15.)

Fig. 16.



Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P, so stellt die Gleichung (1.) eine Curve dar. Die Punkte P und P_1, welche den Werthen x und x_1 entsprechen, werden einander beliebig nahe liegen, wenn die Function für den betreffenden Werth von x stetig ist, und wenn $x_1 - x$ hinreichend klein wird. Nach Voraussetzung wird nämlich $y_1 - y$ mit $x_1 - x$ zugleich verschwindend klein, folglich auch

$$PP_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \tag{6.}$$

(Vergl. Fig. 16.)

Der Verlauf der Curve, welche der Gleichung

$$y = f(x)$$

entspricht, ist also im Punkte P ein *stetiger* (*continuirlicher*). Wird aber $y_1 - y$ nicht mit $x_1 - x$ zugleich verschwindend klein, so ist die Curve im Punkte P *unstetig*, wie die Figuren 12, 13, 14 und 15 zeigen, welche den oben angeführten Beispielen entsprechen.

Bemerkung.

Eine Unstetigkeit der Function kann *scheinbar* auch dadurch eintreten, dass die Werthe von y imaginär werden, wenn x das Intervall von x_1 bis x_2 durchläuft. Ist z. B.

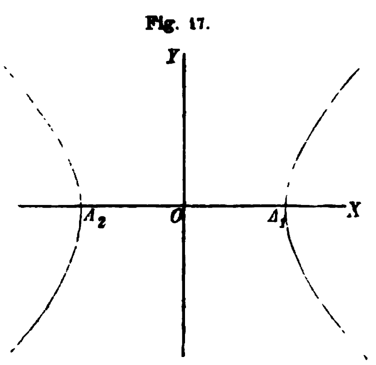
$$y = \pm\sqrt{x^2 - a^2},$$

so ist y nur reell, so lange $x^2 \geqq a^2$ ist; y wird dagegen imaginär, wenn $x^2 < a^2$ ist, wenn also

$$-a < x < +a.$$

Für die Werthe von $x = -a$ bis $x = +a$ wird deshalb die Curve unterbrochen, wie man aus Fig. 17 ersieht. Trotzdem darf man diesen Fall nicht als eine Unstetigkeit betrachten, wie bei der Theorie der complexen Grössen gezeigt werden soll. Vorläufig kommt übrigens dieser Fall nicht in Betracht, weil nur *reelle* Werthe der Functionen berücksichtigt werden sollen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

Fig. 17.



Man kann den Begriff der Stetigkeit, ganz unabhängig von der geometrischen Anschauung, in folgender Weise erklären:

Eine Function

$$y = f(x)$$

heisst für solche Werthe von x stetig, für welche die Differenz

$$\Delta = f(x + \varepsilon) - f(x - \delta)$$

mit den positiven Grössen δ und ε zugleich verschwindend klein wird.

Ist z. B.

$$f(x) = \frac{1}{x-a}, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \frac{1}{x+\varepsilon-a}, \; f(x-\delta) = \frac{1}{x-\delta-a},$$

so wird

$$\Delta = \frac{1}{x+\varepsilon-a} - \frac{1}{x-\delta-a} = \frac{-(\delta+\varepsilon)}{(x-a)^2 + (\varepsilon-\delta)(x-a) - \delta\varepsilon}.$$

Dieser Ausdruck wird mit δ und ε zugleich verschwindend klein, so lange x von a verschieden ist. Wird aber x gleich a, so ist

$$\Delta = \frac{-(\delta+\varepsilon)}{-\delta\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\delta}$$

ein Ausdruck, der für unendlich kleine Werthe von δ und ε

sogar unendlich gross wird. Die Function ist deshalb für x gleich a *unstetig.*

Ist

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad \text{also} \quad f(x+\varepsilon) = \operatorname{tg}(x+\varepsilon), \quad f(x-\delta) = \operatorname{tg}(x-\delta),$$

so wird

$$\varDelta = \operatorname{tg}(x+\varepsilon) - \operatorname{tg}(x-\delta) = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\cos(x+\varepsilon)\cos(x-\delta)}.$$

Dieser Ausdruck wird mit δ und ε zugleich unendlich klein, wenn

$$-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

denn dann ist $\cos x$ von 0 verschieden. Wird aber x gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = -\sin\varepsilon, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) = \sin\delta,$$

also

$$\varDelta = \frac{-\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\delta\sin\varepsilon} = \frac{-\sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon}{\sin\delta\sin\varepsilon},$$

oder

$$\varDelta = -\operatorname{ctg}\delta - \operatorname{ctg}\varepsilon,$$

ein Ausdruck, welcher für unendlich kleine Werthe von δ und ε gleich $-\infty$ wird. Die Function $\operatorname{tg} x$ ist daher für x gleich $\frac{\pi}{2}$ *unstetig.*

Ist

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \text{also} \quad f(x+\varepsilon) = \frac{1}{(x+\varepsilon)^2}, \quad f(x-\delta) = \frac{1}{(x-\delta)^2},$$

so wird

$$\varDelta = \frac{1}{(x+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-\delta)^2} = \frac{-2x(\delta+\varepsilon)+\delta^2-\varepsilon^2}{(x+\varepsilon)^2(x-\delta)^2}.$$

Für alle Werthe von x, welche von 0 verschieden sind, wird dieser Ausdruck mit δ und ε zugleich verschwindend klein; ist aber $x = 0$, so wird

$$\varDelta = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\delta^2}$$

und nimmt beliebig grosse Werthe an, wenn δ und ε hinreichend klein und von einander verschieden sind; d. h. y wird für $x = 0$ *unstetig*.

Ist

$$f(x) = \frac{a^{\frac{1}{x}}}{1 + a^{\frac{1}{x}}}, \text{ also } f(x+\varepsilon) = \frac{a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}{1 + a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}, \; f(x-\delta) = \frac{a^{\frac{1}{x-\delta}}}{1 + a^{\frac{1}{x-\delta}}},$$

so wird

$$\Delta = \frac{a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}}{1 + a^{\frac{1}{x+\varepsilon}}} - \frac{a^{\frac{1}{x-\delta}}}{1 + a^{\frac{1}{x-\delta}}},$$

also für $x = 0$ wird

$$\Delta = \frac{a^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1 + a^{\frac{1}{\varepsilon}}} - \frac{a^{-\frac{1}{\delta}}}{1 + a^{-\frac{1}{\delta}}}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{\delta} = \alpha$, $\frac{1}{\varepsilon} = \beta$, so erhält man

$$\Delta = \frac{a^{\beta}}{1 + a^{\beta}} - \frac{a^{-\alpha}}{1 + a^{-\alpha}} = \frac{1}{1 + a^{-\beta}} - \frac{a^{-\alpha}}{1 + a^{-\alpha}}.$$

Nun werden aber α und β unendlich gross, wenn δ und ε unendlich klein werden. Aus

$$\lim_{\alpha=\infty} a^{-\alpha} = \lim \frac{1}{a^{\alpha}} = 0, \quad \lim_{\beta=\infty} a^{-\beta} = \lim \frac{1}{a^{\beta}} = 0$$

folgt daher

$$\lim \Delta = 1;$$

d. h. y wird für $x = 0$ *unstetig*.

Satz 1.*) *Sind die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervall von x_1 bis x_2 endlich und stetig, so sind auch die Functionen*

*) Sollten die hier folgenden Sätze 1 bis 14 dem Anfänger noch zu schwer sein, so können sie vorläufig übergangen werden; der Leser muss aber bei den späteren Untersuchungen beachten, dass die *Stetigkeit* der Functionen für die in Betracht kommenden Werthe von x vorausgesetzt wird, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist.

$f(x) + g(x)$ und $f(x) - g(x)$ in diesem Intervalle endlich und stetig.

Beweis. Nach Voraussetzung werden

$$(7.)\quad \Delta_1 = f(x+\varepsilon) - f(x-\delta),\quad \Delta_2 = g(x+\varepsilon) - g(x-\delta)$$

mit δ und ε zugleich verschwindend klein, folglich auch

$$\Delta = [f(x+\varepsilon) \pm g(x+\varepsilon)] - [f(x-\delta) \pm g(x-\delta)] = \Delta_1 \pm \Delta_2.$$

Satz 2. *Sind die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervalle von x_1 bis x_2 endlich und stetig, so ist auch die Function $F(x) = f(x) \,.\, g(x)$ in diesem Intervalle endlich und stetig.*

Beweis. Wendet man dieselben Bezeichnungen an wie in den Gleichungen (7.), so erhält man

$$\begin{aligned}\Delta = F(x+\varepsilon) - F(x-\delta) &= f(x+\varepsilon) \,.\, g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) \,.\, g(x-\delta) \\ &= f(x+\varepsilon) \,.\, g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) \,.\, g(x+\varepsilon) + \\ &\qquad f(x-\delta) \,.\, g(x+\varepsilon) - f(x-\delta) \,.\, g(x-\delta) \\ &+ \Delta_1 \,.\, g(x+\varepsilon) + \Delta_2 \,.\, f(x-\delta).\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $f(x-\delta)$, $g(x+\varepsilon)$ *endliche* Grössen, und Δ_1, Δ_2 werden verschwindend klein zugleich mit δ und ε, folglich auch Δ.

Satz 3. *Jede ganze rationale Function von x ist stetig für alle endlichen Werthe von x.*

Der Beweis folgt daraus, dass die ganzen rationalen Functionen aus der Veränderlichen x und aus constanten Grössen nur durch Addition, Subtraction und Multiplication gebildet werden.

Satz 4. *Sind die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in dem Intervall von x_1 bis x_2 endlich und stetig, und bleibt $g(x)$ in diesem Intervalle entweder beständig positiv oder beständig negativ, so ist auch die Function $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ in diesem Intervalle endlich und stetig.*

Beweis. Hier ist

$$\Delta = F(x+\varepsilon) - F(x-\delta) = \frac{f(x+\varepsilon)}{g(x+\varepsilon)} - \frac{f(x-\delta)}{g(x-\delta)}$$

$$= \frac{g(x-\delta).f(x+\varepsilon) - g(x+\varepsilon).f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon).g(x-\delta)}$$

$$= \frac{g(x-\delta).f(x+\varepsilon) - g(x-\delta).f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon).g(x-\delta)}$$

$$- \frac{g(x+\varepsilon).f(x-\delta) - g(x-\delta).f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon).g(x-\delta)},$$

oder, wenn man dieselben Bezeichnungen anwendet wie in den Gleichungen (7.),

$$\Delta = \frac{\Delta_1 . g(x-\delta) - \Delta_2 . f(x-\delta)}{g(x+\varepsilon).g(x-\delta)}.$$

Nach Voraussetzung werden Δ_1, Δ_2 mit δ und ε zugleich verschwindend klein, folglich auch Δ, da $g(x-\delta)$ und $g(x+\varepsilon)$ nach Voraussetzung von 0 verschieden sind.

Satz 5. *Der Quotient* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *zweier ganzen rationalen Functionen* $f(x)$ *und* $g(x)$ *kann nur für diejenigen Werthe von* x *unstetig werden, für welche* $g(x)$ *gleich* 0 *wird.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4.

Da man *jede gebrochene rationale* Function als Quotienten zweier ganzen rationalen Functionen darstellen kann, so findet man aus Satz 5, für welche Werthe von x die gebrochenen rationalen Functionen stetig sind oder nicht.

Satz 6. *Die n^{te} Wurzel aus einer endlichen stetigen Function* $f(x)$ *ist wieder endlich und stetig.**)

Beweis. Nach Voraussetzung wird

$$\Delta_1 = f(x+\varepsilon) - f(x-\delta)$$

mit δ und ε zugleich verschwindend klein. Setzt man nun

*) Ist n *gerade*, so möge bei diesem Satze x auf solche Werthe beschränkt werden, für welche $f(x) > 0$ ist.

$$\sqrt[n]{f(x+\varepsilon)} = u, \quad \sqrt[n]{f(x-\delta)} = v,$$

so ist nachzuweisen, dass auch

$$\varDelta = u - v$$

verschwindend klein wird.

Ist zunächst $f(x) \lessgtr 0$, so kann man δ und ε so klein machen, dass $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\delta)$ dasselbe Zeichen haben wie $f(x)$; dann muss man auch den Grössen u und v das gleiche Zeichen geben. Deshalb sind in

$$u^n - v^n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

die Grössen u^{n-1}, $u^{n-2}v$, $\ldots uv^{n-2}$, v^{n-1} alle von 0 verschieden und haben sämmtlich dasselbe Vorzeichen, folglich ist

$$S = u^{n-1} + u^{n-2}v + \cdots + uv^{n-2} + v^{n-1} \lessgtr 0,$$

und

$$\varDelta = u - v = \frac{u^n - v^n}{S} = \frac{\varDelta_1}{S}$$

wird mit δ und ε zugleich verschwindend klein.

Ist $f(x) = 0$, so sind $f(x+\varepsilon)$ und $f(x-\delta)$ einzeln beliebig klein für hinreichend kleine Werthe von δ und ε, folglich auch u, v und $\varDelta$, wobei vorausgesetzt wird, dass u und v beide reelle Grössen sind.

Dieser Satz giebt Aufschluss über die Stetigkeit der *irrationalen* Functionen.

Satz 7. *Die Functionen* $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind für alle Werthe von* x *stetig.*

Beweis. Für $y = \sin x$ wird

$$\varDelta = \sin(x+\varepsilon) - \sin(x-\delta) = 2\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right).$$

Dabei liegt $\cos\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right)$ zwischen -1 und $+1$, und $\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)$ wird nach Formel Nr. 1 der Tabelle mit δ und ε zugleich verschwindend klein, folglich auch $\varDelta$.

Für $y = \cos x$ wird

$$\varDelta = \cos(x+\varepsilon) - \cos(x-\delta) = -2\sin\left(\frac{\delta+\varepsilon}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\varepsilon-\delta}{2}\right).$$

Auch hier liegt $\sin\left(x + \frac{\varepsilon - \delta}{2}\right)$ zwischen -1 und $+1$, und $\sin\left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right)$ wird mit δ und ε verschwindend klein, folglich auch Δ.

Satz 8. *Die Function* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *wird nur für diejenigen Werthe von* x *unstetig, für welche* $\cos x$ *gleich* 0 *wird, also für* $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots,$ *und die Function* $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *wird nur für diejenigen Werthe von* x *unstetig, für welche* $\sin x = 0$ *wird, also für* $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots.$

Der Beweis folgt ohne Weiteres aus den Sätzen 5 und 7.

Satz 9. *Die Function* a^x *ist stetig für alle endlichen Werthe von* x.

Beweis. Für $y = a^x$ ist

$$\Delta = a^{x+\varepsilon} - a^{x-\delta} = a^x \cdot a^\varepsilon - \frac{a^x}{a^\delta} = a^x\left(a^\varepsilon - \frac{1}{a^\delta}\right).$$

Nun ist

$$\lim_{\delta=0} a^\delta = 1, \qquad \lim_{\varepsilon=0} a^\varepsilon = 1,$$

folglich wird Δ mit δ und ε zugleich verschwindend klein.

Satz 10. *Die Functionen* $\arcsin x$ *und* $\arccos x$ *sind stetig, wenn* $-1 < x < +1$ ist.

Beweis. Ist $y = \arcsin x$ und setzt man

$$u = \arcsin(x + \varepsilon), \quad v = \arcsin(x - \delta),$$

so wird

$$\Delta = \arcsin(x + \varepsilon) - \arcsin(x - \delta) = u - v.$$

Dabei kann man δ und ε so klein machen, dass auch $-1 < x - \delta < x + \varepsilon < +1$ ist. Dies giebt

$$\sin u = x + \varepsilon, \quad \sin v = x - \delta,$$

wobei u und v so gewählt werden müssen, dass

$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < v < +\frac{\pi}{2},$$

also

$$-\pi < u + v < +\pi, \quad \text{oder} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{u+v}{2} < +\frac{\pi}{2}.$$

Nun wird

$$\sin u - \sin v = \delta + \varepsilon = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}, \quad \varDelta = u - v = 2\arcsin\left[\frac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}\right];$$

da $\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)$ von 0 verschieden ist, so wird $\dfrac{\delta+\varepsilon}{2\cos\left(\frac{u+v}{2}\right)}$ mit δ und ε zugleich verschwindend klein, also auch $\varDelta$.

Dadurch ist die Stetigkeit der Function $\arcsin x$ bewiesen, aus der sich auch die Stetigkeit von $\arccos x$ in folgender Weise ergiebt. Es sei

$$y = \arcsin x, \quad z = \arccos x,$$

dann wird

$$x = \sin y = \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Deshalb kann man z so bestimmen, dass

$$z = \frac{\pi}{2} - y, \quad \text{oder} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

wird, und zwar durchläuft z alle Werthe von π bis 0, wenn y alle Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

Satz 11. *Die Functionen* $\operatorname{arctg} x$ *und* $\operatorname{arcctg} x$ *sind für alle endlichen Werthe von* x *stetig.*

Beweis. Ist $y = \operatorname{arctg} x$, und setzt man

$$u = \operatorname{arctg}(x+\varepsilon), \quad v = \operatorname{arctg}(x-\delta),$$

so wird

$$\varDelta = \operatorname{arctg}(x+\varepsilon) - \operatorname{arctg}(x-\delta) = u - v.$$

Dabei kann man u und v so wählen, dass

$$-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\pi}{2} < v < +\frac{\pi}{2}$$

ist. Dies giebt

$$\operatorname{tg} u = x + \varepsilon, \quad \operatorname{tg} v = x - \delta,$$

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = \delta + \varepsilon = \frac{\sin(u - v)}{\cos u \cos v},$$

$$\sin(u - v) = (\delta + \varepsilon) \,.\, \cos u \cos v,$$

$$\Delta = u - v = \arcsin[(\delta + \varepsilon) \,.\, \cos u \cos v],$$

folglich wird Δ mit δ und ε zugleich verschwindend klein.

Aus der Stetigkeit von $\operatorname{arctg} x$ ergiebt sich dann auch die Stetigkeit von $\operatorname{arcctg} x$ in folgender Weise. Es sei

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad z = \operatorname{arcctg} x,$$

dann wird

$$x = \operatorname{tg} y = \operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Deshalb kann man z so bestimmen, dass

$$z = \frac{\pi}{2} - y, \quad \text{oder} \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

wird, und zwar durchläuft z alle Werthe von π bis 0, wenn y alle Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

Satz 12. *Die Function $\log x$ ist stetig für alle endlichen, positiven Werthe von x.*

Beweis. Ist $y = \log x$, so wird

$$\Delta = \log(x + \varepsilon) - \log(x - \delta) = \log\left(\frac{x + \varepsilon}{x - \delta}\right) = \log\left(1 + \frac{\delta + \varepsilon}{x - \delta}\right).$$

Da nun, so lange $x > 0$ bleibt,

$$\lim_{\substack{\delta=0 \\ \varepsilon=0}} \log\left(1 + \frac{\delta + \varepsilon}{x - \delta}\right) = \log 1 = 0$$

ist, so wird Δ mit δ und ε zugleich verschwindend klein.

Bei den folgenden Betrachtungen ist es von grosser Wichtigkeit, ob die Functionen, mit denen man operirt, stetig sind oder nicht, weil die meisten Sätze, die hergeleitet werden sollen, nur für stetige Functionen gelten.

Satz 13. *Ist die Function $f(x)$ für alle Werthe von x zwischen x_1 und x_2 reell und stetig, und ist*

$$f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0,$$

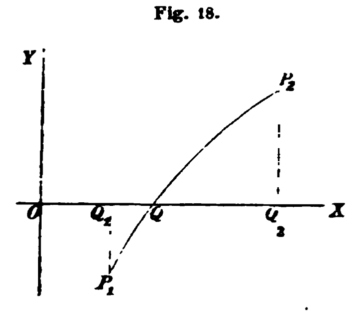
so giebt es zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Werth von x, für welchen $f(x)$ gleich 0 wird.

Beweis. Am leichtesten erkennt man die Richtigkeit des Satzes aus der geometrischen Darstellung. Setzt man nämlich

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2,$$

so entspricht den Coordinaten x_1, y_1 ein Punkt P_1 auf der *negativen* Seite, und den Coordinaten x_2, y_2 entspricht ein Punkt P_2 auf der *positiven* Seite der X-Axe (vergl. Fig. 18). Da nun die Curve, welche der Gleichung $y = f(x)$ entspricht, zwischen den Punkten P_1 und P_2 stetig verläuft, so muss sie die X-Axe zwischen den Punkten Q_1 und Q_2 mindestens in *einem* Punkte Q schneiden, um von der negativen Seite der X-Axe auf die positive zu gelangen. $OQ = x$ ist dann der Werth von x, für welchen $f(x) = 0$ wird.

Fig. 18.



Man kann aber den Beweis auch unabhängig von der geometrischen Darstellung führen.

Es sei $x_2 > x_1$, und es werde die Differenz $x_2 - x_1$ in zwei gleiche Theile h getheilt, so dass

$$x_2 - x_1 = 2h, \quad \text{oder} \quad h = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

wird. Ist $f(x_1 + h) = 0$, so ist der Satz schon bewiesen; ist dagegen $f(x_1 + h) > 0$, so setze man

$$x_1 = x_3, \quad x_1 + h = x_4,$$

und ist $f(x_1 + h) < 0$, so setze man

$$x_1 + h = x_3, \quad x_1 + 2h = x_2 = x_4.$$

In beiden Fällen ist

$$f(x_3) < 0, \quad f(x_4) > 0,$$

wobei aber das Intervall von x_3 bis x_4 halb so gross ist wie das zwischen x_1 und x_2. Setzt man jetzt

$$x_4 - x_3 = 2h_1, \quad \text{oder} \quad h_1 = \frac{x_4 - x_3}{2},$$

so ist der Satz bewiesen, wenn $f(x_3 + h_1) = 0$ wird. Ist dagegen $f(x_3 + h_1) > 0$, so setze man

$$x_3 = x_5, \quad x_3 + h_1 = x_6,$$

und ist $f(x_3 + h_1) < 0$, so setze man

$$x_3 + h_1 = x_5, \quad x_3 + 2h_1 = x_4 = x_6.$$

In beiden Fällen ist

$$f(x_5) < 0, \quad f(x_6) > 0,$$

wobei aber das Intervall zwischen x_5 und x_6 viermal kleiner ist als das Intervall zwischen x_1 und x_2.

In dieser Weise kann man fortfahren und findet entweder $f(x_{2n-1} + h_{n-1}) = 0$, oder

$$f(x_{2n+1}) < 0, \quad f(x_{2n+2}) > 0,$$

wobei das Intervall zwischen x_{2n+1} und x_{2n+2} $(2^n)^{\text{ten}}$mal kleiner ist als das zwischen x_1 und x_2. Da aber die Function für die betrachteten Werthe von x stetig ist, so wird der Unterschied zwischen $f(x_{2n+1})$ und $f(x_{2n+2})$ beliebig klein, wenn man nur n hinreichend gross macht, folglich ist erst recht der Unterschied zwischen 0 und $f(x_{2n+1})$, oder zwischen 0 und $f(x_{2n+2})$ beliebig klein, d. h.

$$\lim_{n=\infty} f(x_{2n+1}) = \lim_{n=\infty} f(x_{2n+2}) = 0.$$

Der Satz gilt auch noch, wenn

$$f(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) < 0$$

ist. Der Beweis wird dann in ganz ähnlicher Weise geführt wie vorhin.

Hieraus erhält man unmittelbar noch folgenden allgemeineren

Satz 14. *Ist die Function $f(x)$ für alle Werthe von x zwischen x_1 und x_2 reell und stetig, so wird $f(x)$ jeden Werth zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ mindestens einmal annehmen, wenn x alle Werthe zwischen x_1 und x_2 durchläuft.*

Beweis. Ist M irgend ein Werth zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$, ist also entweder

$$f(x_1) < M < f(x_2),$$

oder

$$f(x_1) > M > f(x_2),$$

so bilde man die Function

$$F(x) = f(x) - M,$$

welche zwischen x_1 und x_2 stetig ist und sicher das Zeichen wechselt.

Für $F(x)$ gelten daher genau dieselben Voraussetzungen wie in dem vorigen Satze für $f(x)$. Deshalb giebt es in dem Intervall von x_1 bis x_2 mindestens einen Werth von x, für welchen $F(x)$ gleich 0 wird. Dieser Werth sei ξ, dann ist

$$F(\xi) = f(\xi) - M = 0,$$

also

$$f(\xi) = M,$$

was zu beweisen war.

Hülfssätze aus der algebraischen Analysis.

---

§ 9.

Der binomische Lehrsatz für positive, ganzzahlige Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 6—10.)

Es sei

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}, \tag{1.}$$

wo k eine *positive*, *ganze* Zahl sein möge, während n auch negativ und gebrochen sein darf; dann gelten für die durch Gleichung (1.) erklärten Grössen, welche man „*Binomial-Coefficienten*“ nennt, die folgenden Sätze:

Satz 1.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}. \tag{2.}$$

Der Beweis möge zunächst für einige besondere Fälle durchgeführt werden.

1. Beispiel. Es ist

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{3} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} + \frac{10.9.8}{1.2.3}$$

$$= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} + \frac{10.9.8.4}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{10.9.8(7+4)}{1.2.3.4} = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = \binom{11}{4}.$$

2. Beispiel.

$$\binom{9}{7}+\binom{9}{6}=\frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}$$
$$=\frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{9.8.7.6.5.4.7}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$=\frac{9.8.7.6.5.4(3+7)}{1.2.3.4.5.6.7}=\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}$$
$$=\binom{10}{7}.$$

Allgemeiner Beweis.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2\ldots(k-1)k}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2\ldots(k-1)}$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2\ldots(k-1)k}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)k}{1.2\ldots(k-1)k}$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1+k)}{1.2.3\ldots(k-1)k}$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n+1-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)k}=\binom{n+1}{k}.$$

Ist n eine *positive*, *ganze* Zahl, so folgt aus Gleichung (1.) unmittelbar noch der folgende **Satz 2:**

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}. \tag{3.}$$

Auch hier möge der Beweis des Satzes zunächst durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden. Es ist

$$\binom{8}{5}=\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}=\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{3.2.1}{1.2.3}$$
$$=\frac{8.7.6}{1.2.3}\cdot\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}=\frac{8.7.6}{1.2.3}=\binom{8}{3}.$$

Allgemeiner Beweis. Es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(n-k)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)} \cdot \frac{k(k-1)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots(k-1)k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(n-k)},$$

oder, da $k+1$ gleich $n-(n-k)+1$ ist,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Der Gleichung (3.) entsprechend, setze man

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$$

dann gilt die Gleichung (2.) auch noch für $k = 1$, d. h. es wird

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \frac{n}{1} + 1 = \frac{n+1}{1} = \binom{n+1}{1}. \tag{2a.}$$

Satz 3. *Wenn m eine positive, ganze Zahl ist, so sind die Binomial-Coëfficienten ebenfalls positive, ganze Zahlen.*

Beweis. Aus den Gleichungen

$$\binom{2}{0} = 1, \quad \binom{2}{1} = \frac{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = \frac{2.1}{1.2} = 1$$

erkennt man, dass der Satz für m gleich 2 richtig ist. Durch den Schluss von n auf $n+1$ findet man dann, dass der Satz allgemein richtig ist; d. h. man setzt voraus, dass der Satz bewiesen sei für einen bestimmten Werth von m, nämlich für m gleich n, und zeigt, dass er dann auch für m gleich $n+1$ richtig bleibt. In der That, sind $\binom{n}{k}$ und $\binom{n}{k-1}$ positive, ganze Zahlen, so folgt aus der Gleichung

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

3. Das Product aller ganzen Zahlen von 1 bis k wird „*k-Fakultät*“ genannt und mit $k!$ bezeichnet. Es ist daher

$$k! = 1 . 2 . 3 \ldots (k-1)k;$$

da

$$(k-1)! = 1 . 2 . 3 \ldots (k-1)$$

ist, so besteht die Gleichung

$$k! = (k-1)!k.$$

Durch Anwendung der Formel

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

kann man, immer unter der Voraussetzung, dass m eine positive, ganze Zahl ist, die Gleichung (4.) noch auf eine einfachere Form bringen; es wird nämlich

$$\binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{m-1} = \binom{m}{1}, \quad \binom{m}{m-2} = \binom{m}{2}, \ldots$$

und deshalb

$$(6.) \qquad (1+x)^m =$$
$$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{1}x^{m-1} + x^m.$$

Satz 5. *Es sind also je zwei Coëfficienten in der Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze einander gleich, wenn sie zu Gliedern gehören, von denen das eine ebenso weit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht.*

Beispiele.

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5,$$
$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6,$$
$$(1+x)^7 = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7,$$

. . . .

Setzt man in Gleichung (6.)

$$x = \frac{b}{a}$$

und multiplicirt beide Seiten der Gleichung mit a^m, so erhält man

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left[1+\binom{m}{1}\frac{b}{a}+\binom{m}{2}\frac{b^2}{a^2}+\cdots+\binom{m}{2}\frac{b^{m-2}}{a^{m-2}}\right.$$
$$\left.+\binom{m}{1}\frac{b^{m-1}}{a^{m-1}}+\frac{b^m}{a^m}\right],$$

oder

$$(7.)\qquad (a+b)^m = a^m+\binom{m}{1}a^{m-1}b+\binom{m}{2}a^{m-2}b^2+\cdots$$
$$+\binom{m}{2}a^2b^{m-2}+\binom{m}{1}ab^{m-1}+b^m.$$

Satz 6. *Die Potenz eines unächten Bruches wird beliebig gross, wenn man den Exponenten hinreichend gross macht.*

Beweis. Es sei

$$a > b > 0, \quad \text{also} \quad a - b = c > 0, \quad a = b + c,$$

dann ist $\frac{a}{b}$ ein *unächter* Bruch. Bezeichnet man $\frac{c}{b}$ mit x, so ist x gleichfalls *positiv*, und man erhält

$$\frac{a}{b} = \frac{b+c}{b} = 1 + \frac{c}{b} = 1 + x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\cdots,$$

folglich ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m > 1 + mx,$$

denn die Glieder $\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3$, ... sind nach Satz 3 alle positiv, wenn m eine positive, ganze Zahl ist.

Da man nun aber durch Vergrösserung von m den Ausdruck $1 + mx$ beliebig gross machen kann, so wird $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ für hinreichend grosse Werthe von m erst recht beliebig gross, oder mit anderen Worten:

Wird m unendlich gross, so wird auch $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ unendlich gross.

Satz 7. *Die Potenz eines ächten Bruches wird beliebig klein, wenn man den Exponenten hinreichend gross macht.*

Beweis. Es sei wieder $a > b > 0$, also $\frac{b}{a}$ ein *ächter* Bruch: dann wird

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m = \left[\frac{1}{\frac{a}{b}}\right]^m = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}.$$

Da hierbei $\frac{a}{b}$ ein *unächter* Bruch ist, so wird nach dem vorhergehenden Satze $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ für hinreichend grosse Werthe von m beliebig gross, folglich wird $\left(\frac{b}{a}\right)^m$ beliebig klein, oder mit anderen Worten:

Wird m unendlich gross, so wird $\left(\frac{b}{a}\right)^m$ unendlich klein.

Die Sätze 6 und 7 sind zunächst unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass a und b positiv sind; weil aber

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^m = (-1)^m \left(\frac{b}{a}\right)^m = \pm\left(\frac{b}{a}\right)^m$$

wird, so gelten sie auch noch, wenn eine der beiden Zahlen *negativ* ist.

§ 10.

Geometrische Progressionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 11, 11a und 12.)

Die Reihe der Zahlen

$$A,\ Ap,\ Ap^2, \ldots Ap^{n-1}$$

heisst eine *„geometrische Reihe"* oder *„geometrische Progression"*. Die Anzahl ihrer Glieder beträgt n; die Summe derselben ist leicht zu bilden. Setzt man nämlich

$$S = A + Ap + Ap^2 + \cdots + Ap^{n-1}, \tag{1.}$$

so wird

$$pS = \quad Ap + Ap^2 + \cdots + Ap^{n-1} + Ap^n,$$

also

$$S - pS = S(1-p) = A - Ap^n,$$

$$(2.)\qquad S = \frac{A(1-p^n)}{1-p}.$$

Beispiel. Es sei

$$(3.)\qquad S = x_1^{n-1} + xx_1^{n-2} + x^2x_1^{n-3} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1},$$

dann wird

$$A = x_1^{n-1},\quad p = \frac{x}{x_1},\quad S = \frac{x_1^{n-1}\left(1 - \frac{x^n}{x_1^n}\right)}{1 - \frac{x}{x_1}} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Noch leichter findet man dieses Resultat in folgender Weise. Es ist

$$Sx_1 = x_1^n + xx_1^{n-1} + x^2x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-1}x_1,$$
$$Sx = \qquad xx_1^{n-1} + x^2x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-1}x_1 + x^n,$$

also

$$Sx_1 - Sx = S(x_1 - x) = x_1^n - x^n,$$

oder

$$(4.)\qquad S = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Bisher war stillschweigend vorausgesetzt worden, dass n eine *endliche* (positive, ganze) Zahl ist. Ist aber p ein *ächter* Bruch, so behält S auch noch eine bestimmte Bedeutung, wenn n *unendlich gross* wird. Es ist dann nämlich nach Satz 6 des vorhergehenden Paragraphen

$$\lim_{n=\infty} p^n = 0,$$

folglich wird

$$(5.)\qquad S = A + Ap + Ap^2 + Ap^3 + \cdots = \frac{A}{1-p}.$$

Beispiele. 1) Es ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right];$$

wächst n in's Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, also

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

2) Es ist

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right];$$

wächst n in's Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, also

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2}.$$

3) Es ist

$$0{,}7777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right];$$

wächst n in's Unbegrenzte, so wird $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$, also

$$0{,}777\ldots = \frac{7}{9}.$$

Bemerkung.

Die Summe

$$S = A + Ap + Ap^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

hat *unendlich* viele Glieder, aber trotzdem einen *endlichen* Werth. Man nennt eine solche Summe mit unendlich vielen Gliedern, welche einen bestimmten, endlichen Werth hat, eine „*convergente* (unendliche) Reihe“. Später wird noch ausführlich von der Convergenz der Reihen die Rede sein.

§ 11.
Erklärung der Zahl e.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 13 und 14.)

Setzt man in der Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k + \cdots$$

x gleich $\frac{1}{n}$, so erhält man

$$(1.)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots k} + \cdots.$$

Es soll nun der Werth von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bestimmt werden, wenn n unendlich gross wird, wobei aber n zunächst auf *positive, ganzzahlige* Werthe beschränkt sein möge.

Bezeichnet man den gesuchten Grenzwerth mit e, so ist also

$$(2.)\quad e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Zur Berechnung dieses Grenzwerthes trenne man auf der rechten Seite von Gleichung (1.) die ersten $k+1$ Glieder ab und nenne ihre Summe S_k, während die Summe aller übrigen Glieder S_k' heissen möge; es ist dann

$$(3.)\quad S_k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \cdots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1.2.3\ldots k}.$$

$$(4.)\quad S_k' = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)}{1.2.3\ldots k(k+1)} + \cdots$$

und

$$(5.)\quad e = \lim_{n=\infty} S_k + \lim_{n=\infty} S_k'.$$

Unter der Voraussetzung, dass k eine endliche Zahl ist, werden die Grössen

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \ldots \frac{k-1}{n}$$

sämmtlich unendlich klein, wenn n unendlich gross wird; die Factoren

$$1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n},\ \ldots 1-\frac{k-1}{n}$$

werden deshalb alle gleich 1, so dass man erhält

$$\lim S_k = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots k}.$$

oder

$$(6.)\quad \lim S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Denselben Schluss darf man aber *nicht* bei sämmtlichen Gliedern von S_k' machen, denn in den späteren Gliedern von S_k' hat der Zähler auch Factoren von der Form

$$1-\frac{m}{n},$$

bei denen nicht nur n unendlich gross wird, sondern auch m. Ist z. B. m gleich $\frac{1}{2}n$, so wird stets, wie gross auch n werden mag,

$$1-\frac{m}{n} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

und ist $m > \frac{n}{2}$, so wird sogar $\lim \frac{m}{n} > \frac{1}{2}$, also

$$\lim_{n=\infty}\left(1 - \frac{m}{n}\right) < \frac{1}{2}.$$

Wollte man daher auch bei den sämmtlichen Gliedern von S_k' die Factoren der Zähler alle gleich 1 setzen, so würde man die Zähler zu gross machen. Setzt man trotzdem die Factoren der Zähler alle gleich 1, so wird aus der *Gleichung* (4.) eine *Ungleichung*, nämlich

$$(7.)\qquad \lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \cdots,$$

oder, weil

$$(k+2)! = (k+1)!\,(k+2),$$
$$(k+3)! = (k+1)!\,(k+2)(k+3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist,

$$(7a.)\quad \lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!}\left[1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \cdots\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1},\quad \frac{1}{(k+2)(k+3)} < \frac{1}{(k+1)^2}, \ldots,$$

folglich wird die Ungleichung (7a.) noch verstärkt, wenn man

$\frac{1}{k+1}$ statt $\frac{1}{k+2}$, $\frac{1}{(k+1)^2}$ statt $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$, $\cdots$ setzt.

Dadurch erhält man

$$(8.)\qquad \lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!}\left[1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist hierbei eine geometrische Progression

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots,$$

die sich bis ins Unendliche erstreckt, deren Summe sich aber leicht bilden lässt, weil

$$p = \frac{1}{k+1} < 1$$

ist; und zwar wird nach Formel Nr. 11a der Tabelle diese Summe gleich

$$(9.)\qquad \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k}.$$

Daraus folgt

$$\lim S_k' < \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k+1}{k},$$

oder, da $(k+1)!$ gleich $k!\,(k+1)$ ist,

$$(10.)\qquad \lim S_k' < \frac{1}{k!\,k}.$$

Nach Gleichung (5.) ist daher

$$(11.)\qquad \lim_{n=\infty} S_k < e < \lim_{n=\infty} S_k + \frac{1}{k!\,k}.$$

Nun wird aber für hinreichend grosse Werthe von k die Grösse $\frac{1}{k!\,k}$ beliebig klein, so dass man e zwischen zwei Grenzen gebracht hat, die einander beliebig nahe liegen; ja diese Grenzen fallen sogar zusammen, wenn man jetzt auch k unendlich gross werden lässt. Es ist daher

$$(12.)\qquad e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \text{ in inf.}$$

Kommt es nur darauf an, die Zahl e bis auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen genau zu berechnen, so genügen schon verhältnissmässig wenige Glieder der Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (12.). Will man z. B. e bis auf 10 Decimalstellen genau finden, so genügen schon die ersten 16 Glieder der Reihe. Es ist nämlich, wenn man zunächst 12 Decimalstellen berücksichtigt,

$$
\begin{aligned}
1 + 1:1! &= 2\\
1:2! &= 0{,}5\\
1:3! &= 0{,}166\,666\,666\,667\\
1:4! &= 0{,}041\,666\,666\,667\\
1:5! &= 0{,}008\,333\,333\,333\\
1:6! &= 0{,}001\,388\,888\,889\\
1:7! &= 0{,}000\,198\,412\,698\\
1:8! &= 0{,}000\,024\,801\,587\\
1:9! &= 0{,}000\,002\,755\,732\\
1:10! &= 0{,}000\,000\,275\,573\\
1:11! &= 0{,}000\,000\,025\,052\\
1:12! &= 0{,}000\,000\,002\,088\\
1:13! &= 0{,}000\,000\,000\,161\\
1:14! &= 0{,}000\,000\,000\,011\\
1:15! &= 0{,}000\,000\,000\,001
\end{aligned}
$$

also

$$
e = 2{,}718\,281\,828\,459\ldots. \tag{13.}
$$

Hierdurch ist e ohne Zweifel auf 10 Decimalstellen genau berechnet, denn der Unterschied zwischen e und der Summe

$$
1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{15!}
$$

ist (unter Berücksichtigung von 14 Decimalstellen)

$$
\lim_{n=\infty} S'_{15} < \frac{1}{15!\,15} = 0{,}000\,000\,000\,000\,05
$$

und kommt daher bei den ersten 12 Decimalstellen nicht in Betracht. Dagegen können die 11te und die 12te Decimalstelle dadurch fehlerhaft geworden sein, dass bei Summirung der 16 Glieder die auf die 12te Decimalstelle folgenden Stellen vernachlässigt worden sind. Dieser Fehler ist aber bei jedem der Glieder in der 12ten Decimalstelle kleiner als $\frac{1}{2}$, so dass der Gesammtfehler kleiner als

$$
16 \cdot \frac{1}{2} = 8
$$

sein muss. Im Allgemeinen wird der gesammte Fehler, welcher bei solchen Rechnungen durch Fortlassung der späteren Decimalstellen begangen wird, noch viel kleiner sein, als das hier angedeutete Verfahren ergeben würde, weil die einzelnen Fehler verschiedenes Zeichen haben und sich in Folge dessen wenigstens theilweise gegen einander fortheben.

In der soeben ausgeführten Berechnung der Zahl e ist z. B. der gesammte Fehler bei der 12ten Decimalstelle nicht 8, sondern 0, wie sich aus der Berücksichtigung der späteren Decimalstellen ergiebt. Die Gleichung (13.) enthält daher die Zahl e bis auf 12 Decimalstellen genau.

Es war vorhin angenommen worden, dass n eine positive, *ganze* Zahl sei. Von dieser Voraussetzung kann man sich noch frei machen. Liegt nämlich n zwischen den positiven ganzen Zahlen m und $m+1$, ist also

$$m < n < m+1,$$

so wird

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1}$$

und

$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m+1}.$$

Da die Potenz eines unächten Bruches mit dem Exponenten zugleich wächst, so wird

$$(14.)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}, \end{cases}$$

also

$$(14a.)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m}.$$

Nun ist

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e,$$

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim_{m=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{m+1}}\cdot\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e,$$

folglich gehen die Ungleichungen (14a.) über in

(15.)
$$e \geqq \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq e,$$

oder

(16.)
$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Die Zahl e spielt eine sehr wichtige Rolle in der höheren Mathematik; sie ist die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen. Welche Vorzüge das Logarithmen-System mit dieser Basis besitzt, soll an einer späteren Stelle gezeigt werden.

Man hätte übrigens die Zahl e auch durch die Gleichung
$$e = \lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
erklären können. Es ist nämlich
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$
oder, wenn man $n-1$ gleich m setzt,
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Wird n unendlich gross, so gilt dasselbe von m, folglich ist
$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Satz. *Die Zahl e ist keine rationale Zahl, d. h. es ist nicht möglich, e auf die Form* $\frac{l}{k}$ *zu bringen, so dass k und l ganze Zahlen sind.*

Beweis. Wäre
$$e = \frac{l}{k} = \frac{l(k-1)!}{(k-1)!\,k} = \frac{l(k-1)!}{k!},$$
so wäre nach Ungleichung (11.)
$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} < \frac{l(k-1)!}{k!} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{k!\,k},$$
oder, wenn man diese doppelte Ungleichung mit $k!$ multiplicirt und die ganze Zahl

$$k! + \frac{k!}{1!} + \frac{k!}{2!} + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!} + \frac{k!}{k!}$$

mit A bezeichnet,

$$A < l(k-1)! < A + \frac{1}{k},$$

oder

$$0 < l(k-1)! - A < \frac{1}{k}.$$

Es müsste also zwischen 0 und $\frac{1}{k}$ noch eine positive *ganze* Zahl $l(k-1)! - A$ liegen, und das ist unmöglich.

Differential-Rechnung.

Erster Theil.

Functionen von einer unabhängigen Veränderlichen.

I. Abschnitt.

Erklärung und Bildung der Differential-Quotienten.

§ 12.

Bildung des Differential-Quotienten einer stetigen Function $y = f(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 15.)

Es sei die Function

$$y = f(x) \tag{1.}$$

für die betrachteten Werthe der unabhängigen Veränderlichen x (des Argumentes) *stetig*. Setzt man also

$$y_1 = f(x_1), \tag{2.}$$

so sollen die Differenzen

$$x_1 - x = \varDelta x \quad \text{und} \quad y_1 - y = \varDelta y \tag{3.}$$

gleichzeitig verschwindend klein werden. Den Quotienten dieser Differenzen $\varDelta x$ und $\varDelta y$, nämlich

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \tag{4.}$$

nennt man „*Differenzen-Quotient*". Werden jetzt die Differenzen Δx und Δy verschwindend klein, so nennt man sie „*Differentiale*" und bezeichnet sie mit dx und dy. Es ist also

$$dx = \lim \Delta x, \quad dy = \lim \Delta y.$$

Dabei geht der Differenzen-Quotient über in den ***Differential-Quotienten***, nämlich in

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}. \tag{5.}$$

Beispiel 1. Es sei

$$y = x^2, \quad \text{also} \quad y_1 = x_1^2,$$

dann wird

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^2 - x^2}{x_1 - x} = x_1 + x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} (x_1 + x) = 2x.$$

Beispiel 2. Es sei

$$y = x^3, \quad \text{also} \quad y_1 = x_1^3,$$

dann wird

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} (x_1^2 + x_1 x + x^2) = 3x^2.$$

In den meisten Fällen, in denen y eine stetige Function von x ist, wird es möglich sein, $\frac{dy}{dx}$, d. h. den Grenzwerth von $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ zu bestimmen. Es giebt aber auch Functionen, die für einzelne oder für unendlich viele Werthe von x ***nicht*** differentiirbar sind, d. h es giebt Fälle, in denen $\frac{dy}{dx}$ ***keinen bestimmten endlichen Werth*** hat. Ist z. B. $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, so wird, wie sich zeigen lässt, $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ *unbestimmt*, obgleich die Function selbst für diesen Werth von x noch stetig ist.

In den hier folgenden Untersuchungen werden aber nur Functionen in Betracht kommen, welche differentiirbar sind.

Die Gleichungen (4.) und (5.), durch welche der *Differenzen-Quotient* und der *Differential-Quotient* erklärt werden, kann man noch auf eine etwas andere Form bringen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.) und (2.) erhält man zunächst

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \tag{4a.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}. \tag{5a.}$$

Aus den Gleichungen (3.) folgt ferner

$$x_1 = x + \Delta x, \quad f(x_1) = f(x + \Delta x);$$

dies giebt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{4b.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5b.}$$

Bemerkungen.

Der Anfänger möge noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, dass in den Ausdrücken Δx und Δy das Zeichen Δ nicht von x oder von y getrennt werden darf, denn Δx und Δy sind nicht etwa Producte von Δ und x oder von Δ und y, sondern sie sind Symbole, welche die gleichzeitigen Zunahmen von x und y bezeichnen.

Aehnliches gilt auch von den Differentialen dx und dy. Dabei ist noch zu beachten, dass die Differentiale dx und dy immer mit einem *geraden* d (nicht mit einem *geschwungenen* ∂) geschrieben werden, weil die Symbole ∂x und ∂y später in einer etwas anderen Bedeutung benutzt werden sollen. Ebenso haben die Bezeichnungen δx und δy eine andere Bedeutung wie dx und dy.

Der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ *einer entwickelten Function* $y = f(x)$ *ist also der Grenzwerth, welchem sich der Bruch* $\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta x}$ *nähert, wenn* Δx *unendlich klein wird.*

Um anzudeuten, dass $\frac{dy}{dx}$ gleichfalls eine Function von x ist, bezeichnet man dieselbe gewöhnlich mit $f'(x)$; es ist daher

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{6.}$$

Die Function $f'(x)$ nennt man im Gegensatz zu der ursprünglichen Function $f(x)$ die *„abgeleitete Function"* oder die *„Ableitung* von $f(x)$".

In derselben Weise, wie $f'(x)$ erklärt ist durch die Gleichung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

werden auch die Ableitungen der Functionen $F(x)$, $\varphi(x)$ u. s. w. erklärt. Es ist daher

$$F'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \tag{7.}$$

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}, \tag{8.}$$

u. s. w.

Hervorzuheben ist noch, dass bei dieser Erklärung des Differential-Quotienten die Grösse Δx nach Belieben *positiv* oder *negativ* vorausgesetzt werden darf. Man hätte also mit dem selben Rechte $f'(x)$ durch die Gleichung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x}$$

erklären können. Im Allgemeinen wird man auch beide Male für $f'(x)$ denselben Ausdruck erhalten. Setzt man nämlich in diesem Falle $x - \Delta x = x_1$, so wird $x = x_1 + \Delta x$, also

$$\frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_1 + \Delta x)}{-\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Dies giebt

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} f'(x_1) = f'(x).$$

Man erhält daher, wenn die Function $f'(x)$ stetig ist, denselben Werth von $f'(x)$, gleichviel ob man Δx positiv oder negativ wählt.

§ 13.

Geometrische Deutung des Differential-Quotienten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 16.)

Für viele Untersuchungen ist die Bildung des *Differenzen-Quotienten* und des *Differential-Quotienten* von grosser Bedeutung, um zu beurtheilen, in welchem Verhältnisse die Aenderung der Function zu der Aenderung des Argumentes steht. Ist z. B.

(1.) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer Curve (Fig. 19), und legt man durch die benachbarten Punkte P und P_1 eine Secante in der Richtung von P nach P_1, welche mit der positiven Richtung der X-Axe den Winkel β bildet, dann wird, wie schon auf Seite 29 gezeigt wurde,

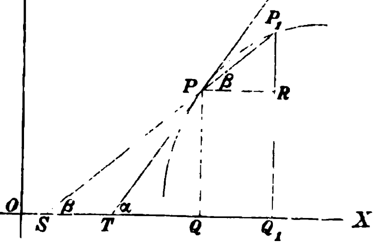
$$PR = QQ_1 = OQ_1 - OQ = x_1 - x,$$
$$RP_1 = Q_1P_1 - QP = y_1 - y,$$

also

(2.) $$tg\beta = tgRPP_1 = \frac{RP_1}{PR} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Dabei giebt der Differenzen-Quotient $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ ein Mass für die *Steigung* der Curve vom Punkte P bis zum Punkte P_1, d. h. dieser Ausdruck giebt an, in welchem Verhältnisse die Zunahme der Ordinate y zur Zunahme der Abscisse x steht.

Fig. 19.



Unter der Voraussetzung, dass die Function $y = f(x)$ für den betrachteten Werth von x differentiirbar ist, nähert sich die Secante PP_1 einer bestimmten Grenzlage TP, wenn der Punkt P_1 dem Punkte P immer näher rückt und schliesslich mit diesem Punkte zusammenfällt. Eine solche Secante, bei der zwei Schnittpunkte in einen Punkt P zusammenfallen, heisst „*Tangente*" und der Punkt P ihr „*Berührungspunkt*". Bei diesem Grenzübergange werden die Strecken

$$PR = x_1 - x \quad \text{und} \quad RP_1 = y_1 - y$$

verschwindend klein, der Winkel β geht in den Winkel α über, und man erhält aus Gleichung (2.) die wichtige Formel

$$(3.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \lim_{x_1=x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

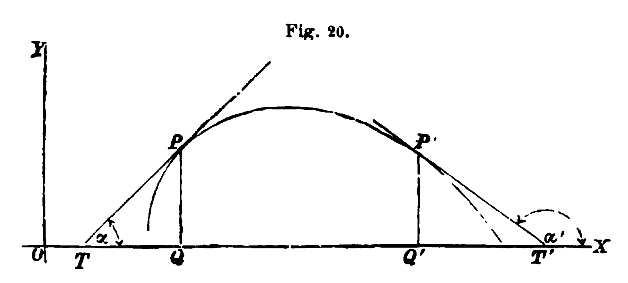
in welcher der folgende Satz enthalten ist:

Satz 1. *Der Differential-Quotient ist gleich der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels α, welchen die geometrische Tangente im Curvenpunkte P mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Curve ist, und der Punkt P die Coordinaten x und y hat.*

Wenn die Curve im Punkte P steigt, so ist α ein *spitzer* Winkel (vergl. Fig. 20), also

$$(4.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} > 0;$$

Fig. 20.



und wenn die Curve im Punkte P' *fällt*, so ist α' ein *stumpfer* Winkel (vergl. Fig. 20), also

$$(5.)\qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{dy}{dx} < 0.$$

(Dabei sind allerdings nur die Winkel zwischen 0^0 und 180^0 berücksichtigt, weil auch nur solche Winkel hier in Betracht kommen können.)

In der vorstehenden Figur 20 ist also im Punkte P der Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ positiv, im Punkte P' dagegen negativ.

Dies giebt den Satz:

Satz 2. *Wenn eine Function $y = f(x)$ gleichzeitig mit x zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Werth von x positiv;*

wenn aber die Function abnimmt, während x zunimmt, so ist die Ableitung für den betreffenden Werth von x negativ.

Der Beweis dieses Satzes kann auch unabhängig von der geometrischen Deutung des Differential-Quotienten geführt werden.

Nimmt nämlich y mit x gleichzeitig zu, so wird

$$x_1 - x > 0, \quad y_1 - y > 0,$$

also auch

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} > 0.$$

Dies gilt, wie klein auch $x_1 - x$ werden mag, folglich wird auch

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \geqq 0. \tag{4a.}$$

Hierbei ist das Gleichheitszeichen dem Ungleichheitszeichen hinzugefügt, weil möglicher Weise der Zuwachs von y im Vergleich zu dem Zuwachse von x eine verschwindend kleine Grösse höherer Ordnung ist.

Nimmt y ab, während x zunimmt, so wird

$$x_1 - x > 0, \quad y_1 - y < 0,$$

also

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} < 0.$$

Dies gilt gleichfalls, wie klein $x_1 - x$ auch werden mag, folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \leqq 0. \tag{5a.}$$

Von dem angegebenen Satze gilt auch die Umkehrung:

Satz 3. *Eine Function nimmt gleichzeitig mit x zu für alle Werthe von x, für welche $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, und die Function nimmt ab, während x zunimmt, für alle Werthe von x, für welche $\frac{dy}{dx}$ negativ ist.*

Der Beweis folgt aus Satz 2 selbst ohne Weiteres.

§ 14.

Einige Lehrsätze über Differential-Quotienten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 17—20.)

Satz 1. *Zwei Functionen, welche sich von einander nur durch eine additive Constante unterscheiden, haben dieselbe Ableitung*, d. h. ist

$$\varphi(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$\varphi'(x) = f'(x).$$

Beweis. Ist

$$\varphi(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$\varphi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + C,$$

also

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$(1.)\quad \varphi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Bezeichnet man $f(x)$ mit y, so wird

$$\varphi(x) = y + C,$$

und die Gleichung (1.) nimmt die Form an

$$(1a.)\quad \frac{d(y+C)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Satz 2. *Wird eine Function $y = f(x)$ mit einem constanten Factor A multiplicirt, so ist die Ableitung dieses Productes gleich der Ableitung der Function y, multiplicirt mit dem constanten Factor A*, d. h. es ist

$$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}.$$

Beweis. Setzt man

$$\varphi(x) = Af(x),$$

so wird

$$\varphi(x + \Delta x) = Af(x + \Delta x),$$

also

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = Af(x + \Delta x) - Af(x)$$
$$= A[f(x + \Delta x) - f(x)],$$
$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = A\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

oder, wenn man Δx unendlich klein werden lässt,

$$\varphi'(x) = Af'(x). \tag{2.}$$

Bezeichnet man nun wieder $f(x)$ mit y, so wird

$$\varphi(x) = Af(x) = Ay;$$

dadurch geht Gleichung (2.) über in

$$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}. \tag{2a.}$$

Satz 3. *Die Ableitung einer Summe von zwei (oder von mehreren) Functionen ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Functionen;* d. h. es ist

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Beweis. Es seien

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad v = g(x)$$

zwei beliebige Functionen von x, und es sei

$$y = F(x) = u + v = f(x) + g(x).$$

Es wird dann

$$F(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x),$$
$$\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x) = f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x),$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x = 0}\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x),$$

oder

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \tag{3.}$$

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass der angegebene Satz auch für eine Summe von beliebig vielen Functionen gilt; nur muss die Anzahl der Summanden eine endliche sein.

§ 14.

Einige Lehrsätze über Differential-Quotienten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 17—20.)

Satz 1. *Zwei Functionen, welche sich von einander nur durch eine additive Constante unterscheiden, haben dieselbe Ableitung*, d. h. ist

$$\varphi(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$\varphi'(x) = f'(x).$$

Beweis. Ist

$$\varphi(x) = f(x) + C,$$

so wird

$$\varphi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + C,$$

also

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$(1.)\quad \varphi'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Bezeichnet man $f(x)$ mit y, so wird

$$\varphi(x) = y + C,$$

und die Gleichung (1.) nimmt die Form an

$$(1a.)\quad \frac{d(y + C)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Satz 2. *Wird eine Function $y = f(x)$ mit einem constanten Factor A multiplicirt, so ist die Ableitung dieses Productes gleich der Ableitung der Function y, multiplicirt mit dem constanten Factor A*, d. h. es ist

$$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}.$$

Beweis. Setzt man

$$\varphi(x) = Af(x),$$

so wird

$$\varphi(x + \Delta x) = Af(x + \Delta x),$$

also

$$\varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x) = Af(x + \varDelta x) - Af(x)$$
$$= A[f(x + \varDelta x) - f(x)],$$
$$\frac{\varphi(x + \varDelta x) - \varphi(x)}{\varDelta x} = A\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x},$$

oder, wenn man $\varDelta x$ unendlich klein werden lässt,

$$\varphi'(x) = Af'(x). \tag{2.}$$

Bezeichnet man nun wieder $f(x)$ mit y, so wird

$$\varphi(x) = Af(x) = Ay;$$

dadurch geht Gleichung (2.) über in

$$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}. \tag{2a.}$$

Satz 3. *Die Ableitung einer Summe von zwei (oder von mehreren) Functionen ist gleich der Summe der Ableitungen der einzelnen Functionen;* d. h. es ist

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Beweis. Es seien

$$u = f(x) \quad \text{und} \quad v = g(x)$$

zwei beliebige Functionen von x, und es sei

$$y = F(x) = u + v = f(x) + g(x).$$

Es wird dann

$$F(x + \varDelta x) = f(x + \varDelta x) + g(x + \varDelta x),$$
$$\varDelta y = F(x + \varDelta x) - F(x) = f(x + \varDelta x) - f(x) + g(x + \varDelta x) - g(x),$$
$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} + \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x},$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x = 0}\frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} + \lim_{\varDelta x = 0}\frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} = f'(x) + g'(x),$$

oder

$$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \tag{3.}$$

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass der angegebene Satz auch für eine Summe von beliebig vielen Functionen gilt; nur muss die Anzahl der Summanden eine endliche sein.

Auflösung. Hier ist nach den Formeln Nr. 19 und 20 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x^4)}{dx} + \frac{d(11x^2)}{dx} - \frac{d(7x)}{dx} + \frac{d(8)}{dx}.$$

Ferner wird nach Formel Nr. 18 der Tabelle

$$\frac{d(3x^4)}{dx} = 3\frac{d(x^4)}{dx} = 3 \,.\, 4x^3 = 12x^3,$$

$$\frac{d(11x^2)}{dx} = 11\frac{d(x^2)}{dx} = 11 \,.\, 2x = 22x,$$

$$\frac{d(7x)}{dx} = 7\frac{dx}{dx} = 7 \,.\, 1 = 7,$$

$$\frac{d(8)}{dx} = 0,$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 22x - 7.$$

In welcher Weise sich dieses Verfahren verallgemeinern lässt, soll die folgende Aufgabe zeigen.

Aufgabe 4. Man soll die Ableitung von

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bilden.

Auflösung. Nach Formel Nr. 19 der Tabelle ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ax^n)}{dx} + \frac{d(a_1x^{n-1})}{dx} + \frac{d(a_2x^{n-2})}{dx} + \cdots + \frac{d(a_{n-1}x)}{dx} + \frac{d(a_n)}{dx},$$

und nach den Formeln Nr. 18 und 21 der Tabelle wird

$$\frac{d(ax^n)}{dx} = a\frac{d(x^n)}{dx} = anx^{n-1},$$

$$\frac{d(a_1x^{n-1})}{dx} = a_1\frac{d(x^{n-1})}{dx} = a_1(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{d(a_2x^{n-2})}{dx} = a_2\frac{d(x^{n-2})}{dx} = a_2(n-2)x^{n-3},$$

. . . .

$$\frac{d(a_{n-1}x)}{dx} = a_{n-1}\frac{dx}{dx} = a_{n-1},$$

$$\frac{d(a_n)}{dx} = 0,$$

folglich erhält man

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

Da sich jede ganze rationale Function auf die Form

$$y = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bringen lässt, so ist damit gezeigt, wie man jede beliebige ganze rationale Function differentiiren kann.

§ 16.

Uebungs-Beispiele.

1) $y = 6x^5 + 4,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 30x^4.$

2) $y = 6x^5 - 4,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 30x^4.$

3) $x = \frac{2}{5}x^{10},$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 4x^9.$

4) $y = 3x^2 - 7x + 9,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 6x - 7.$

5) $y = (2x - 5)(x^2 + 11x - 3),$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 34x - 61.$

Hier findet man das Resultat, indem man zunächst die Klammern auflöst und dadurch y auf die Form bringt

$$y = 2x^3 + 17x^2 - 61x + 15.$$

6) $y = 5x^4 - \frac{11}{3}x^3 + 4x^2 - 3x + 7,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 20x^3 - 11x^2 + 8x - 3.$

7) $y = x^4 + 12x^3 - 29x^2 - 61x - 134,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 36x^2 - 58x - 61.$

8) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 8.$

9) $y = 3x^5 - 7x^3 + 13x,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 15x^4 - 21x^2 + 13.$

10) $y = 5x^8 - 3x^6 + 2x^4 - 4x^2 + 7,$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 40x^7 - 18x^5 + 8x^3 - 8x.$

§ 17.

Differentiation einer Potenz mit negativem, ganzzahligen Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 21.)

Aufgabe. Man soll die Ableitung von

$$y = x^m \tag{1.}$$

bilden, wenn

$$m = -n \tag{2.}$$

eine *negative* ganze Zahl ist.

Auflösung. In diesem Falle ist

$$y = f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \tag{3.}$$

$$y_1 = f(x_1) = x_1^{-n} = \frac{1}{x_1^n}, \tag{4.}$$

also

$$y_1 - y = \frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n} = -\frac{x_1^n - x^n}{x^n{}_1 x^n}, \tag{5.}$$

also nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{1}{x^n x_1^n} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} \tag{6.}$$

$$= -\frac{1}{x^n x_1^n}(x_1^{n-1} + x x_1^{n-2} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1}).$$

Dies giebt

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot n x^{n-1}, \tag{7.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -n x^{-n-1} = m x^{m-1}. \tag{8.}$$

Die Formel Nr. 21 der Tabelle bleibt also noch richtig, auch wenn m eine *negative* ganze Zahl ist.

§ 18.

Differentiation der logarithmischen Function $f(x) = \log x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 22 und 23.)

Aufgabe. Man soll die Ableitung der logarithmischen Function

$$y = f(x) = \log x \tag{1.}$$

bilden.

Auflösung. In dem vorliegenden Falle ist

$$f(x) = \log x, \quad f(x + \Delta x) = \log(x + \Delta x), \tag{2.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right),$$

oder

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \tag{3.}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right). \tag{4.}$$

Setzt man

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}, \quad \text{also} \quad \Delta x = \frac{x}{n}, \tag{5.}$$

so ist

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{n}{x} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x} \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]. \tag{6.}$$

Nun wird aber n *unendlich gross*, wenn Δx *unendlich klein* wird: deshalb ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n=\infty} \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]. \tag{7.}$$

Diesen Grenzwerth kann man leicht angeben, denn nach Formel Nr. 13 der Tabelle ist

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \tag{8.}$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}. \tag{9.}$$

Dabei ist die Basis des Logarithmen-Systems noch eine ganz beliebige; wählt man aber die Zahl e selbst zur Basis des Logarithmen-Systems, so ist

$$\log e = 1,$$

so dass die Gleichung (9.) eine noch einfachere Form annimmt.

Die Logarithmen mit der Basis e heissen die „*natürlichen Logarithmen*“ und mögen in dem Folgenden nur durch den Buchstaben l bezeichnet werden.

Demnach ergiebt sich aus Gleichung (9.)

$$\text{(9a.)} \qquad \frac{d(\mathrm{l}x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Bemerkung.

In der höheren Mathematik benutzt man fast ausschliesslich die natürlichen Logarithmen mit der Basis e; es ist aber sehr leicht, von dem einen Logarithmen-System zu einem anderen überzugehen.

Es bezeichne z. B. $\log x$ den *Briggs*'schen Logarithmus von x mit der Basis 10, und $\mathrm{l}x$ den *natürlichen* Logarithmus mit der Basis e; dann ist

(10.) $y = \log x$ gleichbedeutend mit $10^y = x$

und

(11.) $z = \mathrm{l}x$ ist „ „ $e^z = x$.

Daraus folgt

$$\text{(12.)} \qquad 10^y = e^z.$$

Nimmt man auf beiden Seiten dieser Gleichung den *natürlichen* Logarithmus, so erhält man

$$\text{(13.)} \qquad y\,\mathrm{l}10 = z, \quad \text{oder} \quad \log x = \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}10}.$$

Nimmt man dagegen auf beiden Seiten der Gleichung (12.) den *Briggs*'schen Logarithmus, so erhält man

$$\text{(14.)} \qquad y = z \log e, \quad \text{oder} \quad \log x = \mathrm{l}x \,.\, \log e.$$

Aus den Gleichungen (13.) und (14.) folgt zunächst

$$\frac{1}{\mathrm{l}10} = \log e;$$

ferner geht aus denselben hervor, dass man die natürlichen Logarithmen sämmtlich mit dem constanten Factor

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{l}10} = \frac{1}{2{,}302\,585\,093\,0} = 0{,}434\,294\,481\,9$$

zu multipliciren hat, um aus ihnen die entsprechenden *Briggs*'schen zu erhalten. Man nennt diesen Factor $\log e$ gewöhnlich „den *Modul* der *Briggs*'schen Logarithmen.“

§ 19.

Differentiation der trigonometrischen Functionen $\sin x$ und $\cos x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 24 und 25.)

Aufgabe 1. Man soll die Ableitung von

$$y = f(x) = \sin x \tag{1.}$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$f(x + \varDelta x) = \sin(x + \varDelta x), \tag{2.}$$

$$f(x + \varDelta x) - f(x) = \varDelta f(x) = \sin(x + \varDelta x) - \sin x. \tag{3.}$$

Nun ist bekanntlich

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

folglich wird

$$\varDelta f(x) = 2\sin\left(\frac{\varDelta x}{2}\right)\cos\left(x + \frac{\varDelta x}{2}\right), \tag{4.}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\varDelta x = 2z \tag{5.}$$

setzt,

$$\varDelta f(x) = 2\sin z \cos(x + z),$$

$$\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = \frac{\sin z}{z}\cos(x + z), \tag{6.}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}\cos(x + z) = \cos x \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z}. \tag{7.}$$

Nach Formel Nr. 1 der Tabelle ist aber

$$\lim_{z=0}\frac{\sin z}{z} = 1,$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x. \tag{8.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Ableitung von

$$y = f(x) = \cos x \tag{9.}$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (9.) folgt

(10.) $$f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x),$$

(11.) $$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x.$$

Nun ist bekanntlich

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a - b}{2}\right)\sin\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

folglich wird

(12.) $$\Delta f(x) = -2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder, wenn man wieder

$$\Delta x = 2z$$

setzt,

(12a.) $$\Delta f(x) = -2\sin z \sin(x + z),$$

(13.) $$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\sin z}{z}\sin(x + z),$$

(14.) $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = -\sin x \lim_{z=0}\frac{\sin z}{z},$$

oder

(15.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

Bemerkung.

Es wird hier nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass in $\sin x$ und $\cos x$ die Grösse x *kein Winkel*, sondern die *Länge eines Kreisbogens* ist. (Vergl. § 1, Seite 10.)

§ 20.

Differentiation der trigonometrischen Functionen tg$x$ und ctg$x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 26 und 27.)

Aufgabe 1. Man soll die Ableitung von

(1.) $$y = f(x) = \operatorname{tg} x$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x), \tag{2.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x. \tag{3.}$$

Nun ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b},$$

folglich wird

$$\Delta f(x) = \frac{\sin(\Delta x)}{\cos(x + \Delta x) \cos x}, \tag{4.}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(x + \Delta x)\cos x} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}, \tag{5.}$$

und da nach Formel Nr. 1 der Tabelle

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

wird, so ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \tag{6.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Ableitung von

$$y = f(x) = \operatorname{ctg} x \tag{7.}$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (7.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \operatorname{ctg}(x + \Delta x), \tag{8.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x. \tag{9.}$$

Nun ist aber bekanntlich

$$\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b = -\frac{\sin(a - b)}{\sin a \sin b},$$

folglich wird

$$\Delta f(x) = -\frac{\sin(\Delta x)}{\sin(x + \Delta x)\sin x}, \tag{10.}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{\sin(x + \Delta x)\sin x} \cdot \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}, \tag{11.}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x). \tag{12.}$$

§ 21.

Differentiation der Producte und Quotienten von Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 28—33.)

Aufgabe 1. Es sei

$$u = \varphi(x), \qquad v = \psi(x); \tag{1.}$$

man soll die Ableitung des Productes

$$y = f(x) = uv = \varphi(x)\,\psi(x) \tag{2.}$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (2.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x)\,\psi(x + \Delta x), \tag{3.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \varphi(x + \Delta x)\,\psi(x + \Delta x) - \varphi(x)\,\psi(x),$$

oder

$$\begin{aligned}\Delta f(x) = \varphi(x + \Delta x)\,\psi(x + \Delta x) &- \varphi(x)\,\psi(x + \Delta x)\\ + \varphi(x)\,\psi(x + \Delta x) &- \varphi(x)\,\psi(x),\end{aligned} \tag{4.}$$

also

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \psi(x + \Delta x)\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + \varphi(x)\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}. \tag{5.}$$

Nun ist

$$\lim_{\Delta x = 0} \psi(x + \Delta x) = \psi(x), \qquad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x),$$

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \psi'(x),$$

folglich wird

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \psi(x)\,\varphi'(x) + \varphi(x)\,\psi'(x), \tag{6.}$$

oder

$$\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}. \tag{6a.}$$

Dies giebt den Satz:

Ein Product von zwei Factoren wird differentiirt, indem man jeden der beiden Factoren einzeln differentiirt, mit dem andern Factor multiplicirt und die Summe dieser beiden Producte bildet.

Beispiele.

1) $y = (3 + 4x)(2 - 7x)$,

$$\frac{dy}{dx} = 4(2 - 7x) - 7(3 + 4x) = -13 - 56x.$$

Von der Richtigkeit dieses Resultates kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man nach Auflösung der Klammern

$$y = 6 - 13x - 28x^2$$

erhält, woraus sich unmittelbar derselbe Werth von $\frac{dy}{dx}$ ergiebt.

2) $y = (x^4 - 3x^2 + 11)\sin x$;

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 - 6x)\sin x + (x^4 - 3x^2 + 11)\cos x.$$

3) $y = \cos x \operatorname{tg} x$;

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x.$$

Dieses Resultat hätte man noch einfacher finden können, indem man berücksichtigt, dass

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ist, denn dadurch wird

$$y = \cos x \operatorname{tg} x = \sin x$$

und nach Formel Nr. 24 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Aufgabe 2. Es sei

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x), \quad w = \chi(x), \tag{7.}$$

man soll die Ableitung von

$$y = uvw \tag{8.}$$

bilden.

Auflösung. Indem man

$$vw = v_1 \tag{9.}$$

setzt, erhält man

$$y = uv_1, \tag{10.}$$

so dass nach der vorhergehenden Aufgabe

$$\frac{dy}{dx} = v_1\frac{du}{dx} + u\frac{dv_1}{dx} \tag{11.}$$

wird. Nun ist aber, gleichfalls nach der vorhergehenden Aufgabe.

$$\frac{dv_1}{dx} = w\frac{dv}{dx} + v\frac{dw}{dx}, \tag{12.}$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uvw)}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx}. \tag{13.}$$

Dies giebt den Satz:

Ein Product von drei Factoren wird differentiirt, indem man jeden dieser Factoren einzeln differentiirt, mit den beiden anderen Factoren multiplicirt und die Summe dieser Producte bildet.

Man erkennt leicht, dass sich diese Regel auch auf Producte mit beliebig vielen Factoren übertragen lässt. Zum Beweise mögen die Gleichungen (6a.) und (13.), indem man sie beziehungsweise durch uv und uvw dividirt, auf die Form

$$\frac{1}{uv}\frac{d(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}, \tag{6b.}$$

$$\frac{1}{uvw}\frac{d(uvw)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}. \tag{13a.}$$

gebracht werden.

Dem entsprechend kann jetzt durch den Schluss von m auf $m+1$ die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{u_1u_2\ldots u_m}\frac{d(u_1u_2\ldots u_m)}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx} \tag{14.}$$

nachgewiesen werden.

Ist nämlich u_m wiederum aus zwei Factoren zusammengesetzt, ist z. B.

$$u_m = uv,$$

so wird nach Gleichung (6b.)

$$\frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

Deshalb geht Gleichung (14.) über in

$$(15.)\quad \frac{1}{u_1u_2\ldots u_{m-1}uv}\cdot\frac{d(u_1u_2\ldots u_{m-1}uv)}{dx}=$$

$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{u_{m-1}}\frac{du_{m-1}}{dx}+\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx};$$

daraus folgt, wenn man u_m statt u, u_{m+1} statt v schreibt,

$$(15a.)\quad \frac{1}{u_1u_2\ldots u_mu_{m+1}}\cdot\frac{d(u_1u_2\ldots u_mu_{m+1})}{dx}=$$

$$\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\cdots+\frac{1}{u_m}\frac{du_m}{dx}+\frac{1}{u_{m+1}}\frac{du_{m+1}}{dx}.$$

Damit ist die allgemeine Gültigkeit der Gleichung (14.) nachgewiesen. Durch Multiplication mit $u_1u_2\ldots u_m$ erhält man aus derselben die Formel

$$(16.)\quad \frac{d(u_1u_2\ldots u_m)}{dx}=$$

$$u_2u_3\ldots u_m\frac{du_1}{dx}+u_1u_3\ldots u_m\frac{du_2}{dx}+\cdots+u_1u_2\ldots u_{m-1}\frac{du_m}{dx}$$

und damit den Satz:

Ein Product von beliebig vielen Factoren wird differentiirt, indem man jeden dieser Factoren einzeln differentiirt, mit allen übrigen Factoren multiplicirt und die Summe dieser Producte bildet.

Sind die m Factoren alle einander gleich, ist also

$$u_1=u_2=u_3=\cdots=u_m=u,$$

so folgt aus Gleichung (16.)

$$(17.)\quad \frac{d(u^m)}{dx}=mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

Für den besonderen Fall, wo

$$u=x$$

ist, geht diese Gleichung in Formel Nr. 21 der Tabelle über, nämlich in

$$\frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1}.$$

Die Gleichung (17.) gilt vorläufig nur, wenn m eine positive *ganze* Zahl ist, sie bleibt aber, wie sogleich gezeigt werden soll, auch noch richtig, wenn m eine positive *gebrochene* Zahl ist.

Wird nämlich

(18.) $$m = \frac{a}{b}, \quad \text{oder} \quad mb = a,$$

wo a und b positive *ganze* Zahlen sind, so folgt aus

(19.) $$y = u^m = u^{\frac{a}{b}},$$

indem man beide Seiten der Gleichung in die b^{te} Potenz erhebt

(20.) $$y^b = u^a.$$

Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung mit Anwendung der in Gleichung (17.) ausgesprochenen Regel, so erhält man

(21.) $$by^{b-1}\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx} = mbu^{mb-1}\frac{du}{dx}.$$

Da aber aus Gleichung (19.) folgt, dass

$$y^{b-1} = u^{mb-m}$$

ist, so geht Gleichung (21.) über in

$$bu^{mb-m}\frac{dy}{dx} = mbu^{mb-1}\frac{du}{dx},$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch bu^{mb-m} dividirt, in

(22.) $$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx},$$

ein Resultat, das der Form nach mit Gleichung (17.) genau übereinstimmt.

Es gilt daher auch die Gleichung

(22a.) $$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$$

noch, wenn m eine positive *gebrochene* Zahl ist.

Man kann sogar die Richtigkeit dieser Formeln noch zeigen, wenn

(23.) $$m = -n$$

eine *negative* ganze oder gebrochene Zahl ist. Es wird dann

(24.) $$y = u^m = u^{-n} = \frac{1}{u^n},$$

also

(25.) $$u^n y = 1.$$

Differentiirt man beide Seiten dieser Gleichung, so findet man nach der Regel für die Differentiation eines Productes

$$nu^{n-1}\frac{du}{dx}\cdot y + u^n\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder, wenn man mit u multiplicirt und für $u^n y$ den Werth 1 setzt,

$$n\frac{du}{dx} + u^{n+1}\frac{dy}{dx} = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = -nu^{-n-1}\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}. \tag{26.}$$

Damit ist bewiesen, dass die Gleichung (17.) und deshalb auch die Formel Nr. 21 der Tabelle gilt, gleichviel ob m eine *ganze* oder eine *gebrochene*, eine *positive* oder *negative* Zahl ist.

Beispiele.

1) $y = (2x^3 - 7x^2 + 3x + 11)^4;$

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x^3 - 7x^2 + 3x + 11)^3(6x^2 - 14x + 3).$$

2) $y = \sqrt{a^2 + x^2} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$

Setzt man

$$a^2 + x^2 = u,$$

so wird

$$y = u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}.2x,$$

oder

$$\frac{d\sqrt{a^2 + x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \tag{27.}$$

Ebenso findet man

$$\frac{d\sqrt{x^2 - a^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{27a.}$$

3) $y = \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$

Setzt man hier

$$a^2 - x^2 = u,$$

so wird wieder

$$y = u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x),$$

oder

$$\frac{d\sqrt{a^2 - x^2}}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{28.}$$

4) $y = \sqrt[3]{(2x-5)^4} = (2x-5)^{\frac{4}{3}};$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} (2x-5)^{\frac{1}{3}} . 2 = \frac{8}{3} \sqrt[3]{2x-5}.$$

5) $y = \frac{3}{5} x^{\frac{10}{3}} - \frac{5}{4} x^{\frac{8}{5}} + \frac{2}{11} x^{\frac{11}{4}} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{6}};$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\frac{7}{3}} - 2x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2} x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{6}}.$$

6) $y = \frac{1}{x^4} = x^{-4};$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -4x^{-5}.$

7) $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}};$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$

8) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = x^{-\frac{1}{4}};$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}.$

9) $y = \frac{3}{x^4} + 5\sqrt[3]{x} - 7x^5;$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^5} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - 35x^4.$

10) $y = \frac{a}{\sqrt{x}} + b + c\sqrt{x} = ax^{-\frac{1}{2}} + b + cx^{\frac{1}{2}};$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2\sqrt{x^3}} + \frac{c}{2\sqrt{x}}.$$

11) $y = 12\sqrt[4]{x^3} - 7\sqrt[7]{x^4} + 11x - \frac{8}{\sqrt{x^3}} =$

$$12x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{4}{7}} + 11x - 8x^{-\frac{3}{2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^{-\frac{1}{4}} - 4x^{-\frac{3}{7}} + 11 + 12x^{-\frac{5}{2}} = \frac{9}{\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{\sqrt[7]{x^3}} + 11 + \frac{12}{\sqrt[2]{x^5}}.$$

12) $y = (2x^2 - 3x + 4)\sqrt{(4x-3)^3}$.

Setzt man

$$2x^2 - 3x + 4 = u, \quad \sqrt{(4x-3)^3} = (4x-3)^{\frac{3}{2}} = v,$$

so wird

$$y = uv,$$

$$\frac{du}{dx} = 4x - 3, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}} . 4 = 6\sqrt{4x-3},$$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$= (4x-3)^{\frac{3}{2}}(4x-3) + (2x^2 - 3x + 4) . 6\sqrt{4x-3}$$

$$= \sqrt{4x-3}\,[(4x-3)^2 + 6(2x^2 - 3x + 4)]$$

$$= \sqrt{4x-3}\,(28x^2 - 42x + 33).$$

13) $y = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x = \cos^5 x.$$

14) $y = \cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x)(-\sin x) = -\sin^7 x.$$

15) $y = 3\,\mathrm{tg}^5 x - 2\,\mathrm{tg}^4 x - 5\,\mathrm{tg}^3 x + 4\,\mathrm{tg}^2 x$;

$$\frac{dy}{dx} = (15\,\mathrm{tg}^4 x - 8\,\mathrm{tg}^3 x - 15\,\mathrm{tg}^2 x + 8\,\mathrm{tg}\, x)(1 + \mathrm{tg}^2 x)$$

$$= 15\,\mathrm{tg}^6 x - 8\,\mathrm{tg}^5 x - 15\,\mathrm{tg}^2 x + 8\,\mathrm{tg}\, x.$$

Aufgabe 3. Es sei

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x); \tag{29.}$$

man soll die Ableitung des Quotienten

$$y = \frac{u}{v}, \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \tag{30.}$$

bilden.

Auflösung. Aus Gleichung (30.) folgt

$$f(x + \Delta x) = \frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)}, \tag{31.}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) = \frac{\varphi(x + \Delta x)}{\psi(x + \Delta x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$$= \frac{\varphi(x + \Delta x)\,\psi(x) - \psi(x + \Delta x)\,\varphi(x)}{\psi(x + \Delta x)\,\psi(x)}.$$

Dies giebt

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\psi(x + \Delta x)\,\psi(x)} \cdot \frac{\varphi(x + \Delta x)\,\psi(x) - \psi(x + \Delta x)\,\varphi(x)}{\Delta x}, \tag{32.}$$

oder, wenn man in dem Zähler auf der rechten Seite dieser Gleichung die Grösse $\varphi(x)\,\psi(x)$ subtrahirt und wieder addirt,

$$\psi(x + \Delta x)\,\psi(x) \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \tag{33.}$$

$$\frac{\varphi(x + \Delta x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(x) - \psi(x + \Delta x)\,\varphi(x) + \varphi(x)\,\psi(x)}{\Delta x}$$

$$= \psi(x)\,\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} - \varphi(x)\,\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}.$$

Geht man zur Grenze über, indem man Δx unendlich klein werden lässt, so erhält man

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x), \quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \psi'(x).$$

und deshalb

$$\psi(x)\,\psi(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} = \psi(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,\psi'(x),$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x)\,\varphi'(x) - \varphi(x)\,\psi'(x)}{\psi(x)\,\psi(x)}, \tag{34.}$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{34a.}$$

Dies giebt den Satz:

Die Ableitung eines Bruches ist gleich dem Nenner, multiplicirt mit der Ableitung des Zählers, weniger dem Zähler, multiplicirt mit der Ableitung des Nenners, das Ganze dividirt durch das Quadrat des Nenners.

Beispiele.

1) $y = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dieses Resultat stimmt mit Formel Nr. 26 der Tabelle überein, denn es ist

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

2) $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^n \cdot 0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$

Dieses Resultat stimmt mit der Formel Nr. 21 der Tabelle überein.

3) $y = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}.$

Hier ist

$$u = x^2 - a^2, \quad v = x^2 + a^2,$$

also

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dv}{dx} = 2x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + a^2)2x - (x^2 - a^2)2x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{4a^2 x}{(x^2 + a^2)^2}.$$

4) $y = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{x - \sqrt{a^2 + x^2}}.$

Hier ist

$$u = x + \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

$$v = x - \sqrt{a^2 + x^2},\quad \frac{dv}{dx} = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{x - \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x - \sqrt{a^2 + x^2})(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + (x + \sqrt{a^2 + x^2})(x - \sqrt{a^2 + x^2})}{(x - \sqrt{a^2 + x^2})^2 \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{-2a^2}{(x - \sqrt{a^2 + x^2})^2 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{-2(x + \sqrt{a^2 + x^2})^2}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

II. Abschnitt.

Functionen von Functionen.

§ 22.

Differentiation einer Function von der Form $f(u)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 34 und 35.)

Es sei y irgend eine stetige Function von u, also

$$y = f(u), \tag{1.}$$

und u sei wieder irgend eine stetige Function von x, also

$$u = \varphi(x), \tag{2.}$$

dann ist y auch eine stetige Function von x, nämlich

$$y = f[\varphi(x)] = F(x). \tag{3.}$$

Beispiele solcher „*Functionen von Functionen*" sind

$$y = \sqrt[3]{4x^2 - 7x + 11}, \quad y = \sin(3x), \quad y = (\sin x)^4,$$

$$y = \log(\sin x), \qquad y = (\log x)^n, \quad y = \arcsin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Es ist die Frage, in welcher Weise solche Functionen von Functionen differentiirt werden können.

Vermehrt man x um Δx, so gehen die Grössen x, u und y bezw. über in

$$x + \Delta x, \quad u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad y + \Delta y = f(u + \Delta u),$$

folglich ist

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta y = f(u + \Delta u) - f(u), \tag{4.}$$

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x}, \tag{5.}$$

oder, wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung Zähler und Nenner mit Δu gleich $\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ multiplicirt,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x};$$

folglich ist

$$(6.)\qquad \frac{dy}{dx}=f'(u)\,\varphi'(x)=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Dies giebt den Satz:

Die Ableitung einer Function von einer Function ist gleich dem Producte der Ableitungen beider Functionen.

Aus diesem Satze erkennt man ohne Weiteres, dass man mit den verschwindend kleinen Grössen dx, dy, du, ... ebenso rechnen darf, als wären sie bestimmte Zahlen. Man erhält nämlich $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ aus $\frac{dy}{dx}$, indem man Zähler und Nenner mit du multiplicirt.

Eine etwas einfachere Form erhält dieser Satz, wenn man statt der *Ableitungen* oder *Differential-Quotienten* die *Differentiale* einführt.

Aus der Erklärung des Differential-Quotienten einer Function $y=f(x)$, nämlich aus

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

folgt unmittelbar

$$(7.)\qquad dy=df(x)=f'(x)dx=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x,$$

d. h. *das Differential einer Function von einer unabhängigen Veränderlichen x ist gleich der Ableitung, multiplicirt mit dem Differential dieser Veränderlichen.*

Aus Gleichung (6.) folgt daher

$$(6a.)\qquad dy=f'(u)\,\varphi'(x)dx;$$

da aber

$$du=\varphi'(x)dx$$

ist, so findet man hieraus

$$(8.)\qquad dy=f'(u)du,$$

d. h. *man findet das Differential von y, indem man die Function u als die unabhängige Veränderliche ansieht.*

Beispiele.

1) $y = u^3$ und $u = \sin x$.

Hier ist

$$dy = 3u^2 du \quad \text{und} \quad du = \cos x dx,$$

also

$$dy = 3\sin^2 x \cos x dx, \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = 3\sin^2 x \cos x.$$

2) $y = l(1 - x^2) = lu$, wo $u = 1 - x^2$.

$$dy = \frac{1}{u} du = \frac{1}{1 - x^2}(-2x)\, dx = \frac{-2x dx}{1 - x^2}.$$

Ist y eine Function von u, u eine Function von v, und v eine Function von x, ist also

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

so wird auch y eine Function von v und deshalb auch eine Function von x; daher findet man nach dem vorhergehenden Satze

$$(9.) \qquad dy = f'(u)du, \quad du = \varphi'(v)dv, \quad dv = \psi'(x)dx,$$

oder

$$(10.) \qquad dy = f'(u)du = f'(u)\varphi'(v)dv = f'(u)\varphi'(v)\psi'(x)dx.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und das Differential von y auch dann noch finden, wenn die Reihe der veränderlichen Grössen, von denen jede eine Function der folgenden ist, noch länger wird.

Es sei z. B.

$$y = \sin u, \quad u = v^m, \quad v = a^3 + x^3,$$

oder

$$y = \sin[(a^3 + x^3)^m],$$

dann wird

$$dy = \cos u du, \quad du = mv^{m-1}dv, \quad dv = 3x^2 dx,$$

also

$$dy = \cos u \,.\, mv^{m-1}dv = \cos u \,.\, mv^{m-1} \,.\, 3x^2 dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = 3mx^2(a^3 + x^3)^{m-1}\cos[(a^3 + x^3)^m].$$

§ 23.

Uebungs-Aufgaben.

1) $$y = u^m, \quad \frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}.$$

Dieses Resultat stimmt mit Formel Nr. 29a der Tabelle überein. Daraus erkennt man, dass diese Formel nur ein besonderer Fall von Formel Nr. 35 ist.

2) $y = \sin(mx)$.

Man setze
$$mx = u,$$
dann wird
$$y = \sin u, \quad dy = \cos u du,$$
$$du = mdx, \quad dy = m\cos(mx)dx,$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = m\cos(mx).$$

3) $y = \cos(ax^3 + bx^4)$.

Man setze
$$ax^3 + bx^4 = u,$$
dann wird
$$y = \cos u, \qquad dy = -\sin u du,$$
$$du = (3ax^2 + 4bx^3)dx, \quad dy = -\sin(ax^3 + bx^4) . (3ax^2 + 4bx^3)dx,$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = -(3ax^2 + 4bx^3)\sin(ax^3 + bx^4).$$

4) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Hier ist
$$y = \operatorname{tg} u, \quad \text{wo} \quad u = \frac{x}{2},$$
$$dy = \frac{du}{\cos^2 u}, \qquad du = \frac{dx}{2},$$
also
$$dy = \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5) $y = \sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^3}$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3(\cos x - \sin x)}{5\sqrt[5]{(\sin x + \cos x)^2}}$.

6) $y = \mathrm{l}(\sin x)$.

Hier ist

$$y = \mathrm{l}u, \qquad \text{wo} \qquad u = \sin x,$$

$$dy = \frac{du}{u}, \qquad du = \cos x dx,$$

$$dy = \frac{\cos x dx}{\sin x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg} x.$$

7) $y = \mathrm{l}(\cos x)$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} x$.

8) $y = \mathrm{l}(\operatorname{tg} x)$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

9) $y = \mathrm{l}(\operatorname{ctg} x)$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin x \cos x}$.

10) $y = \mathrm{l}(\cos x + \sin x)$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}$.

11) $y = \mathrm{l}(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})$.

Man setze

$$u = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2},$$

dann wird

$$y = \mathrm{l}u, \quad dy = \frac{1}{u} du,$$

$$du = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dx = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})dx}{\sqrt{a^4 - x^4}},$$

$$dy = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})dx}{(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{a^4 - x^4}},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + x^2})}{(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Indem man noch Zähler und Nenner auf der rechten Seite dieser Gleichung mit $\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}$ multiplicirt, erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(2a^2 - 2\sqrt{a^4 - x^4})}{2x^2\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - x^4}}{x\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

12) $y = \mathrm{l}(\mathrm{l}x)$.

Hier ist

$$y = \mathrm{l}u, \quad \text{wo} \quad u = \mathrm{l}x,$$

$$dy = \frac{du}{u}, \quad du = \frac{dx}{x},$$

$$dy = \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{l}x}.$$

§ 24.

Differentiation inverser Functionen, insbesondere der cyklometrischen Functionen und der Function a^x.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 36—43.)

Wie schon früher (§ 1) hervorgehoben wurde, kann man aus der Gleichung

$$y = f(x), \tag{1.}$$

wenn y keine Constante ist, durch Auflösung nach x eine Gleichung

$$x = \varphi(y) \tag{2.}$$

herleiten; man nennt dabei die eine Function die *inverse* der anderen, weil die eine aus der anderen durch Umkehrung entsteht.

Es ist nun häufig nothwendig, $\frac{dy}{dx}$ zu bilden, wenn nicht $y = f(x)$ gegeben ist, sondern die *inverse Function* $x = \varphi(y)$. Dies geschieht, indem man beide Seiten der Gleichung (2.) nach x differentiirt; dabei muss man aber beachten, dass auf der rechten Seite der Gleichung eine Function von y steht, und dass y wieder eine Function von x ist. Es kommt dabei also Formel Nr. 35 der Tabelle zur Anwendung, wobei man erhält

$$1 = \frac{d\varphi(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \varphi'(y)\frac{dy}{dx}, \tag{3.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{4.}$$

Beispiele.

1) Es sei

$$y = \arcsin x, \tag{5.}$$

dann findet man durch *Umkehrung der Function*

$$x = \sin y \tag{6.}$$

und durch Differentiation dieser Gleichung nach x

$$1 = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{7.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}, \tag{8.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (6.)

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{8a.}$$

Für alle Werthe von x zwischen -1 und $+1$ giebt es einen Werth von y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Da $x = \sin y$ und der Bogen y in diesem Intervalle gleichzeitig zunehmen, da also dx und dy gleiches Vorzeichen haben, so muss in Gleichung (8.) die Quadratwurzel mit dem positiven Vorzeichen genommen werden.

2) Es sei

$$y = \arccos x, \tag{9.}$$

dann wird in ähnlicher Weise wie vorhin

$$x = \cos y, \tag{10.}$$

$$1 = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{11.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}, \tag{12.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{12a.}$$

Für alle Werthe von x zwischen -1 und $+1$ giebt es einen Werth von y zwischen 0 und π. Da $x = \cos y$ von $+1$

bis -1 *abnimmt*, während der Bogen y von 0 bis π *zunimmt*, da also dx und dy entgegengesetztes Vorzeichen haben, so ist in Gleichung (12.) das Vorzeichen der Quadratwurzel richtig bestimmt.

3) Es sei

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \tag{13.}$$

dann wird

$$x = \operatorname{tg} y, \tag{14.}$$

(15.) $1 = (1 + \operatorname{tg}^2 y) \cdot \dfrac{dy}{dx}$, (16.) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$,

oder mit Rücksicht auf Gleichung (14.)

$$\frac{d(\operatorname{arc\,tg} x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}. \tag{16a.}$$

4) Es sei

$$y = \operatorname{arc\,ctg} x, \tag{17.}$$

dann wird

$$x = \operatorname{ctg} y, \tag{18.}$$

(19.) $1 = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y) \cdot \dfrac{dy}{dx}$, (20.) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}$,

oder

$$\frac{d(\operatorname{arc\,ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}. \tag{20a.}$$

5) Es sei

$$y = \operatorname{arc\,sec} x, \tag{21.}$$

dann wird

$$x = \sec y = \frac{1}{\cos y}, \quad \cos y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \tag{22.}$$

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = -x^{-2}, \tag{23.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{-2}}{\sin y} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - x^{-2}}}, \tag{24.}$$

oder

$$\frac{d(\operatorname{arc\,sec} x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{24a.}$$

6) Es sei

(25.) $$y = \operatorname{arc\,cosec} x,$$

dann wird

(26.) $$x = \operatorname{cosec} y = \frac{1}{\sin y}, \quad \sin y = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

(27.) $$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -x^{-2},$$

(28.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-2}}{\cos y} = -\frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = -\frac{x^{-2}}{\sqrt{1 - x^{-2}}},$$

oder

(28a.) $$\frac{d(\operatorname{arc\,cosec} x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

7) Es sei

(29.) $$y = a^x,$$

dann wird, wenn man auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus nimmt,

(30.) $$\mathrm{l}y = x \,.\, \mathrm{l}a,$$

(31.) $$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \mathrm{l}a,$$

(32.) $$\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{l}a,$$

oder

(32a.) $$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x\,\mathrm{l}a.$$

Für den besonderen Fall, wo a gleich e (der Basis der natürlichen Logarithmen) wird, erhält man

$$\mathrm{l}a = \mathrm{l}e = 1,$$

so dass die Gleichung (32a.) übergeht in

(33.) $$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Ist C eine beliebige Constante, so ist auch

(34.) $$\frac{d(Ce^x)}{dx} = Ce^x.$$

Dieses Resultat ist deshalb bemerkenswerth, weil Ce^x, wie später gezeigt werden soll, die *einzige Function ist, welche mit ihrer Ableitung übereinstimmt.* Man nennt e^x „die *Exponential-Function.*“

§ 25.

Uebungs-Beispiele.

1) $d(ax^3 - bx^2 + c) = x(3ax - 2b)dx.$

2) $d(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 4x - 5) = (x^2 - 3x + 4)dx.$

3) $d\left(2x^2 - 7x - 5 + \frac{3}{x}\right) = \left(4x - 7 - \frac{3}{x^2}\right)dx.$

4) $d\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{a^2}{x}\right) = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2}\right)dx.$

5) $d\left(\frac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}} + 8\sqrt[7]{x^3}\right) = d\left(3x^{\frac{13}{5}} - 7x^{-\frac{1}{3}} + 8x^{\frac{3}{7}}\right)$

$$= \left(\frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}\right)dx.$$

6) $d[(ax^{2n} - bx^n + c)^m] =$
$$mn(ax^{2n} - bx^n + c)^{m-1}(2ax^n - b)x^{n-1}dx.$$

7) $d\left(\frac{1}{2x^2-5x+9}\right) = d[(2x^2-5x+9)^{-1}] = -\frac{(4x-5)dx}{(2x^2-5x+9)^2}.$

8) $d\left(\frac{a+x}{b+x}\right) = \frac{(b-a)dx}{(b+x)^2}.$

9) $d[(a+x)\sqrt{a-x}] = \frac{(a-3x)dx}{2\sqrt{a-x}}.$

10) $d[(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}] = \frac{x(a^2-3x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

11) $d[(2a^2+3x^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}] = -15x^3\sqrt{a^2-x^2}\,.\,dx.$

12) $d\left(\frac{x}{\sqrt{a-bx^2}}\right) = \frac{a}{\sqrt{(a-bx^2)^3}}\,dx.$

13) $d\left(a^x + \frac{1}{a^x}\right) = d(a^x + a^{-x}) = (a^x - a^{-x})\,\mathrm{l}\,a\,.\,dx.$

14) $d[(x-1)a^x] = a^x[1 + (x-1)\mathrm{l}\,a]dx.$

15) $d(e^x\,.\,x^m) = e^x\,.\,x^{m-1}(x+m)dx.$

16) $d[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)] = e^x\,.\,x^3dx.$

17) $d\left(e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{e^x(2-x^2)dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

18) $d\,\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

19) $d\,\mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)=\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

20) $d\,\mathrm{l}\left(\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=d\left[\mathrm{l}x-\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})\right]$

$$=\frac{dx}{x}-\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

21) $d\,\mathrm{l}\left(\sqrt{\dfrac{3x-4}{3x+4}}\right)=d\left[\dfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(3x-4)-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(3x+4)\right]$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3x-4}-\frac{1}{3x+4}\right)dx=\frac{12dx}{9x^2-16}.$$

22) $d\,\mathrm{l}\left(\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right)=d\left[\dfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(a^2-x^2)-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(a^2+x^2)\right]$

$$=\left(-\frac{x}{a^2-x^2}-\frac{x}{a^2+x^2}\right)dx=-\frac{2a^2xdx}{a^4-x^4}.$$

23) $d\,\mathrm{l}\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)=\dfrac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$.

24) $d\,\mathrm{l}\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\dfrac{2dx}{3(1-\sqrt[3]{x^2})\sqrt[3]{x^2}}$.

25) $d\,\mathrm{l}\left(\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}\right)=d\,\mathrm{l}\left(\dfrac{u}{v}\right)$,

wobei

$$u=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2},\quad v=\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{x(\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^4-x^4}},$$

oder

$$\frac{du}{dx}=-\frac{xv}{\sqrt{a^4-x^4}},\quad \frac{dv}{dx}=+\frac{xu}{\sqrt{a^4-x^4}}$$

ist. Dies giebt

$$d\,\mathrm{l}\left(\frac{u}{v}\right) = d(\mathrm{l}u - \mathrm{l}v) = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

$$= -\frac{xv\,dx}{u\sqrt{a^4 - x^4}} - \frac{xu\,dx}{v\sqrt{a^4 - x^4}} = -\frac{x(v^2 + u^2)dx}{uv\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Nun ist

$$uv = a^2 + x^2 - (a^2 - x^2) = 2x^2,$$

$$u^2 + v^2 = a^2 + x^2 + 2\sqrt{a^4 - x^4} + a^2 - x^2$$
$$+ a^2 + x^2 - 2\sqrt{a^4 - x^4} + a^2 - x^2$$
$$= 4a^2,$$

folglich wird

$$d\,\mathrm{l}\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{4a^2x\,dx}{2x^2\sqrt{a^4 - x^4}} = -\frac{2a^2dx}{x\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

26) $$d\,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt[5]{(x+4)^3}}{\sqrt[4]{(x-1)^5}}\right)$$
$$= d\left[\frac{2}{3}\mathrm{l}(x+2) + \frac{3}{5}\mathrm{l}(x+4) - \frac{5}{4}\mathrm{l}(x-1)\right]$$
$$= \left(\frac{2}{3(x+2)} + \frac{3}{5(x+4)} - \frac{5}{4(x-1)}\right)dx.$$

27) $d\sin(2x + 5) = 2\cos(2x + 5)dx.$

28) $d\cos(mx) = -m\sin(mx)dx.$

29) $d(\sin^2 x) = 2\sin x\cos x\,dx.$

30) $d(\sin^3 x\cos x) = \sin^2 x(3 - 4\sin^2 x)\,dx.$

31) $$d\left(\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sin x}\right) = \left(-\frac{6}{\sin^3 x} + \frac{5}{\sin^2 x}\right)\cos x\,dx$$
$$= \frac{(5\sin x - 6)\cos x\,dx}{\sin^3 x}.$$

32) $$d\left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right) = -\frac{2\sin x\,dx}{(1 - \cos x)^2}.$$

33) $$d\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{5}\left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{5}\right)\right]dx.$$

34) $d\,\mathrm{ctg}(3x) = -3[1 + \mathrm{ctg}^2(3x)]dx.$

35) $$d(\mathrm{tg}^m x) = \frac{m\,\mathrm{tg}^{m-1}x}{\cos^2 x}\,dx = m\,\mathrm{tg}^{m-1}x(1 + \mathrm{tg}^2 x)dx.$$

36) $d(4\mathrm{tg}^3x - 3\mathrm{tg}^2x + 6\mathrm{tg}x) = (12\mathrm{tg}^2x - 6\mathrm{tg}x + 6)(1 + \mathrm{tg}^2x)dx$
$= 6(2\mathrm{tg}^4x - \mathrm{tg}^3x + 3\mathrm{tg}^2x - \mathrm{tg}x + 1)dx.$

37) $d(e^x \cos x) = e^x(\cos x - \sin x)dx.$

38) $d\sin(\mathrm{l}x) = \cos(\mathrm{l}x) \,.\, d(\mathrm{l}x) = \frac{\cos(\mathrm{l}x)}{x}dx.$

39) $d\sin\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) = \cos\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)d\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cos\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx.$

40) $d\mathrm{tg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]d\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$
$= \left[1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]\frac{4dx}{(x+2)^2}.$

41) $d\mathrm{l}(\sqrt{\cos x}) = d(\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\cos x) = \frac{d(\cos x)}{2\cos x} = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x dx.$

42) $d\mathrm{l}\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) = d[\mathrm{l}(1+\cos x) - \mathrm{l}(1-\cos x)]$
$= \frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x} - \frac{d(1-\cos x)}{1-\cos x} = -\frac{2dx}{\sin x}.$

43) $d\mathrm{l}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}d\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \,.\, \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \,.\, d\left(\frac{x}{2}\right)$
$= \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{dx}{\sin x}.$

44) $d\mathrm{l}\left[\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = -\frac{dx}{\sin x}.$

45) $d\mathrm{l}(\sqrt[4]{\sin^3x\cos^3x}) = d\left[\frac{3}{4}\mathrm{l}(\sin x) + \frac{3}{4}\mathrm{l}(\cos x)\right]$
$= \frac{3}{4}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$
$= \frac{3(\cos^2x - \sin^2x)dx}{4\sin x\cos x} = \frac{3}{2}\mathrm{ctg}(2x)\,dx.$

46) $d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \,.\, d(\sin x) = e^{\sin x} \,.\, \cos x dx.$

47) $d(xe^{\cos x}) = e^{\cos x}(1 - x\sin x)dx.$

48) $d e[^{ax} \,.\, \cos(mx)] = e^{ax}[a\cos(mx) - m\sin(mx)]dx.$

49) $d(a^{\mathrm{l}x}) = a^{\mathrm{l}x}\mathrm{l}a \,.\, d(\mathrm{l}x) = \dfrac{a^{\mathrm{l}x}\mathrm{l}a}{x}\,dx.$

50) $d\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

51) $d\,\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\,d\left(\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{a\,dx}{a^2+x^2}.$

52) $d\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x}{a+x}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{a+x}}\cdot d\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}$

$$= \frac{a+x}{a+2x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+x}{x}}\cdot d\left(\frac{x}{a+x}\right)$$

$$= \frac{(a+x)\sqrt{a+x}}{2(a+2x)\sqrt{x}}\cdot\frac{a\,dx}{(a+x)^2} = \frac{a\,dx}{2(a+2x)\sqrt{x(a+x)}}.$$

53) $d\left[a\,.\arccos\left(\dfrac{a-x}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2}\right] =$

$$-\frac{a}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a-x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{a-x}{a}\right) - \frac{d(2ax-x^2)}{2\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= +\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} - \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

54) $y = x^x,\quad \mathrm{l}y = x\,\mathrm{l}x,\quad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1 + \mathrm{l}x,$

$d(x^x) = x^x(1+\mathrm{l}x)dx.$

55) $y = x^{\sin x},$

$\mathrm{l}y = \sin x\,.\,\mathrm{l}x,\quad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \cos x\,.\,\mathrm{l}x + \dfrac{\sin x}{x},$

$d(x^{\sin x}) = x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x\,.\,\mathrm{l}x\right)dx.$

56) $y = \sqrt[x]{x},$

$\mathrm{l}y = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{l}x,\quad \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\mathrm{l}x}{x^2},$

$d\sqrt[x]{x} = \sqrt[x]{x}\cdot\dfrac{1-\mathrm{l}x}{x^2}\,dx.$

57) $y = (x^x)^x = x^{(x^2)}$,

$$\mathrm{l}\, y = x^2 . \mathrm{l}\, x, \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x} + 2x . \mathrm{l} x = x(1 + 2\mathrm{l}\, x),$$

$$d[(x^x)^x] = x^{(x^2)} . x(1 + 2\mathrm{l}\, x)dx = x^{x^2+1}(1 + 2\mathrm{l}\, x)dx.$$

58) $y = x^{(x^x)}$,

$$\mathrm{l} y = x^x . \mathrm{l}\, x, \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x(1 + \mathrm{l}\, x)\mathrm{l}\, x + \frac{x^x}{x}$$

nach Aufgabe 54, folglich wird

$$d\left[x^{(x^x)}\right] = x^{(x^x)} . x^x[(1 + \mathrm{l}\, x)\mathrm{l}\, x + x^{-1}]\, dx$$

$$= x^{x^x+x}[(1 + \mathrm{l}\, x)\mathrm{l}\, x + x^{-1}]dx.$$

59) $y = (\cos x)^{\sin x}$,

$$\mathrm{l} y = \sin x \,\mathrm{l}(\cos x), \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \,\mathrm{l}(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$d[(\cos x)^{\sin x}] = (\cos x)^{-1+\sin x}[\cos^2 x \,\mathrm{l}\,(\cos x) - \sin^2 x].$$

60) $y = \arcsin\left[\mathrm{tg}\left(\frac{a - x}{a + x}\right)\right]$,

$$\sin y = \mathrm{tg}\, u, \quad \text{wo} \quad u = \frac{a - x}{a + x},$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-2a}{(a + x)^2},$$

$$\cos^2 y = 1 - \mathrm{tg}^2 u = \frac{\cos^2 u - \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos(2u)}{\cos^2 u},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos u \sqrt{\cos(2u)}} \cdot \frac{-2a}{(a + x)^2},$$

$$d\arcsin\left[\mathrm{tg}\left(\frac{a - x}{a + x}\right)\right] =$$

$$\frac{-2a dx}{(a + x)^2 \cos\left(\frac{a - x}{a + x}\right)\sqrt{\cos\left(\frac{2(a - x)}{a + x}\right)}}.$$

III. Abschnitt.

Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung.

§ 26.

Ermittelung von $f^{(n)}(x)$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 44—46.)

Wie schon früher gezeigt wurde, ist die Ableitung einer Function $f(x)$ im Allgemeinen wieder eine Function von x. Es wurde deshalb auch das Zeichen $f'(x)$ eingeführt, so dass

$$(1.) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

war.

Man kann daher $f'(x)$ ebenso behandeln wie $f(x)$ selbst und untersuchen, ob $f'(x)$ eine Ableitung besitzt. Ist dies der Fall, so bezeichnet man die Ableitung von $f'(x)$ mit $f''(x)$ und nennt sie die „*zweite Ableitung*" von $f(x)$. Es ist also

$$(2.) \qquad \frac{df'(x)}{dx} = f''(x).$$

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält durch wiederholte Differentiation der Reihe nach die Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} \dfrac{df''(x)}{dx} = f'''(x), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x). \end{cases}$$

Dabei heisst $f^{(n)}(x)$ die n^{te} *Ableitung* der Function $f(x)$.

Es ist nun auch von Interesse, zu untersuchen, nach welchem Gesetze die höheren Ableitungen von $f(x)$ aus $f(x)$

selbst gebildet werden können, ohne dass man die dazwischen liegenden Ableitungen benutzt.

Der erste Differenzen-Quotient war

$$(4.)\quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \varphi(x).$$

Vertauscht man in diesem Ausdrucke x mit $x + \Delta x$ unter der Voraussetzung, dass sich dabei Δx gar nicht ändert, so erhält man

$$(5.)\quad \frac{f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)}{\Delta x} = \varphi(x+\Delta x).$$

Indem man die Gleichung (4.) von der Gleichung (5.) subtrahirt und die Differenz durch Δx dividirt, ergiebt sich

$$(6.)\quad \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}.$$

Lässt man jetzt Δx verschwindend klein werden, so wird

$$\lim \varphi(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \quad \lim \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x),$$

folglich ist

$$(7.)\quad f''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(8.)\quad f'''(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x^3},$$

. . . .

$$(9.)\quad f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{1}{\Delta x^n}\Big\{f(x+n\Delta x) - \binom{n}{1} f[x+(n-1)\Delta x]$$

$$+ \binom{n}{2} f[x+(n-2)\Delta x] - + \cdots \pm \binom{n}{1} f(x+\Delta x) \mp f(x)\Big\}.$$

Der Beweis dieser Formel kann durch den Schluss von n auf $n+1$ geführt werden, möge aber hier übergangen werden, weil für das Folgende nur der Fall, wo $n = 2$ ist, in Betracht kommen wird.

Man kann auch von dem *Differentiale*

(10.) $$dy = f'(x)dx$$

ausgehen und das Differential von dy bilden.

Dann bezeichnet man dieses neue Differential $d(dy)$ mit d^2y und nennt es das „*zweite Differential* von y". Bei der Bildung von d^2y muss man aber beachten, dass in Gleichung (10.) die unendlich kleine Grösse dx einen von x *unabhängigen* Werth hat und deshalb bei der nochmaligen Differentiation als eine *Constante* anzusehen ist. Deshalb wird

(11.) $$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx;$$

nach Formel Nr. 34 der Tabelle ist aber

$$d[f'(x)] = f''(x)dx,$$

folglich erhält man

(12.) $$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Hierbei soll dx^2 immer mit $(dx)^2$ gleichbedeutend sein und ist wohl zu unterscheiden von $d(x^2) = 2xdx$.

Aus Gleichung (12.) folgt jetzt auch, dass

(12a.) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

ist.

Unter dem *dritten Differential* von y versteht man das Differential von d^2y, also $d(d^2y)$ und bezeichnet es mit d^3y. Deshalb wird

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2] = d[f''(x)]dx^2,$$

oder

(13.) $$d^3y = f'''(x)dx^3.$$

Hier ist dx^3 gleichbedeutend mit $(dx)^3$ und wohl zu unterscheiden von $d(x^3) = 3x^2dx$.

Aus Gleichung (13.) folgt wieder

(13a.) $$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet

(14.) $$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x), \tag{14a.}$$

wobei dx^n immer mit $(dx)^n$ gleichbedeutend sein soll.

§ 27.

Uebungs-Beispiele.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 47 und 48)

Aufgabe 1. Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = x^4$$

bilden.

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x^3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 4 \,.\, 3x^2 = 12x^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 4 \,.\, 3 \,.\, 2x = 24x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4)}(x) = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = f^{(5)}(x) = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = 3x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 11x^2 - 6x + 9$$

bilden.

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 15x^4 - 28x^3 + 24x^2 + 22x - 6,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 60x^3 - 84x^2 + 48x + 22,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 180x^2 - 168x + 48,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f^{(4}(x) = 360x - 168,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = f^{(5)}(x) = 360,$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = f^{(6)}(x) = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll die höheren Differentiale von

$$y = f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

bilden.

Auflösung.

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} dx,$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx^3,$$

$$d^4y = f^{(4)}(x)dx^4 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^ny = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} - 1\right)\left(\frac{5}{2} - 2\right)\cdots\left(\frac{5}{2} - n + 1\right) x^{\frac{5}{2}-n} dx^n.$$

Aufgabe 4. Man soll die höheren Differentiale von

$$y = f(x) = x^m$$

bilden.

Auflösung.

$$dy = f'(x)dx = mx^{m-1}dx,$$

$$d^2y = f''(x)dx^2 = m(m-1)x^{m-2}dx^2,$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}dx^n.$$

Ist hierbei m eine positive ganze Zahl, so ist also $f^{(m)}(x)$ eine Constante und die höheren Ableitungen werden alle gleich 0; in allen übrigen Fällen aber kann man die Differentiation bis in's Unendliche fortsetzen.

Aufgabe 5. Man soll die höheren Ableitungen von

$$f(x) = e^x$$

bilden.

Auflösung.

$$f'(x) = e^x,$$
$$f''(x) = e^x,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Die Ableitungen der Exponential-Function e^x sind also *sämmtlich* wieder gleich e^x.

Aufgabe 6. Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = a^x$$

bilden.

Auflösung.

$$f'(x) = a^x \,.\, \mathrm{l}\, a, \quad f''(x) = a^x \,.\, (\mathrm{l}\, a)^2, \ldots f^{(n)}(x) = a^x \,.\, (\mathrm{l}\, a)^n.$$

Für $a = e$ geht diese Aufgabe in die vorhergehende über.

Aufgabe 7. Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \mathrm{l}\, x$$

bilden.

Auflösung.

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1},$$
$$f''(x) = -1 \,.\, x^{-2},$$
$$f'''(x) = +1 \,.\, 2 \,.\, x^{-3},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \,.\, (n-1)!\, x^{-n}.$$

Die Richtigkeit der letzten Formel wird durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen.

Aufgabe 8. Man soll die höheren Ableitungen von

$$y = f(x) = \sin x$$

bilden.

Auflösung. Nach Formel Nr. 28 der Tabelle ist

$$f'(x) = \varphi(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\,\psi(x),$$

folglich wird

$$f''(x) = \varphi(x)\,\psi''(x) + 2\varphi'(x)\,\psi'(x) + \varphi''(x)\,\psi(x),$$

$$f'''(x) = \varphi(x)\psi'''(x) + 3\varphi'(x)\,\psi''(x) + 3\varphi''(x)\,\psi'(x) + \varphi'''(x)\,\psi(x),$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x)\,\psi^{(n)}(x) + \binom{n}{1}\varphi'(x)\,\psi^{(n-1}(x) + \binom{n}{2}\varphi''(x)\psi^{(n-2)}(x)$$

$$+ \cdots + \binom{n}{1}\varphi^{(n-1)}(x)\,\psi'(x) + \varphi^{(n)}(x)\,\psi(x).$$

Die Richtigkeit dieser letzten Formel wird durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen.

IV. Abschnitt.

Herleitung und Anwendungen der Taylor'schen und der Mac-Laurin'schen Reihe.

§ 28.

Entwickelung einer ganzen rationalen Function $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h.

Ehe die *Taylor*'sche Reihe in ihrer allgemeinen Form hergeleitet wird, möge ein besonderer Fall behandelt werden, welcher dazu dienen soll, die später angewendeten Methoden zu erläutern.

Es sei

$$f(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, \tag{1.}$$

also, wenn man mit h eine beliebige zweite Veränderliche bezeichnet,

$$f(x+h) = a(x+h)^4 + a_1(x+h)^3 + a_2(x+h)^2 + a_3(x+h) + a_4, \tag{2.}$$

dann folgt aus Gleichung (2.) durch Auflösung der Klammern und durch Vereinigung aller Glieder, die mit gleichen Potenzen von h multiplicirt sind,

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & (ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4) \\ & + (4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3)h \\ & + (6ax^2 + 3a_1x + a_2)h^2 \\ & + (4ax + a_1)h^3 \\ & + ah^4. \end{aligned} \tag{3.}$$

Dieses Resultat hätte man schneller auf folgendem Wege finden können.

Man weiss, $f(x+h)$ lässt sich auf die Form

$$f(x+h) = F(x) + F_1(x) \,.\, h + F_2(x) \,.\, h^2 + F_3(x) \,.\, h^3 + F_4(x) \,.\, h^4 \tag{4.}$$

bringen, wobei die Coefficienten $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ Functionen von x sind. Um diese zu bestimmen, betrachte man h als einzige Veränderliche und differentiire beide Seiten der Gleichung (4.).

Nach Formel Nr. 35 der Tabelle wird

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

oder, wenn man die unabhängige Veränderliche mit h bezeichnet,

$$\frac{df(u)}{dh} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dh} = f'(u) \cdot \frac{du}{dh}.$$

Setzt man für den vorliegenden Fall

$$u = x + h, \quad \text{also} \quad \frac{du}{dh} = 1,$$

so findet man, dass

$$(5.) \qquad \frac{df(x+h)}{dh} = \frac{df(x+h)}{d(x+h)} \cdot \frac{d(x+h)}{dh} = f'(x+h)$$

ist. Man erhält daher

$$(6.) \quad f'(x+h) = 1 \,.\, F_1(x) + 2F_2(x) \,.\, h + 3F_3(x) \,.\, h^2 + 4F_4(x) \,.\, h^3,$$

und hieraus durch wiederholte Differentiation

$$(7.) \quad f''(x+h) = 1 \,.\, 2F_2(x) + 2 \,.\, 3F_3(x) \,.\, h + 3 \,.\, 4F_4(x) \,.\, h^2,$$

$$(8.) \quad f'''(x+h) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3F_3(x) + 2 \,.\, 3 \,.\, 4F_4(x) \,.\, h,$$

$$(9.) \quad f^{(4)}(x+h) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4F_4(x).$$

Setzt man in den Gleichungen (4.) und (6.) bis (9.) die Veränderliche h gleich 0, so findet man

$$f(x) = F(x), \qquad \text{oder } F(x) = f(x) = ax^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

$$f'(x) = 1 \,.\, F_1(x), \qquad \text{,,} \quad F_1(x) = \frac{f'(x)}{1!} = 4ax^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3,$$

$$f''(x) = 1 \,.\, 2F_2(x), \qquad \text{,,} \quad F_2(x) = \frac{f''(x)}{2!} = 6ax^2 + 3a_1x + a_2,$$

$$f'''(x) = 1.2.3F_3(x), \qquad \text{,,} \quad F_3(x) = \frac{f'''(x)}{3!} = 4ax + a_1,$$

$$f^{(4)}(x) = 1.2.3.4F_4(x), \qquad \text{,,} \quad F_4(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!} = a.$$

Setzt man diese Werthe von $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$ in die Gleichung (4.) ein, so erhält man in der That genau dasselbe Resultat wie in Gleichung (3.).

Es wird also

$$(3a.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4.$$

Diese Entwickelungs-Methode, welche hier nur für eine ganze rationale Function 4ten Grades ausgeführt wurde, lässt sich ohne Weiteres auf *jede ganze rationale* Function übertragen. Es sei jetzt also ganz allgemein

$$(10.)\quad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

und deshalb

$$(11.)\quad f(x+h) = a(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + a_2(x+h)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x+h) + a_n;$$

dann weiss man, dass sich $f(x+h)$ durch Auflösung der Klammern und durch Vereinigung aller Glieder, welche mit derselben Potenz von h multiplicirt sind, auf die Form

$$(12.)\quad f(x+h) = F(x) + F_1(x).h + F_2(x).h^2 + F_3(x).h^3 + F_4(x).h^4 + \cdots + F_{n-1}(x).h^{n-1} + F_n(x).h^n$$

bringen lässt, wobei die Coefficienten

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots F_{n-1}(x),\ F_n(x)$$

noch Functionen von x sind. Um diese zu bestimmen, betrachte man wieder h als einzige Veränderliche und differentiire beide Seiten der Gleichung (12.) zu wiederholten Malen nach h. Dadurch erhält man der Reihe nach die Gleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} f'(x+h) = 1.F_1(x) + 2F_2(x).h + 3F_3(x).h^2 + 4F_4(x).h^3 \\ \qquad + \cdots + (n-1)F_{n-1}(x).h^{n-2} + nF_n(x).h^{n-1}, \\ f''(x+h) = 1.2F_2(x) + 2.3F_3(x).h + 3.4F_4(x).h^2 \\ \qquad + \cdots + (n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-3} + (n-1)nF_n(x).h^{n-2}, \\ f'''(x+h) = 1.2.3F_3(x) + 2.3.4F_4(x).h + \cdots \\ \qquad + (n-3)(n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-4} + (n-2)(n-1)nF_n(x).h^{n-3}, \\ f^{(4)}(x+h) = 1.2.3.4F_4(x) + \cdots \\ \qquad + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)F_{n-1}(x).h^{n-5} \\ \qquad + (n-3)(n-2)(n-1)nF_n(x)h^{n-4}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{(n-1)}(x+h) = 1.2.3\ldots(n-1)F_{n-1}(x) + 2.3.4\ldots(n-1)nF_n(x).h, \\ f^{(n)}(x+h) = 1.2.3\ldots(n-1)n\,F_n(x). \end{cases}$$

Setzt man jetzt in den Gleichungen (12.) und (13.) die Veränderliche h gleich 0, so findet man

$$(14.)\quad \begin{cases} f(x) = F(x), & \text{oder}\quad F(x) = f(x), \\ f'(x) = 1\,.\,F_1(x), & \text{„}\quad F_1(x) = \dfrac{f'(x)}{1!}, \\ f''(x) = 1\,.\,2F_2(x), & \text{„}\quad F_2(x) = \dfrac{f''(x)}{2!}, \\ f'''(x) = 1\,.\,2\,.\,3F_3(x), & \text{„}\quad F_3(x) = \dfrac{f'''(x)}{3}, \\ f^{(4)}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4F_4(x), & \text{„}\quad F_4(x) = \dfrac{f^{(4)}(x)}{4!}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ f^{(n-1)}(x) = (n-1)!\,F_{n-1}(x), & \text{„}\quad F_{n-1}(x) = \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}, \\ f^{(n)}(x) = n!\,F_n(x), & \text{„}\quad F_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}. \end{cases}$$

Die Gleichung (12.) geht daher über in

$$(15.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch auf folgendem Wege. Nach Gleichung (5.) wird

$$\frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

In derselben Weise findet man, indem man h mit x vertauscht,

$$\frac{df(x+h)}{dx} = f'(x+h),$$

folglich ist

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{df(x+h)}{dh} = f'(x+h).$$

Man wird also mit einander übereinstimmende Ausdrücke erhalten, gleichviel ob man die rechte Seite von Gleichung (12.) nach x oder nach h differentiirt. Dies giebt

$$(16.)\quad F'(x) + F'_1(x) \cdot h + F'_2(x) \cdot h^2 + F'_3(x) \cdot h^3 + \cdots \\ + F'_{n-1}(x) \cdot h^{n-1} + F'_n(x) \cdot h^n = \\ 1 \cdot F_1(x) + 2F_2(x) \cdot h + 3F_3(x)h^2 + 4F_4(x)h^3 + \cdots + nF_n(x) \cdot h^{n-1}.$$

Für $h = 0$ findet man aus Gleichung (12.)

$$(17.)\quad F(x) = f(x)$$

und aus Gleichung (16.)

$$(18.)\quad F'(x) = 1 \cdot F_1(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \text{ oder } F_1(x) = \frac{f'(x)}{1!}.$$

Wenn man jetzt in Gleichung (16.) $F'(x)$ gegen $1 \cdot F_1(x)$ fortheb t und beide Seiten der Gleichung durch h dividirt, so erhält man

$$(16a.)\quad F'_1(x) + F'_2(x) \cdot h + F'_3(x) \cdot h^2 + \cdots \\ + F'_{n-1}(x) \cdot h^{n-2} + F'_n(x) \cdot h^{n-1} = \\ 2F_2(x) + 3F_3(x) \cdot h + 4F_4(x) \cdot h^2 + \cdots + nF_n(x) \cdot h^{n-2}.$$

Hieraus folgt, wenn man wieder $h = 0$ setzt,

$$F'_1(x) = 2F_2(x) = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x), \quad \text{oder} \quad F_2(x) = \frac{f''(x)}{2!}.$$

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, findet man der Reihe nach die Gleichungen

$$F'_2(x) = 3F_3(x), \quad \text{oder} \quad F_3(x) = \frac{f'''(x)}{3!},$$

$$F'_3(x) = 4F_4(x), \quad \text{,,} \quad F_4(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!},$$

. . . .

$$F'_{n-1}(x) = nF_n(x), \quad \text{,,} \quad F_n(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

§ 29.

Anwendung auf den binomischen Lehrsatz für positive, ganzzahlige Exponenten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 10.)

Wie wichtig die oben angegebene Entwickelung ist, kann man schon aus einem sehr einfachen Falle ersehen. Es sei nämlich

$$(1.)\qquad f(x) = x^n,$$

also

$$(2.)\qquad f(x+h) = (x+h)^n,$$

wobei n eine positive ganze Zahl sein soll. Nun ist nach Gleichung (15.) des vorhergehenden Paragraphen

$$(3.)\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

In diesem Falle ist aber

$$f(x) = x^n,\quad f'(x) = nx^{n-1},\quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \ldots f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1 = n!$$

folglich geht Gleichung (3.) über in

$$(4.)\quad (x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}h^n$$

$$= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \cdots + h^n.$$

Setzt man noch

$$x = a,\quad h = b,\quad n = m,$$

so erhält man den binomischen Lehrsatz, nämlich

$$(5.)\quad (a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots + b^m,$$

eine Formel, welche schon in § 9, aber auf andere Weise, hergeleitet wurde.

§ 30.

Verallgemeinerung der gegebenen Entwickelungs-Methode.

Es ist nun die Frage, ob und in welcher Weise die hergeleitete Entwickelung einer *ganzen rationalen* Function $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h auch auf andere Functionen übertragen werden kann.

Ohne jede Aenderung ist eine solche Uebertragung nicht möglich, denn es gilt der Satz: *Ist*

$$(1.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

so ist $f(x)$ eine ganze rationale Function n^{ten} Grades.

Beweis. Aus Gleichung (1.) folgt für $x=0$

$$f(h)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+\frac{f'''(0)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n$$
$$=A+A_1h+A_2h^2+A_3h^3+\cdots+A_nh^n,$$

oder, wenn man $h=x$ setzt,

$$(2.)\quad f(x)=A+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_nx^n.$$

Und doch liegt eine solche Verallgemeinerung sehr nahe, denn man kann dieselben Schlüsse, welche in § 28 richtig waren, auch bei jeder anderen Function $f(x+h)$ anwenden, von der man weiss, dass sie sich nach steigenden Potenzen von h entwickeln lässt, dass sie sich also auf die Form

$$(3.)\quad f(x+h)=F(x)+F_1(x).h+F_2(x).h^2+F_3(x).h^3+F_4(x).h^4+\cdots$$

bringen lässt. Man findet dann nämlich, indem man beide Seiten der Gleichung (3.) zu wiederholten Malen nach h differentiirt*), der Reihe nach die Gleichungen

---

*) Dabei ist allerdings die Voraussetzung gemacht, dass die Summe auf der rechten Seite differentiirt wird, indem man jedes Glied einzeln differentiirt. Enthielte die Summe nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern, so wäre diese Voraussetzung ohne Weiteres richtig; enthält die Summe aber unendlich viele Glieder, so muss man erst beweisen, dass diese Voraussetzung gilt.

$$(4.)\quad \begin{cases} f'(x+h)=1.F_1(x)+2F_2(x).h+3F_3(x).h^2+4F_4(x).h^3+\cdots, \\ f''(x+h)=1.2F_2(x)+2.3F_3(x).h+3.4F_4(x)h^2+\cdots, \\ f'''(x+h)=1.2.3F_3(x)+2.3.4F_4(x)h+\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Setzt man dann in den Gleichungen (3.) und (4.) die Veränderliche h gleich 0, so findet man genau so wie damals

$$(5.)\quad F(x)=f(x),\ F_1(x)=\frac{f'(x)}{1!},\ F_2(x)=\frac{f''(x)}{2!},\ F_3(x)=\frac{f'''(x)}{3!},\ldots,$$

so dass Gleichung (3.) übergeht in

$$(6.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4+\cdots.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze ist es aber nicht möglich, dass diese Reihe an einer Stelle, z. B. beim $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede, abbricht; sie kann nur, wie gezeigt werden soll, unter gewissen Bedingungen richtig sein, wenn man sie bis in's Unendliche fortsetzt.

Da $f(x+h)$ von

$$f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

verschieden ist, wenn $f(x)$ keine *ganze rationale* Function ist, so möge der Unterschied zwischen beiden Grössen mit R bezeichnet werden. Es sei also R erklärt durch die Gleichung

$$(7.)\quad R=f(x+h)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}h-\frac{f''(x)}{2!}h^2-\cdots-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n,$$

oder

$$(7a.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R.$$

Wird nun R für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein, so darf man R vernachlässigen, so dass dann die Gleichung (7a.) auch noch in dem Falle, wo $f(x)$ keine ganze rationale Function ist, sehr brauchbare Resultate liefert.

Man nennt die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (7a.) die *Taylor*'sche Reihe und R das *Restglied* der *Taylor*schen Reihe.

Wie nothwendig die Untersuchung dieses Restgliedes R ist, soll zunächst bei einem einfachen Beispiele gezeigt werden.

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, \tag{8.}$$

also

$$f(x + h) = \frac{1}{x + h} \tag{9.}$$

und

$$\begin{cases} f'(x) = -1 \,.\, x^{-2}, & f''(x) = 1 \,.\, 2x^{-3}, \\ f'''(x) = -1 \,.\, 2 \,.\, 3x^{-4}, \ldots & f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}. \end{cases} \tag{10.}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (7a.) ein, so erhält man

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} + - \cdots + (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}} + R. \tag{11.}$$

Für $x = 2$, $h = -1$ giebt dies z. B.

$$\frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} + R.$$

Hier wird, wie man ohne Weiteres erkennt,

$$R = \frac{1}{2^{n+1}},$$

also beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n.

In diesem Falle würde daher die *Taylor*'sche Reihe anwendbar sein. Setzt man aber

$$x = 2, \quad h = -4,$$

so findet man aus Gleichung (11.)

$$\frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} + R.$$

Jetzt ist

$$R = -2^n$$

und wird, vom Vorzeichen abgesehen, sogar beliebig gross, wenn n hinreichend gross ist. Man darf also R *nicht* vernachlässigen, d. h. man darf in diesem Falle die Entwickelung nach der *Taylor*'schen Reihe *nicht* anwenden.

Man kann in dem vorliegenden Beispiele das Restglied R auch für beliebige Werthe von x und h sehr leicht bestimmen. Aus Gleichung (11.) folgt nämlich

$$(12.)\quad R = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} + \frac{h}{x^2} - \frac{h^2}{x^3} + \frac{h^3}{x^4} - + \cdots - (-1)^n \frac{h^n}{x^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\left[1 + \frac{-h}{x} + \left(\frac{-h}{x}\right)^2 + \left(\frac{-h}{x}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{-h}{x}\right)^n\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine geometrische Progression, deren Summe man nach Formel Nr. 11 der Tabelle bilden kann. Da nämlich

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p},$$

so erhält man in diesem Falle, in welchem p gleich $-\frac{h}{x}$ ist,

$$(13.)\qquad \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} = \frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{1 + \frac{h}{x}} = x\,\frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h}.$$

Daraus folgt

$$(14.)\qquad R = \frac{1}{x+h} - \frac{1 - \left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h} = \frac{\left(\frac{-h}{x}\right)^{n+1}}{x + h}.$$

Nun wird nach früheren Sätzen (vergl. § 9) die Potenz eines *ächten* Bruches ***beliebig klein*** und die eines unächten Bruches ***beliebig gross***, wenn man den Exponenten hinreichend gross macht, folglich wird hier R nur dann ***beliebig klein***, wenn, abgesehen vom Vorzeichen, h kleiner als x ist.

Bei diesem Beispiele wird also die *Taylor*'sche Reihe nur anwendbar sein, wenn

$$|h| < |x|,$$

wobei man unter $|h|$ und $|x|$ die ***absoluten Beträge*** (d. h. die Zahlenwerthe, abgesehen vom Vorzeichen) von h und x versteht.

So leicht wie in diesem Beispiele ist im Allgemeinen die Berechnung des Restgliedes R nicht. Man braucht aber den Werth von R auch gar nicht, sondern braucht nur

zu wissen, ob R für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein wird.

Diese Untersuchung soll nun in dem folgenden Paragraphen ausgeführt werden.

§ 31.

Bestimmung des Restgliedes der Taylor'schen Reihe nach Lagrange.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 49, 49a, 50 und 50a.)

Es war nach den Gleichungen (7.) und (7a.) in § 30

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R, \tag{1.}$$

oder

$$R = f(x+h) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}h - \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n. \tag{2.}$$

Setzt man hierbei

$$x + h = b, \quad \text{also} \quad h = b - x, \tag{3.}$$

so geht Gleichung (2.) über in

$$R = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n. \tag{4.}$$

Aus dieser Darstellung erkennt man, dass R eine Function von x ist, welche für $x = b$ *verschwindet*, dass also

$$R = 0 \quad \text{für} \quad x = b. \tag{4a.}$$

Wenn man unter der Voraussetzung, dass b bei dieser folgenden Untersuchung einen *constanten* Werth behält, beide Seiten der Gleichung (4.) differentiirt, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{dR}{dx} = -f'(x) & \\
& -\frac{f''(x)}{1!}(b-x) + f'(x) \\
& -\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \\
& -\frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3 + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1},
\end{aligned}
$$

oder

$$
\frac{dR}{dx} = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \tag{5.}
$$

Nun war in § 13 der Satz bewiesen worden: „*Eine Function $y = F(x)$ nimmt gleichzeitig mit x zu für alle Werthe von x, für welche $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, und die Function nimmt ab, während x zunimmt, für alle Werthe von x, für welche $\frac{dy}{dx}$ negativ ist.*“

Dieser Satz möge hier zunächst unter der Voraussetzung angewendet werden, dass x kleiner als b ist und alle Werthe von einem Anfangswerthe a bis zu dem Endwerthe b durchläuft, so dass

$$a \leqq x \leqq b$$

ist. Ferner möge vorausgesetzt werden, dass die Functionen

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x)$$

in diesem Intervalle sämmtlich *stetig* sind.

Der kleinste Werth, welchen $f^{(n+1)}(x)$ in diesem Intervalle wirklich annimmt, heisse K, und der grösste heisse G; es sei also

$$f^{(n+1)}(x_1) = K \quad \text{und} \quad f^{(n+1)}(x_2) = G, \tag{6.}$$

wobei

$$a \leqq x_1 \leqq b \quad \text{und} \quad a \leqq x_2 \leqq b$$

ist. K und G sind dann *constante* Grössen, und es wird für alle hier in Betracht kommenden Werthe von x

$$K - f^{(n+1)}(x) \leqq 0, \quad G - f^{(n+1)}(x) \geqq 0. \tag{7.}$$

Nun wird mit Rücksicht auf Gleichung (5.)

$$\frac{dR}{dx} - \frac{K}{(n+1)!}\frac{d[(b-x)^{n+1}]}{dx} = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{K}{n!}(b-x)^n,$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K\right] = \frac{(b-x)^n}{n!}[K - f^{(n+1)}(x)]^{*)}. \tag{8.}$$

In derselben Weise findet man

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G\right] = \frac{(b-x)^n}{n!}[G - f^{(n+1)}(x)]. \tag{8a.}$$

Dabei ist nach Voraussetzung $b - x$ und deshalb auch $\frac{(b-x)^n}{n!} \geqq 0$; daher folgt aus den Ungleichungen (7.), dass

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K\right] \leqq 0, \quad \frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G\right] \geqq 0.$$

Wächst also x von a bis b, so muss nach dem oben angeführten Satze

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K \text{ beständig } \textit{abnehmen},$$

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G \text{ beständig } \textit{zunehmen};$$

d. h. die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K$ erhält für $x = b$ ihren *kleinsten*, und die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G$ erhält für $x = b$ ihren *grössten* Werth, wenn x das Intervall von a bis b durchläuft. Dieser kleinste Werth von $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K$ ist aber

*) Um Platz zu sparen, schreibt man hier und in ähnlichen Fällen

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)}K\right] \text{ statt } \frac{d\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K\right]}{dx}.$$

nach Gleichung (4a.) gleich 0, folglich müssen die übrigen Werthe grösser als 0 sein, so dass man erhält

$$(9.)\quad R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K \geqq 0, \quad \text{oder} \quad R \geqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K.$$

Ebenso ist dieser grösste Werth von $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G$ nach Gleichung (4a.) gleich 0, folglich müssen die übrigen Werthe *kleiner* als 0 sein, so dass man erhält

$$(10.)\quad R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G \leqq 0, \quad \text{oder} \quad R \leqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G.$$

Die beiden Ungleichungen (9.) und (10.) kann man vereinigen, indem man schreibt

$$(11.)\qquad \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K \leqq R \leqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G.$$

Erklärt man jetzt die Grösse M durch die Gleichung

$$(12.)\qquad M = \frac{(n+1)!}{(b-x)^{n+1}}R,$$

so wird

$$(13.)\qquad R = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}M,$$

und die Ungleichungen (11.) gehen über in

$$(14.)\qquad K \leqq M \leqq G,$$

d. h. M ist ein *Mittelwerth* zwischen K und G.

Aehnliche Schlüsse gelten, wenn

$$b \leqq x \leqq a$$

ist, nur muss man dann zwei Fälle unterscheiden, jenachdem n *gerade* oder *ungerade* ist.

Weil für *gerades* n auch hier $(b-x)^n$ *positiv* ist, so gelten in gleicher Weise wie vorhin die Ungleichungen (8.), nämlich

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K\right] = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[K - f^{(n+1)}(x)\right] \leqq 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G\right] = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[G - f^{(n+1)}(x)\right] \geqq 0.$$

Wächst also x von b bis a, so muss

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K \text{ beständig } \textit{abnehmen},$$

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G \text{ beständig } \textit{zunehmen};$$

d. h. wenn x das Intervall von b bis a durchläuft, so erhält die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K$ für $x = b$ ihren *grössten* Werth, nämlich den Werth 0, und die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G$ erhält ihren *kleinsten* Werth, der ebenfalls gleich 0 ist. Daraus folgt

$$\text{(15.)} \quad \begin{cases} R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K \leqq 0, & \text{oder} \quad R \leqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K, \\ R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G \geqq 0, & \text{oder} \quad R \geqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G, \end{cases}$$

also

$$\text{(16.)} \quad \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K \geqq R \geqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G.$$

Setzt man wieder wie in Gleichung (13.)

$$R = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} M,$$

so findet man auch hier

$$K \leqq M \leqq G.$$

Ist dagegen n *ungerade*, so wird $(b-x)^n$ *negativ*; die Ungleichungen (8.) gelten dann nicht mehr, es wird vielmehr

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K\right] = \frac{(b-x)^n}{n!} [K - f^{(n+1)}(x)] \geqq 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G\right] = \frac{(b-x)^n}{n!} [G - f^{(n+1)}(x)] \leqq 0.$$

Wächst also x von b bis a, so muss jetzt

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K \text{ beständig } \textit{zunehmen},$$

$$R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} G \text{ beständig } \textit{abnehmen};$$

d. h. wenn x das Intervall von b bis a durchläuft, so erhält die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K$ für $x = b$ ihren *kleinsten* Werth, nämlich den Werth 0, und die Differenz $R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G$ erhält ihren *grössten* Werth, der ebenfalls gleich 0 ist. Daraus folgt

$$(17.)\quad \begin{cases} R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K \geqq 0, & \text{oder} \quad R \geqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K, \\ R - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G \leqq 0, & \text{oder} \quad R \leqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G, \end{cases}$$

also

$$(18.)\quad \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}K \leqq R \leqq \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}G.$$

Setzt man in den Ungleichungen (18.) wieder in Uebereinstimmung mit Gleichung (13.)

$$R = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}M,$$

so findet man auch in diesem Falle

$$K \leqq M \leqq G,$$

d. h. die Gleichung (13.) und die Ungleichungen (14.) gelten, gleichviel ob

$$a \leqq x \leqq b, \quad \text{oder ob} \quad b \leqq x \leqq a$$

ist.

Wenn man für K und G ihre Werthe einsetzt, so kann man die Ungleichungen (14.) auch auf die Form

$$(14a.)\quad f^{(n+1)}(x_1) \leqq M \leqq f^{(n+1)}(x_2)$$

bringen.

Nun war in § 8 der Satz bewiesen worden: „*Ist die Function $f(x)$ für alle Werthe von x zwischen x_1 und x_2 stetig, so wird $f(x)$ jeden Werth zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ mindestens einmal annehmen, wenn x alle Werthe zwischen x_1 und x_2 durchläuft.*"

Dieser Satz möge auf den vorliegenden Fall angewendet werden, in welchem aber die Function nicht $f(x)$, sondern $f^{(n+1)}(x)$ heisst. Da der Mittelwerth M zwischen $f^{(n+1)}(x_1)$ und $f^{(n+1)}(x_2)$

liegt, so muss es zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Werth von x geben, er heisse ξ, für welchen $f^{(n+1)}(x)$ gleich M wird. Dies giebt

$$f^{(n+1)}(\xi) = M. \tag{19.}$$

Ist zunächst $a < b$ und $x_1 < x_2$, so erhält man

$$a \leqq x_1 \leqq \xi \leqq x_2 \leqq b;$$

ist $a < b$ und $x_2 < x_1$, so erhält man

$$a \leqq x_2 \leqq \xi \leqq x_1 \leqq b;$$

in beiden Fällen wird also

$$a \leqq \xi \leqq b. \tag{20.}$$

Ist dagegen $b < a$ und $x_1 < x_2$, so erhält man

$$b \leqq x_1 \leqq \xi \leqq x_2 \leqq a;$$

ist $b < a$ und $x_2 < x_1$, so erhält man

$$b \leqq x_2 \leqq \xi \leqq x_1 \leqq a;$$

in diesen beiden Fällen wird also

$$b \leqq \xi \leqq a. \tag{21.}$$

In allen vier Fällen liegt ξ zwischen a und b. Deshalb wird die Grösse

$$\Theta = \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{a - \xi}{a - b} \tag{22.}$$

immer zwischen 0 und 1 liegen, weil in diesem Bruche Zähler und Nenner gleiches Vorzeichen haben, und der Zähler, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner ist als der Nenner. Am besten kann man sich von der Richtigkeit dieser Behauptung durch die geometrische Darstellung der Werthe a, ξ und b durch die Punkte A, P, B überzeugen, indem man

Fig. 21.

O A P B

Fig. 22.

O B P A

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OP = \xi$$

macht; dann entspricht Figur 21 den Ungleichungen (20.) und Figur 22 den Ungleichungen (21.). In beiden Fällen ist

$$\Theta = \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{a - \xi}{a - b} = \frac{AP}{AB};$$

und zwar sind im ersten Falle Zähler und Nenner *beide positiv*, im zweiten Falle sind Zähler und Nenner *beide negativ*. Deshalb wird in beiden Fällen

$$0 \leqq \Theta \leqq +1. \tag{23.}$$

Diese Einschränkung des Werthes von Θ ist für das Folgende besonders zu beachten.

Aus Gleichung (22.) folgt

$$\xi - a = \Theta(b - a),$$

oder

$$\xi = a + \Theta(b - a). \tag{24.}$$

Hierdurch erhält Gleichung (19.) die Form

$$M = f^{(n+1)}[a + \Theta(b - a)], \tag{25.}$$

und Gleichung (13.) geht über in

$$R = \frac{(b - x)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[a + \Theta(b - a)]. \tag{26.}$$

Diese Gleichung gilt, wenn x alle Werthe zwischen a und b durchläuft, sie gilt also auch für $x = a$. Dann gehen die Gleichungen (4.) und (26.) über in

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - a)^n + R, \tag{27.}$$

wobei

$$R = \frac{f^{(n+1)}[a + \Theta(b - a)]}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq +1. \tag{28.}$$

Nachdem man auf diese Weise den Werth von R ermittelt hat, darf man die Grösse a auch als *veränderlich* betrachten und wird sie dann am besten wieder mit x bezeichnen. Dadurch gehen die Gleichungen (27.) und (28.) über in

$$f(b) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b - x)^n + R, \tag{29.}$$

$$R = \frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b - x)]}{(n + 1)!}(b - x)^{n+1}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq +1. \tag{30.}$$

Setzt man jetzt wieder, den Gleichungen (3.) entsprechend,

$$b = x + h, \quad \text{also} \quad b - x = h,$$

so erhält man hieraus

$$f(x + h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R, \tag{31.}$$

$$R = \frac{f^{(n+1)}(x + \Theta h)}{(n + 1)!}h^{n+1}, \quad 0 \leqq \Theta \leqq +1. \tag{32.}$$

Diese Gleichungen geben an, in welcher Weise man $f(x+h)$ nach steigenden Potenzen von h entwickeln kann.

Bemerkung.

Um die Form des Restes R leichter zu behalten, merke man sich, dass R aus dem letzten Gliede $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$ entsteht, indem man n mit $n+1$ und x mit $x+\Theta h$ vertauscht.

Für $n = 0$ findet man aus den Gleichungen (31.) und (32.)

$$f(x + h) - f(x) = h \,.\, f'(x + \Theta h). \tag{33.}$$

Man kann in den Gleichungen (27.) und (28.) die Grösse a auch als *constant* und die Grösse b als *veränderlich* betrachten, wobei es zweckmässig sein wird, den Buchstaben b mit dem Buchstaben x zu vertauschen. Dann ist

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R, \tag{34.}$$

$$R = \frac{f^{(n+1)}[a + \Theta(x - a)]}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}. \tag{35.}$$

Diese Gleichungen geben an, in welcher Weise man $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickeln kann.

Für $n = 0$ findet man aus den Gleichungen (34.) und (35.)

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'[a + \Theta(x - a)]. \tag{36.}$$

Lässt sich nun zeigen, dass R *beliebig klein* wird für *hinreichend grosse* Werthe von n, so darf man R für unbegrenzt wachsende Werthe von n vernachlässigen und schreiben

$$(31\text{a.})\quad f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots;$$

$$(34\text{a.})\quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$
$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots;$$

wo die Punkte andeuten sollen, dass die Reihen bis in's Unendliche fortzusetzen sind.

§ 32.

Die Mac-Laurin'sche oder Stirling'sche Reihe.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 51 und 51a.)

Die *Mac-Laurin*'sche oder *Stirling*'sche Reihe ist nur ein besonderer Fall der *Taylor*'sche Reihe, den man erhält, indem man in den Gleichungen (34.) und (35.) des vorhergehenden Paragraphen a gleich 0 setzt. Dies giebt

$$(1.)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R,$$

wobei

$$(2.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{und} \quad 0 \leqq \Theta \leqq +1$$

ist. Für $n = 0$ findet man hieraus

$$(3.)\qquad f(x) - f(0) = x \,.\, f'(\Theta x).$$

§ 33.

Entwickelung der Functionen e^x und a^x.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 52 und 53.)

Aufgabe 1. Man soll die Function e^x nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Hier ist

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x) = e^x, & \text{also} \quad f(0) = 1, \\ f'(x) = e^x, & \text{„} \quad f'(0) = 1, \\ f''(x) = e^x, & \text{„} \quad f''(0) = 1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) = e^x, & \text{„} \quad f^{(n)}(0) = 1, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, & \text{„} \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in die *Mac-Laurin*'sche Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + R$$

ein, so erhält man

$$(2.)\quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

$$(3.)\quad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x}.$$

Bezeichnet man nun den absoluten Betrag von x (d. h. den Werth von x, abgesehen vom Vorzeichen) mit $|x|$, und bestimmt die Zahl g so, dass sie der Ungleichung

$$g \leqq |x| < g + 1$$

genügt, so zerlege man $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ in die Factoren

$$F_1 = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{g} \text{ und } F_2 = \frac{x}{g+1}\cdot\frac{x}{g+2}\cdots\frac{x}{n+1}.$$

Es ist dann, wenn man vorläufig voraussetzt, dass x positiv ist,

$$(4.)\quad \frac{x}{g+1} = k$$

ein ächter Bruch, und es wird

$$\frac{x}{g+2} < k, \quad \frac{x}{g+3} < k, \quad \cdots \frac{x}{n+1} < k.$$

Daraus folgt

$$F_2 = \frac{x}{g+1}\cdot\frac{x}{g+2}\cdot\frac{x}{g+3}\cdots\frac{x}{n+1} < k^{n+1-g},$$

(5.) $$R = F_1 . F_2 . F_3, \quad \text{wobei} \quad F_3 = e^{\Theta x}$$
ist. Die Factoren

$$F_1 = \frac{x^g}{g!} \quad \text{und} \quad F_3 = e^{\Theta x}$$

sind *endliche* Grössen, während man k^{n+1-g} und folglich erst recht den Factor F_2 beliebig klein machen kann, indem man den Exponenten $n + 1 - g$ hinreichend gross macht; deshalb wird auch R beliebig klein für hinreichend grosses n.

Vertauscht man x mit $-x$, so ändert der Factor $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ höchstens sein Vorzeichen, und $F_3 = e^{\Theta x}$ geht über in $e^{-\Theta x} = \frac{1}{e^{\Theta x}}$, bleibt also eine *endliche Grösse.* Deshalb wird R auch dann beliebig klein für hinreichend grosses n, wenn x einen negativen Werth hat.

Man kann daher in allen Fällen das Restglied bei dieser Entwickelung vernachlässigen, wenn man die Reihe bis in's Unendliche fortsetzt, und erhält

(6.) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.}$$

Für $x = 1$ stimmt diese Gleichung mit Formel Nr. 14 der Tabelle überein.

Aufgabe 2. Man soll die Function a^x nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Hier ist

(7.) $$\left\{\begin{array}{lll} f(x) = a^x, & \text{also} & f(0) = 1, \\ f'(x) = a^x \mathrm{l}a, & & f'(0) = \mathrm{l}a, \\ f''(x) = a^x(\mathrm{l}a)^2, & & f''(0) = (\mathrm{l}a)^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f^{(n)}(x) = a^x(\mathrm{l}a)^n, & & f^{(n)}(0) = (\mathrm{l}a)^n, \\ f^{(n+1)}(x) = a^x(\mathrm{l}a)^{n+1} & & f^{(n+1}(\Theta x) = a^{\Theta x}(\mathrm{l}a)^{n+1}. \end{array}\right.$$

Daraus folgt durch Anwendung der *Mac-Laurin*'schen Reihe

$$(8.)\quad f(x) = a^x = 1 + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1!} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n(\mathrm{l}a)^n}{n!} + R,$$

wobei man in ähnlicher Weise wie vorhin zeigen kann, dass R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n. Dies giebt

$$(9.)\qquad a^x = 1 + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1!} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{2!} + \frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{3!} + \cdots.$$

Dasselbe Resultat hätte man auch aus Gleichung (6.) in folgender Weise finden können. Es sei

$$y = a^x,$$

dann wird

$$\mathrm{l}y = \mathrm{l}(a^x) = x\,\mathrm{l}a,$$

folglich ist

$$y = e^{x\mathrm{l}a},$$

also nach Gleichung (6.), indem man x mit $x\,\mathrm{l}a$ vertauscht,

$$a^x = e^{x\mathrm{l}a} = 1 + \frac{x\,\mathrm{l}a}{1!} + \frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{2!} + \frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{3!} + \cdots.$$

§ 34.
Entwickelung der Functionen $\sin x$ und $\cos x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 54 und 55.)

Aufgabe 1. Man soll die Function $\sin x$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Hier ist

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x) = \sin x, & \text{also} \quad f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x, & \quad ,, \quad f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x, & \quad ,, \quad f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x, & \quad ,, \quad f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) = \sin x, & \quad ,, \quad f^{(4)}(0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass n eine *ungerade* Zahl ist, wird daher

$$(2.)\quad \begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm\cos x, & \text{also} \quad f^{(n)}(0) = \pm 1, \\ f^{(n+1)}(x) = \mp \sin x, & \text{,,} \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \mp \sin(\Theta x). \end{cases}$$

Dies giebt mit Hülfe der *Mac-Laurin*'schen Reihe

$$(3.)\quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

$$(4.)\quad R = \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\Theta x).$$

Nun wurde bereits im vorigen Paragraphen bei Entwickelung von e^x gezeigt, dass man $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ beliebig klein machen kann, wenn man nur n hinreichend gross wählt. Ausserdem liegt $\sin(\Theta x)$ zwischen -1 und $+1$, folglich kann R vernachlässigt werden, wenn man die Reihe bis in's Unendliche fortsetzt. Dadurch erhält man

$$(5.)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots.$$

Heisst das letzte Glied, welches man für die Berechnung von $\sin x$ benutzt hat, $\pm\frac{x^n}{n!}$, und ist $|x| < n + 1$, so ist der Rest, welcher vernachlässigt wird, nämlich

$$R = \mp \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1} \cdot \sin(\Theta x),$$

vom Vorzeichen abgesehen, immer nur ein Bruchtheil dieses letzten Gliedes, so dass man für die Genauigkeit der Rechnung ein sicheres Mass erhält.

Aufgabe 2. Man soll nach dieser Formel $\sin 15^0 25' 20''$ berechnen.

Auflösung. Die Länge des Bogens, welcher dem Centriwinkel von $15^0 25' 20''$ in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 entspricht, ist

$$x = 15\frac{76}{180} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2776 \,.\, 3{,}141\,592\,65}{32400} = 0{,}269\,168\,56.$$

Deshalb wird

$$\frac{x}{1!} = 0{,}269\,168\,56, \qquad \frac{x^3}{3!} = 0{,}003\,250\,29,$$

$$\frac{x^5}{5!} = 0{,}000\,011\,77, \qquad \frac{x^7}{7!} = 0{,}000\,000\,02.$$

Die folgenden Glieder haben in den ersten 8 Decimalstellen keine geltenden Ziffern mehr. Es wird daher

$$\sin x = 0{,}269\,180\,33 - 0{,}003\,250\,31,$$

oder

$$\sin 15^0 25' 20'' = 0{,}265\,930\,02.$$

Aufgabe 3. Man soll die Function $\cos x$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Hier ist

$$(6.)\quad \begin{cases} f(x) = \cos x, & \text{also} \quad f(0) = +1, \\ f'(x) = -\sin x, & \text{,,} \quad f'(0) = 0, \\ f''(x) = -\cos x, & \text{,,} \quad f''(0) = -1, \\ f'''(x) = \sin x, & \text{,,} \quad f'''(0) = 0, \\ f^{(4)}(x) = \cos x, & \text{,,} \quad f^{(4)}(0) = +1, \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass n eine *gerade* Zahl ist, wird daher

$$(7.)\quad \begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \cos x, & \text{also} \quad f^{(n)}(0) = \pm 1, \\ f^{(n+1)}(x) = \mp \sin x, & \text{,,} \quad f^{(n+1)}(\Theta x) = \mp \sin(\Theta x). \end{cases}$$

Dies giebt mit Hülfe der *Mac-Laurin*'schen Reihe

$$(8.)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n!} + R,$$

wobei

$$(9.)\quad R = \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin(\Theta x).$$

Der Rest hat hier dieselbe Form wie in Aufgabe 1, nur war dort n eine *ungerade* Zahl, während hier n eine *gerade* Zahl ist. Man findet daher ebenso wie in Aufgabe 1, dass R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n, und erhält

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots. \tag{10.}$$

Auch hier ist der vernachlässigte Rest nur ein Bruchtheil des letzten von der Reihe beibehaltenen Gliedes.

Aufgabe 4. Man soll nach dieser Formel $\cos 15^0 25' 20''$ berechnen.

Auflösung. Da in diesem Falle

$$x = 0{,}269\,168\,56$$

ist, so findet man

$$1 = 1{,}000\,000\,00, \quad \frac{x^2}{2!} = 0{,}036\,225\,86,$$

$$\frac{x^4}{4!} = 0{,}000\,218\,72, \quad \frac{x^6}{6!} = 0{,}000\,000\,53.$$

Die folgenden Glieder haben in den ersten 8 Decimalstellen keine geltenden Ziffern mehr. Es wird daher

$$\cos x = 1{,}000\,218\,72 - 0{,}036\,226\,39,$$

oder

$$\cos 15^0 25' 20'' = 0{,}963\,992\,33.$$

§ 35.

Berechnung von Tafeln für die Functionen $\sin\alpha^0$ und $\cos\alpha^0$.

Es war für alle endlichen Werthe von x

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots, \tag{1.}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots. \tag{2.}$$

Dabei ist x die Länge des zugehörigen Kreisbogens, nämlich

$$x = \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{90}, \tag{3.}$$

wenn der entsprechende Centriwinkel gleich α^0 ist. Da man nun für den Gebrauch zweckmässiger Weise die trigonometrischen Functionen der *Winkel* in Tafeln zusammenstellen wird, so wird

man den in Gleichung (3.) angegebenen Werth von x in die Gleichungen (1.) und (2.) einsetzen. Dadurch erhält man

$$(4.)\quad \sin\alpha^0 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{90} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^5 - + \cdots,$$

$$(5.)\quad \cos\alpha^0 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{\alpha}{90}\right)^6 + - \cdots,$$

wobei man die numerischen Coefficienten

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2,\ \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3,\ \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4,\ldots$$

ein für alle Mal ausrechnen kann, und zwar wird

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,33, \qquad \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1{,}233\,700\,55,$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}645\,964\,10, \qquad \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0{,}253\,669\,51,$$

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}079\,692\,63, \qquad \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = 0{,}020\,863\,48,$$

$$\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}004\,681\,75, \qquad \frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8 = 0{,}000\,919\,26,$$

$$\frac{1}{9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9 = 0{,}000\,160\,44, \qquad \frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} = 0{,}000\,025\,20,$$

$$\frac{1}{11!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{11} = 0{,}000\,003\,60, \qquad \frac{1}{12!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{12} = 0{,}000\,000\,47,$$

$$\frac{1}{13!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{13} = 0{,}000\,000\,06, \qquad \frac{1}{14!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{14} = 0{,}000\,000\,01.$$

Bezeichnet man also $\frac{\alpha}{90}$ mit t, so wird

$$(4a.)\quad \sin\alpha^0 = 1{,}570\,796\,33\,.\,t - 0{,}645\,964\,10\,.\,t^3 + 0{,}079\,692\,63\,.\,t^5 - 0{,}004\,681\,75\,.\,t^7 + 0{,}000\,160\,44\,.\,t^9 - 0{,}000\,003\,60\,.\,t^{11} + 0{,}000\,000\,06\,.\,t^{13},$$

$$(5a.) \quad \cos\alpha^0 = 1{,}000\,000\,00 \quad - 1{,}233\,700\,55 \,.\, t^2$$
$$+ 0{,}253\,669\,51 \,.\, t^4 - 0{,}020\,863\,48 \,.\, t^6$$
$$+ 0{,}000\,919\,26 \,.\, t^8 - 0{,}000\,025\,20 \,.\, t^{10}$$
$$+ 0{,}000\,000\,47 \,.\, t^{12} - 0{,}000\,000\,01 \,.\, t^{14}.$$

Da man nur die Winkel zu berücksichtigen braucht, welche zwischen 0^0 und 45^0 liegen, so ist t immer kleiner als 0,5, so dass man bei der Berechnung nicht einmal die angeführten Glieder alle brauchen wird. Dabei ist es für die Genauigkeit des Endresultates von grosser Bedeutung, dass t, t^2, t^3, ... sämmtlich ächte Brüche sind, weil deshalb die Fehler, welche bei den Coefficienten durch Vernachlässigung der späteren Decimalstellen entstehen, durch die Multiplication mit t, t^2, t^3, ... nicht vergrössert werden.

Ist z. B. $\alpha = 18$, so wird $t = 18 : 90 = 0{,}2$, also

$$\sin 18^0 = 0{,}314\,159\,27 - 0{,}005\,167\,71$$
$$+ 0{,}000\,025\,50 - 0{,}000\,000\,06$$
$$= 0{,}314\,184\,77 - 0{,}005\,167\,77,$$

oder

$$\sin 18^0 = 0{,}309\,017\,00.$$

$$\cos 18^0 = 1{,}000\,000\,00 - 0{,}049\,348\,02$$
$$+ 0{,}000\,405\,87 - 0{,}000\,001\,34$$
$$= 1{,}000\,405\,87 - 0{,}049\,349\,36,$$

oder

$$\cos 18^0 = 0{,}951\,056\,51.$$

Aufgabe. Man soll eine Tafel herstellen, welche die Sinusse und Cosinusse aller Winkel von 10′ zu 10′ bis auf 6 Decimalstellen genau berechnet enthält.

Auflösung. Bekanntlich ist

$$(6.) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$(7.) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Ist dabei $\beta = 10'$, so ist der zugehörige Werth von t gleich $\frac{1}{540}$, und man erhält aus Gleichung (4a.)

(8.) $$\sin 10' = 0{,}002\,908\,88,$$

wobei man nur das *erste* Glied zu berücksichtigen braucht, und aus Gleichung (5a.)

(9.) $$\cos 10' = 1 - 0{,}000\,004\,23 = 0{,}999\,995\,77,$$

wobei man ausser der 1 wieder nur ein einziges Glied zu berücksichtigen braucht. Indem man diese Werthe in die Gleichungen (6.) und (7.) einsetzt, findet man

(10.) $$\sin(\alpha \pm 10') = 0{,}999\,995\,77 \sin\alpha \pm 0{,}002\,908\,88 \cos\alpha,$$

(11.) $$\cos(\alpha \pm 10') = 0{,}999\,995\,77 \cos\alpha \mp 0{,}002\,908\,88 \sin\alpha.$$

In ähnlicher Weise kann man $\sin(\alpha \pm 20')$ und $\cos(\alpha \pm 20')$, $\sin(\alpha \pm 30')$ und $\cos(\alpha \pm 30')$ berechnen, wenn $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bekannt sind.

Es genügt also nach dieser Methode, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ für

$$\alpha = 1^0,\ 2^0,\ 3^0,\ \ldots\ 45^0$$

unter Anwendung der Gleichung (4a.) und (5a.) auszurechnen. Die dazwischen liegenden Werthe findet man dann in der angedeuteten Weise mit der Hülfe der Formeln (6.) und (7.).

Die Rechnung wurde auf 8 Decimalstellen ausgeführt, damit in den Endresultaten die ersten 6 Decimalstellen sicher richtig sind.

In welcher Weise man diese Methode auch auf den Fall übertragen kann, wo es sich um eine Tabelle von Minute zu Minute oder von zehn zu zehn Secunden handelt, erkennt man ohne Weiteres.

§ 36.

Andere Formen des Restgliedes.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 49—51.)

Dem Restgliede kann man noch andere Formen geben, die gleichfalls hergeleitet werden mögen, weil sie für spätere Anwendungen erforderlich sind.

Nach Gleichung (31.) in § 31 war

(1.) $$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R.$$

Setzt man in dieser Gleichung für R den Werth ein, wie er dort in Gleichung (32.) angegeben ist, vertauscht dann aber n mit $n-1$, so erhält man

$$(2.)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x+\Theta h)}{n!}h^n.$$

Indem man beide Seiten der Gleichungen (1.) und (2.) von einander subtrahirt, findet man

$$0=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R-\frac{f^{(n)}(x+\Theta h)}{n!}h^n,$$

oder

$$(3.)\qquad R=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta h)-f^{(n)}(x)]h^n.$$

Diese Form des Restes ist der früheren z. B. dann vorzuziehen, wenn man nicht weiss, ob die $(n+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $f(x)$ in dem betrachteten Intervalle stetig ist.

Auch hier ist Θ eine Zahl, welche zwischen 0 und 1 liegt; sie ist aber selbstverständlich verschieden von der Grösse Θ, welche bei der ersten Form des Restes auftrat. Es möge dies dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass man zu den beiden Grössen Θ die Indices 1 und 2 hinzufügt.

Es ist also

$$(3a.)\quad R=\frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1}=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta_2 h)-f^{(n)}(x)]h^n.$$

Setzt man in Gleichung (1.) x gleich a, so geht sie über in

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R,$$

wobei jetzt nach Gleichung (3a.)

$$R=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(a+\Theta_2 h)-f^{(n)}(a)]h^n$$

wird. Vertauscht man sodann noch h mit $x-a$, so erhält man die andere Form der *Taylor*'schen Reihe, nämlich

$$(4.)\quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

wobei

$$(5.)\qquad R = \frac{1}{n!}\Big\{f^{(n)}[a + \Theta_2(x-a)] - f^{(n)}(a)\Big\}(x-a)^n.$$

Indem man endlich in den Gleichungen (4.) und (5.) a gleich 0 setzt, findet man für die *Mac-Laurin*'sche Reihe

$$(6.)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R$$

das Restglied in der Form

$$(7.)\qquad R = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(\Theta_2 x) - f^{(n)}(0)]x^n.$$

Eine dritte Form des Restgliedes erhält man in folgender Weise.

Setzt man in Gleichung (1.)

$$(8.)\qquad x + h = b, \quad \text{also} \quad h = b - x,$$

so wird

$$(9.)\quad f(b) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + R,$$

oder

$$(10.)\quad R = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Wenn man aber wieder festsetzt, dass b in der hier folgenden Betrachtung constant bleibt, so ist R als eine Function der einzigen Veränderlichen x zu behandeln, d. h. man kann setzen

$$(11.)\qquad R = \varphi(x).$$

Dies giebt, wie schon in § 31 Gleichung (5.) gezeigt wurde,

$$\frac{dR}{dx} = \varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \tag{12.}$$

Wenn nun $f(x)$ mit seinen $n+1$ ersten Ableitungen in dem betrachteten Intervalle stetig ist, so sind auch die Functionen $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ in diesem Intervalle stetig. Nach Formel Nr. 49a der Tabelle ist

$$f(x+h) - f(x) = h \,.\, f'(x+\Theta h),$$

also auch

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h \,.\, \varphi'(x+\Theta h),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.)

$$\varphi(b) - \varphi(x) = (b-x)\varphi'[x+\Theta(b-x)]. \tag{13.}$$

Nun folgt aber aus Gleichung (10.), dass $R = 0$ wird für $x = b$, dass also

$$\varphi(b) = 0$$

ist. Ferner folgt aus Gleichung (12.), indem man x mit $x + \Theta(b-x)$ vertauscht,

$$\varphi'[x+\Theta(b-x)] = -\frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!} \cdot [b-x-\Theta(b-x)]^n$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!}(1-\Theta)^n(b-x)^n;$$

deshalb geht die Gleichung (13.) über in

$$\varphi(x) = R = \frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{n!}(1-\Theta)^n(b-x)^{n+1}. \tag{14.}$$

Auch hier ist Θ eine Grösse zwischen 0 und 1, die aber zum Unterschiede von Θ_1 und Θ_2 mit Θ_3 bezeichnet werden möge. Berücksichtigt man noch die Gleichungen (8.), so wird

$$R = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_3 h)}{n!}(1-\Theta_3)^n h^{n+1}. \tag{15.}$$

Vertauscht man jetzt wieder x mit a und h mit $x-a$, so erhält man die zweite Form der *Taylor*'schen Reihe, nämlich

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{16.}$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

wobei

$$(17.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}[a + \Theta_3(x - a)]}{n!}(1 - \Theta_3)^n(x - a)^{n+1}.$$

Indem man in diesen Gleichungen (16.) und (17.) a gleich 0 setzt, findet man für die *Mac-Laurin*'sche Reihe

$$(18.)\quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R$$

das Restglied in der Form

$$(19.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta_3 x)}{n!}(1 - \Theta_3)^n x^{n+1}.$$

Bemerkung.*)

Diese Form des Restes ist nur ein besonderer Fall einer viel allgemeineren Form, die man auf folgende Weise findet.

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen, welche mit ihren Ableitungen $\varphi'(x)$ und $\psi'(x)$ in dem Intervalle von a bis b *stetig* und *endlich* bleiben, und nimmt $\psi'(x)$ innerhalb dieses Intervalles nur *positive* Werthe an, so bleibt der Quotient

$$(20.)\qquad Q(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

in diesem Intervalle gleichfalls *stetig* und *endlich*, und die Function $\psi(x)$ nimmt mit x zugleich zu.

Wenn nun x das Intervall von a bis b durchläuft, so möge $Q(x)$ für $x = x_1$ seinen *kleinsten* Werth K und für $x = x_2$ seinen *grössten* Werth G erreichen. Es sei also

$$(21.)\qquad Q(x_1) = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = K, \quad Q(x_2) = \frac{\varphi'(x_2)}{\psi'(x_2)} = G,$$

wobei x_1 und x_2 zwischen a und b liegen. Dies giebt für $a \leqq x \leqq b$

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - K \geqq 0, \qquad \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} - G \leqq 0,$$

oder

$$(22.)\qquad \varphi'(x) - K\psi'(x) \geqq 0, \quad \varphi'(x) - G\psi'(x) \leqq 0.$$

Diese Ausdrücke sind aber bezw. die Ableitungen von

$$(23.)\qquad \begin{cases} u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)], \\ v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - (\psi a)]. \end{cases}$$

---

*) Der Anfänger darf diese Bemerkung übergehen, da von der darin enthaltenen Untersuchung nur selten Gebrauch gemacht werden wird.

Da nach den Ungleichungen (22.)

$$\frac{du}{dx} \geqq 0, \quad \frac{dv}{dx} \leqq 0$$

ist, so muss u beständig *zunehmen* und v beständig *abnehmen*, wenn x *zunimmt*. Für $x = a$ werden u und v beide gleich 0, folglich ist

0 der *kleinste* Werth von u, und

0 der *grösste* Werth von v,

wenn x das Intervall von a bis b durchläuft; d. h.

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)] \geqq 0,$$
$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - \varphi(a)] \leqq 0,$$

oder, da $\psi(x) - \psi(a) > 0$ für $x > a$,

$$K \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \leqq G. \tag{24.}$$

Bezeichnet man $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)}$ mit M, so gehen die Ungleichungen (24.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (21.) über in

$$\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} \leqq M \leqq \frac{\varphi'(x_2)}{\psi'(x_2)}. \tag{24a.}$$

Nun ist aber $\dfrac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ eine *stetige* Function, folglich giebt es nach dem in § 8 bewiesenen Satze 14 zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Werth von x, er heisse ξ, für welchen

$$M = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \tag{25.}$$

wird. Da ξ zwischen x_1 und x_2 liegt, so liegt es auch zwischen a und b, und man kann wieder

$$\xi = a + \Theta(b - a)$$

setzen, wobei $0 \leqq \Theta \leqq +1$ ist. Dies giebt

$$M = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\psi'[a + \Theta(b - a)]}, \tag{25a.}$$

und für $x = b$

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\psi'[a + \Theta(b - a)]}. \tag{26.}$$

Setzt man z. B.

$$\psi(x) = c^{\varkappa} - (c - x)^{\varkappa}, \quad \text{also} \quad \psi'(x) = \varkappa(c - x)^{\varkappa - 1},$$

wobei $c > b$ und $\varkappa > 0$ sein möge, so sind die für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ festgestellten Bedingungen erfüllt, und man erhält aus Gleichung (26.)

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{(c - a)^{\varkappa} - (c - b)^{\varkappa}} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b - a)]}{\varkappa[c - a - \Theta(b - a)]^{\varkappa - 1}},$$

oder

$$(27.)\qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{(c-a)^{\varkappa} - (c-b)^{\varkappa}}{\varkappa[c - a - \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Dies gilt, wie nahe auch c dem Werthe von b liegen mag, folglich erhält man für $\lim c = b$

$$(28.)\qquad \varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b-a}{\varkappa(1-\Theta)^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Für $b \leqq x \leqq a$ gelten ähnliche Schlüsse. Aus den Ungleichungen (22.) folgt dann wieder, dass u beständig *zunimmt* und v beständig *abnimmt*, wenn x *zunimmt*. Da jetzt aber $x \leqq a$, so ist

0 der *grösste* Werth von u und

0 der *kleinste* Werth von v,

wenn x das Intervall von b bis a durchläuft. Dies giebt

$$u = \varphi(x) - \varphi(a) - K[\psi(x) - \psi(a)] \leqq 0,$$
$$v = \varphi(x) - \varphi(a) - G[\psi(x) - \psi(a)] \geqq 0.$$

Da jetzt $x \leqq a$, so ist $\psi(x) - \psi(a) < 0$; deshalb folgt aus diesen Ungleichungen wieder

$$K \leqq \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} \leqq G$$

und

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b-a)]}{\psi'[a + \Theta(b-a)]}.$$

Setzt man in diesem Falle

$$\psi(x) = (x-c)^{\varkappa} - c^{\varkappa}, \quad \text{also} \quad \psi'(x) = \varkappa(x-c)^{\varkappa-1},$$

wobei $c < b$ und $\varkappa > 0$ sein möge, so sind die für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ festgestellten Bedingungen wieder erfüllt, und man erhält

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{(b-c)^{\varkappa} - (a-c)^{\varkappa}} = \frac{\varphi'[a + \Theta(b-a)]}{\varkappa[a - c + \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}},$$

oder

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{(b-c)^{\varkappa} - (a-c)^{\varkappa}}{\varkappa[a - c + \Theta(b-a)]^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)];$$

für $\lim c = b$ findet man also in Uebereinstimmung mit Gleichung (28.)

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{b-a}{\varkappa(1-\Theta)^{\varkappa-1}} \cdot \varphi'[a + \Theta(b-a)].$$

Für $a = x$ findet man hieraus

$$\varphi(b) - \varphi(x) = \frac{b-x}{\varkappa(1-\Theta)^{\varkappa-1}}\varphi'[x + \Theta(b-x)], \tag{29.}$$

gleichviel ob $x < b$ oder $b < x$ ist.

Setzt man jetzt wieder

$$\varphi(x) = R = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n, \tag{30.}$$

so wird

$$\varphi(b) = 0, \quad \varphi'(x) = \frac{dR}{dx} = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n, \tag{31.}$$

$$\varphi'[x + \Theta(b-x)] = -\frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b-x)]}{n!}(1-\Theta)^n(b-x)^n, \tag{32.}$$

folglich findet man aus Gleichung (29.)

$$R = \frac{f^{(n+1)}[x + \Theta(b-x)]}{\varkappa \, . \, n!}(1-\Theta)^{n-\varkappa+1}(b-x)^{n+1}. \tag{33.}$$

Für $\varkappa = 1$ erhält man hieraus in Uebereinstimmung mit Gleichung (14.) die dritte Form des Restes.

§ 37.

Der allgemeine binomische Lehrsatz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 56—58.)

Aufgabe. Man soll $(1 + x)^m$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln, gleichviel ob m eine positive ganze Zahl ist oder nicht.

Auflösung. Hier ist

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = (1+x)^m, \\ f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \\ f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1}, \end{array}\right. \tag{1.}$$

also

$$
(1a.)\quad \begin{cases}
f(0) = 1, \\
f'(0) = m, \\
f''(0) = m(m-1), \\
f'''(0) = m(m-1)(m-2), \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1), \\
f^{(n+1)}(\Theta x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta x)^{m-n-1}.
\end{cases}
$$

Dies giebt mit Hülfe der *Mac-Laurin*'schen Reihe

$$
(2.)\quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + R
$$

$$
= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + R,
$$

wobei

$$
(3.)\quad R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta_1 x)^{m-n-1}}{1.2\dots n(n+1)}x^{n+1},
$$

oder

$$
(4.)\quad R = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)(1+\Theta_3 x)^{m-n-1}}{1.2\dots n}\cdot(1-\Theta_3)^n x^{n+1},
$$

jenachdem man die erste oder die dritte Form des Restes benutzt.

Erster Fall. Zunächst möge gezeigt werden, dass R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n, wenn

$$
(5.)\quad 0 \leqq x < +1.
$$

Bezeichnet man mit g eine beliebige positive ganze Zahl, so kann man das Restglied nach Gleichung (3.) in drei Hauptfactoren

$$
(6.)\quad F_1 = \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{1.2\dots g}x^g,
$$

$$
(7.)\quad F_2 = \frac{m-g}{g+1}x \cdot \frac{m-g-1}{g+2}x \cdots \frac{m-n}{n+1}x,
$$

$$F_3 = (1 + \Theta x)^{m-n-1} = \frac{(1 + \Theta x)^m}{(1 + \Theta x)^{n+1}} \tag{8.}$$

zerlegen, wobei der Einfachheit wegen Θ statt Θ_1 geschrieben ist.

Der erste Hauptfactor F_1 enthält n gar nicht und bleibt *endlich*, wie gross auch g sein mag. Der dritte Hauptfactor F_3 wird gleich 1, wenn von den beiden Grössen Θ und x wenigstens die eine gleich 0 wird; F_3 wird aber sogar beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n, wenn $\Theta > 0$ und $x > 0$.

Setzt man $m + 1 = p$, und ist

$$g > m \geqq -1, \quad \text{also} \quad m + 1 = p \geqq 0,$$

so wird

$$-\frac{m-g}{g+1}x = \frac{g+1-p}{g+1}x \leqq x,$$

$$-\frac{m-g-1}{g+2}x = \frac{g+2-p}{g+2}x \leqq x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{m-n}{n+1}x = \frac{n+1-p}{n+1}x \leqq x,$$

folglich ist

$$(-1)^{n-g+1}F_2 \leqq x^{n-g+1}. \tag{9.}$$

Da nun $x < +1$ ist, so wird für hinreichend grosse Werthe von $n - g + 1$ die Grösse x^{n-g+1} beliebig klein, folglich erst recht F_2.

Ist dagegen

$$m < -1, \quad \text{also} \quad m + 1 < 0,$$

so erhält man, indem man $m + 1 = -p$ setzt,

$$-\frac{m-g}{g+1} = \frac{g+1+p}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1},$$

$$-\frac{m-g-1}{g+2} = \frac{g+2+p}{g+2} = 1 + \frac{p}{g+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{m-n}{n+1} = \frac{n+1+p}{n+1} = 1 + \frac{p}{n+1}.$$

Alle diese Brüche sind *grösser* als 1, da $p > 0$ ist, aber sie nähern sich dem Werthe 1 beliebig. Da $x < 1$ ist, so wird

$$\frac{1}{x} > 1,$$

und man kann es erreichen, wenn man nur g hinreichend gross macht, dass

$$-\frac{m-g}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} < \frac{1}{x}$$

wird, dass also

$$-\frac{m-g}{g+1}x = k < 1$$

ist. Dies giebt dann

$$-\frac{m-g-1}{g+2}x < k,$$

$$-\frac{m-g-2}{g+3}x < k,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$-\frac{m-n}{n+1}x < k.$$

Deshalb wird

$$(10.)\qquad (-1)^{n-g+1}F_2 < k^{n-g+1},$$

also auch hier wird F_2 für hinreichend grosse Werthe von $n-g+1$ beliebig klein, da k ein ächter Bruch ist.

Daraus folgt, dass auch

$$R = F_1 . F_2 . F_3, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq x < +1$$

ist, beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n.

Zweiter Fall. Liegt x zwischen -1 und 0, ist also

$$(11.)\qquad -1 < x \leqq 0,$$

so wendet man die dritte Form des Restgliedes an, um zu zeigen, dass R beliebig klein wird. Aus Gleichung (4.) folgt dann, wenn man der Einfachheit wegen Θ statt Θ_3 schreibt und $x = -z$ setzt,

$$(12.)\quad R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(1-\Theta z)^{m-1}(1-\Theta)^n(-z)^{n+1}}{1.2\ldots n(1-\Theta z)^n}$$

$$= -mz(1-\Theta z)^{m-1} . \frac{(1-m)(z-\Theta z)}{1.(1-\Theta z)} . \frac{(2-m)(z-\Theta z)}{2.(1-\Theta z)} \ldots \frac{(n-m)(z-\Theta z)}{n(1-\Theta z)},$$

wobei

(11a.) $$0 \leqq z < +1.$$

Auch hier zerlegt man R in drei Hauptfactoren

(13.) $$F_1 = -mz(1-\Theta z)^{m-1},$$

(14.) $$F_2 = \frac{1-m}{1}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\cdot\frac{2-m}{2}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\cdots\frac{g-m}{g}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z},$$

(15.) $$F_3 = \frac{g+1-m}{g+1}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\cdot\frac{g+2-m}{g+2}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\cdots$$
$$\frac{n-m}{n}\cdot\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}.$$

Der erste Hauptfactor F_1 ist eine endliche Grösse, ebenso der zweite Hauptfactor F_2. Ferner ist nach Ungleichung (11a.)

$$1 \geqq \Theta \geqq \Theta z, \quad 0 \leqq 1-\Theta \leqq 1-\Theta z,$$
$$0 \leqq z(1-\Theta) = z - \Theta z \leqq z(1-\Theta z),$$

folglich wird

(16.) $$0 \leqq \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \leqq z < 1.$$

Ist nun $m \geqq 0$, so wird

$$\frac{g+1-m}{g+1} \leqq 1, \quad \frac{g+2-m}{g+2} \leqq 1, \quad \ldots \frac{n-m}{n} \leqq 1,$$

also

(17.) $$F_3 \leqq \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^{n-g} \leqq z^{n-g}.$$

Da z ein ächter Bruch ist, so wird z^{n-g} beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von $n-g$, also erst recht F_3.

Ist dagegen $m < 0$, also $-m > 0$, so wird, wenn man hier $-m = p$ setzt,

$$\frac{g+1-m}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} > 1,$$
$$\frac{g+2-m}{g+2} = 1 + \frac{p}{g+2} > 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n-m}{n} = 1 + \frac{p}{n} > 1.$$

Diese Brüche sind zwar alle grösser als 1, da $p > 0$ ist, nähern sich aber dem Werthe 1 beliebig. Macht man daher g so gross, dass

$$\frac{g+1-m}{g+1} = 1 + \frac{p}{g+1} < \frac{1-\Theta z}{z-\Theta z},$$

oder

$$\frac{g+1-m}{g+1} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} = k < 1$$

ist, so wird

$$\frac{g+2-m}{g+2} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} < k,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{n-m}{n} \cdot \frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} < k.$$

Dies giebt

(18.) $$F_3 < k^{n-g}.$$

Da k ein ächter Bruch ist, so wird k^{n-g} beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von $n-g$, folglich erst recht F_3.

Damit ist bewiesen, dass auch R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n, gleichviel ob m positiv oder negativ ist.

Durch Vereinigung des ersten und des zweiten Falles erhält man daher für

(19.) $$-1 < x < +1$$

die Entwickelung

(20.) $$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots.$$

Bemerkung.*)

Liegt m zwischen -1 und $+\infty$, so lässt sich zeigen, dass diese Reihe auch noch für $x = +1$ gilt; liegt m zwischen 0 und $+\infty$, so gilt sie auch noch für $x = -1$.

---

*) Sollte der Inhalt dieser Bemerkung für den Anfänger noch zu schwer verständlich sein, so darf sie übergangen werden.

Beweis. Ist

$$-1 < m < +\infty, \quad \text{oder} \quad 0 < m+1 < +\infty, \quad x = +1,$$

so gehen die Gleichungen (6.), (7.) und (8.) über in

$$F_1 = \frac{m(m-1)\ldots(m-g+1)}{1.2\ldots g}, \tag{6a.}$$

$$F_2 = \frac{m-g}{g+1} \cdot \frac{m-g-1}{g+2} \cdots \frac{m-n}{n+1}, \tag{7a.}$$

$$F_3 = \frac{(1+\Theta)^m}{(1+\Theta)^{n+1}}. \tag{8a.}$$

Der erste Hauptfactor F_1 bleibt wieder *endlich*, der dritte Hauptfactor wird gleich 1 für $\Theta = 0$ und beliebig klein für $\Theta > 0$. Ferner folgt aus Gleichung (7a.), wenn man die positive Grösse $m+1 = p$ setzt

$$(-1)^{n-g+1} F_2 = \frac{g+1-p}{g+1} \cdot \frac{g+2-p}{g+2} \cdots \frac{n+1-p}{n+1}. \tag{21.}$$

Nun ist nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze (vergl. Formel Nr. 49a der Tabelle)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\Theta h),$$

also für

$$f(x) = x^{p+1}, \quad f'(x) = (p+1)x^p$$

erhält man

$$(x+h)^{p+1} = x^{p+1} + (p+1)h(x+\Theta h)^p, \tag{22.}$$

und für $x = 1$

$$(1+h)^{p+1} = 1 + (p+1)h(1+\Theta h)^p. \tag{23.}$$

Wenn nun h und p beide positiv sind, so ist

$$(1+\Theta h)^p \leqq (1+h)^p,$$

und die Gleichung (23.) geht über in die Ungleichung

$$(1+h)^{p+1} \leqq 1 + (p+1)h(1+h)^p,$$

folglich ist

$$(1+h)^p(1-ph) \leqq 1. \tag{24.}$$

Dies giebt für $h = \frac{1}{g+\alpha}$

$$\left(\frac{g+\alpha+1}{g+\alpha}\right)^p \cdot \frac{g+\alpha-p}{g+\alpha} \leqq 1,$$

oder

$$\frac{g+\alpha-p}{g+\alpha} \leqq \left(\frac{g+\alpha}{g+\alpha+1}\right)^p. \tag{25.}$$

Indem man für α nach und nach die Werthe $1, 2, \ldots n-g+1$ einsetzt, erhält man

$$\frac{g+1-p}{g+1} \leqq \left(\frac{g+1}{g+2}\right)^p,$$
$$\frac{g+2-p}{g+2} \leqq \left(\frac{g+2}{g+3}\right)^p,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$\frac{n+1-p}{n+1} \leqq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^p.$$

Daraus folgt, wenn man alle diese Ungleichungen mit einander multiplicirt, nach Gleichung (21.)

$$(26.)\qquad (-1)^{n-g+1}F_2 \leqq \left(\frac{g+1}{n+2}\right)^p,$$

d. h. $|F_2|$ wird *beliebig klein* für hinreichend grosse Werthe von n, also auch R selbst.

Im zweiten Falle, wo die Voraussetzungen

$$0 < m < +\infty, \quad x = -1$$

gelten, benutze man diejenige Form für den Rest der *Taylor*'schen Reihe, welche in § 36, Gleichung (33.) gegeben worden ist, nämlich

$$R = \frac{f^{(n+1)}[x+\Theta(b-x)]}{\varkappa\,.\,n!}(1-\Theta)^{n-\varkappa+1}(b-x)^{n+1},$$

wobei $\varkappa$ eine beliebige positive Zahl ist.

Indem man x mit 0 und $b-x$ mit x vertauscht, findet man aus diesem Ausdrucke für den Rest der *Mac-Laurin*'schen Reihe die Form

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{\varkappa\,.\,n!}(1-\Theta)^{n-\varkappa+1}x^{n+1}.$$

Deshalb wird in dem vorliegenden Falle nach den Gleichungen (1a.)

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\Theta x)^{m-n-1}}{\varkappa\,.\,n!}\,.\,(1-\Theta)^{n-\varkappa+1}\,.\,x^{n+1}.$$

Dies giebt für $x = -1$

$$(27.)\qquad R = (-1)^{n+1}\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{\varkappa\,.\,n!}(1-\Theta)^{m-\varkappa},$$

also für $\varkappa = m$

$$(28.)\qquad R = -\frac{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}{1\,.\,2\ldots n} = F_1\,.\,F_2,$$

wobei für

$$g \leqq m < g+1$$

$$(29.)\qquad F_1 = -\frac{(1-m)(2-m)\ldots(g-m)}{1\,.\,2\ldots g}$$

eine *endliche* Grösse ist. Dagegen wird unter Anwendung der im ersten Falle ausgeführten Untersuchung, wenn man p mit m vertauscht,

$$(30.)\qquad F_2 = \frac{g+1-m}{g+1}\cdot\frac{g+2-m}{g+2}\cdots\frac{n-m}{n} \leqq \left(\frac{g+1}{n+1}\right)^m,$$

d. h. F_2 wird *beliebig klein* für hinreichend grosse Werthe von n, folglich auch R.

Da m unendlich viele Werthe haben darf, so sind in dem binomischen Lehrsatze unendlich viele Reihenentwickelungen enthalten. Ist m eine positive, ganze Zahl, so geht die Reihe nicht bis in's Unendliche, sondern sie bricht nach dem $m+1^{\text{ten}}$ Gliede ab.

Beispiele.

1) $m = -1$.

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \cdots.$$

2) $m = +\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^3}{6} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^4}{8} + - \cdots.$$

3) $m = -\frac{1}{2}$.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^2 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^3 + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}x^4 - + \cdots.$$

Man kann den allgemeinen binomischen Lehrsatz auch auf die Entwickelung von $(a+b)^m$ anwenden.

Ist nämlich $|a| > |b|$, so wird $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch, und man erhält

$$(a+b)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$$
$$= a^m\left[1 + \binom{m}{1}\frac{b}{a} + \binom{m}{2}\frac{b^2}{a^2} + \binom{m}{3}\frac{b^3}{a^3} + \cdots\right],$$

oder

$$(31.)\qquad (a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots.$$

Ist dagegen $a < b$, so wird $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, und man erhält

$$(a+b)^m = b^m\left(1+\frac{a}{b}\right)^m$$
$$= b^m\left[1+\binom{m}{1}\frac{a}{b}+\binom{m}{2}\frac{a^2}{b^2}+\binom{m}{3}\frac{a^3}{b^3}+\cdots\right],$$

oder

$$(a+b)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{3}a^3b^{m-3} + \cdots. \tag{32.}$$

Der binomische Lehrsatz kann auch benutzt werden zur Ausziehung von Wurzeln mit beliebigen Wurzel-Exponenten.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{130} = (125+5)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}.$

Nach dem binomischen Lehrsatz wird aber

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{6} + \frac{2\,.\,5}{3\,.\,6}\,\frac{x^3}{9} - \frac{2\,.\,5\,.\,8}{3\,.\,6\,.\,9}\,\frac{x^4}{12} + - \cdots,$$

hier ist also

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 1{,}013\,333\,333\,3 - 0{,}000\,177\,777\,8$$
$$+\,0{,}000\,003\,950\,6 - 0{,}000\,000\,105\,3$$
$$+\,0{,}000\,000\,003\,1 - 0{,}000\,000\,000\,1,$$

oder

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 1{,}013\,159\,403\,8,$$
$$\sqrt[3]{130} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 5{,}065\,797\,019\,0.$$

Wegen Vernachlässigung der späteren Decimalstellen ist in diesem Resultate die letzte Decimalstelle um 15 Einheiten unsicher.

2) $\sqrt[5]{1000} = (1024-24)^{\frac{1}{5}} = 4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}}.$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1+x)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{4}{5}\,\frac{x^2}{10} + \frac{4\,.\,9}{5\,.\,10}\,\frac{x^3}{15} - \frac{4\,.\,9\,.\,14}{5\,.\,10\,.\,15}\,\frac{x^4}{20} + - \cdots,$$

$$(1-x)^{\frac{1}{5}} = 1 - \frac{x}{5} - \frac{4}{5}\,\frac{x^2}{10} - \frac{4\,.\,9}{5\,.\,10}\,\frac{x^3}{15} - \frac{4\,.\,9\,.\,14}{5\,.\,10\,.\,15}\,\frac{x^4}{20} - - \cdots,$$

folglich wird

$$\left(1-\frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - 0{,}004\,687\,500\,0$$
$$- 0{,}000\,043\,945\,3$$
$$- 0{,}000\,000\,618\,0$$
$$- 0{,}000\,000\,010\,1$$
$$- 0{,}000\,000\,000\,2,$$

oder

$$\sqrt[5]{1000} = 4 \,.\, 0{,}995\,267\,926\,4 = 3{,}981\,071\,705\,6.$$

Die Unsicherheit in der letzten Decimalstelle beträgt hierbei 8.

In ähnlicher Weise werden die folgenden Aufgaben gelöst:

3) $\sqrt[3]{220} = (216 + 4)^{\frac{1}{3}} = 6\left(1 + \frac{1}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \,.\, 1{,}006\,135\,122\,799$
$$= 6{,}036\,810\,736\,794.$$

Die Unsicherheit in der letzten Decimalstelle beträgt hierbei 18.

4) $\sqrt[7]{2106} = (2187 - 81)^{\frac{1}{7}} = 3\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{7}},$

$$(1+x)^{\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7}x - \frac{6}{7 \,.\, 14}x^2$$
$$+ \frac{6 \,.\, 13}{7 \,.\, 14 \,.\, 21}x^3 - \frac{6 \,.\, 13 \,.\, 20}{7 \,.\, 14 \,.\, 21 \,.\, 28}x^4 + - \cdots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{7}} = 1 - \frac{1}{7 \,.\, 27} - \frac{6}{7 \,.\, 14 \,.\, 27^2} - \frac{6 \,.\, 13}{7 \,.\, 14 \,.\, 21 \,.\, 27^3} - \cdots$$
$$= 0{,}994\,623\,032\,493,$$

$$\sqrt[7]{2106} = 2{,}983\,869\,097\,479.$$

Die Unsicherheit in der letzten Decimalstelle beträgt hierbei $10\frac{1}{2}$.

§ 38.

Der Logarithmus.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 59—64.)

Setzt man

$$f(x) = \mathrm{l}x,$$

so kann man die *Mac-Laurin*'sche Reihe nicht anwenden, weil $f(x)$ und alle Ableitungen davon für $x = 0$ unendlich gross werden. Deshalb setzt man

$$(1.)\quad \begin{cases} f(x) = \mathrm{l}(1+x), & \text{also}\quad f(0) = 0, \\ f'(x) = (1+x)^{-1}, & \text{"}\quad f'(0) = +1, \\ f''(x) = -1\,.\,(1+x)^{-2}, & \text{"}\quad f''(0) = -1, \\ f'''(x) = 1\,.\,2(1+x)^{-3}, & \text{"}\quad f'''(0) = +1\,.\,2, \\ f^{(4)}(x) = -1\,.\,2\,.\,3(1+x)^{-4}, & \text{"}\quad f^{(4)}(0) = -1\,.\,2\,.\,3, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, & \text{"}\quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-n-1}, & \end{cases}$$

also

$$(1\text{a.})\quad f^{(n+1)}(\Theta x) = (-1)^n n!\,(1+\Theta x)^{-n-1}.$$

Durch Anwendung der *Mac-Laurin*'schen Reihe erhält man dann

$$(2.)\qquad \mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \pm \frac{x^n}{n} + R.$$

Auch hier kann man zeigen, dass R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt.

Ist zunächst

$$(3.)\qquad 0 \leqq x \leqq +1,$$

so wendet man die erste Form des Restes an und erhält

$$(4.)\qquad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1}.$$

Für $x = 1$ wird also

$$R = \frac{\pm 1}{(n+1)(1+\Theta)^{n+1}}$$

beliebig klein, selbst wenn Θ gleich 0 sein sollte, denn $\frac{1}{n+1}$ wird beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n. Ist

aber x ein ächter Bruch, so ist

$$\frac{x}{1+\Theta x} \leqq x, \quad \text{also} \quad \left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1} \leqq x^{n+1};$$

dann wird R erst recht beliebig klein, da die Factoren

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{1+\Theta x}\right)^{n+1}$$

beide beliebig klein werden.

Ist

$$(5.) \qquad -1 < x \leqq 0,$$

so wendet man wieder die dritte Form des Restes an und erhält, indem man x mit $-z$ vertauscht,

$$(6.) \quad R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1} = (-1)^n(1+\Theta x)^{-n-1}(1-\Theta)^n x^{n+1}$$

$$= -\frac{z}{1-\Theta z} \cdot \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^n.$$

Nun folgt aus der Ungleichung (5.), dass

$$(7.) \quad 1 > z \geqq 0, \quad 1 \geqq \Theta \geqq \Theta z, \quad 0 \leqq 1-\Theta \leqq 1-\Theta z,$$

und deshalb

$$0 \leqq z(1-\Theta) = z - \Theta z \leqq z(1-\Theta z)$$

ist, folglich wird

$$\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z} \leqq z, \quad \text{und} \quad \left(\frac{z-\Theta z}{1-\Theta z}\right)^n \leqq z^n$$

wird beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n. Dasselbe gilt daher auch für R.

Somit erhält man für

$$-1 < x \leqq +1$$

die Entwickelung

$$(8.) \qquad l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

Es ist z. B.

$$(8a.) \qquad l2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots.$$

Für die numerische Berechnung der Logarithmen ist die Reihe in Gleichung (8.) noch nicht sehr geeignet, weil man sie nur für die Berechnung der Logarithmen zwischen 0 und 2 benutzen kann, und weil man sehr viele Glieder der Reihe braucht, um den Logarithmus auch nur auf einige Decimalstellen genau zu erhalten.

Man kann aber aus dieser Reihe einige andere, für die numerische Berechnung weit geeignetere Reihen ableiten. Setzt man z. B. in Gleichung (8.) $x = \frac{y}{a}$, so erhält man

$$\mathrm{l}\left(1 + \frac{y}{a}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{a + y}{a}\right) = \mathrm{l}(a + y) - \mathrm{l}a$$

$$= \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots,$$

oder

$$\mathrm{l}(a + y) = \mathrm{l}a + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots, \tag{9.}$$

wenn $\frac{y}{a}$ ein ächter Bruch ist. Für $y = 1$ folgt hieraus

$$\mathrm{l}(a + 1) = \mathrm{l}a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^4} + - \cdots. \tag{9a.}$$

Eine noch brauchbarere Reihe erhält man auf folgende Weise. Nach Gleichung (8.) ist

$$\mathrm{l}(1 + x) = + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots,$$

$$\mathrm{l}(1 - x) = - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - - \cdots;$$

indem man beide Seiten dieser Gleichungen von einander subtrahirt, findet man

$$\mathrm{l}(1 + x) - \mathrm{l}(1 - x) = \mathrm{l}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{10.}$$

Setzt man jetzt

$$x = \frac{z}{2y + z}, \quad \text{also} \quad 1 + x = \frac{2y + 2z}{2y + z}, \quad 1 - x = \frac{2y}{2y + z}, \tag{11.}$$

so wird

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+z}{y}, \quad \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \mathrm{l}(y+z) - \mathrm{l}y;$$

deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$(12.)\quad \mathrm{l}(y+z) = \mathrm{l}y + 2\left[\frac{z}{2y+z} + \frac{z^3}{3(2y+z)^3} + \frac{z^5}{5(2y+z)^5} + \cdots\right].$$

Sind y und z positive Zahlen, so wird x ein ächter Bruch; dann gilt also die durch Gleichung (12.) gegebene Entwickelung.

Diese Reihe wird besonders häufig angewendet für den Fall, wo $z = 1$ ist; dann wird nämlich

$$(12a.)\quad \mathrm{l}(y+1) = \mathrm{l}y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right].$$

Bemerkung.

Um sich darüber Rechenschaft zu geben, mit welcher Genauigkeit man $\mathrm{l}(y+1)$ erhält, wenn man die Entwickelung in Gleichung (12a.) bis zu dem Gliede $\frac{1}{(2n-1)(2y+1)^{2n-1}}$ fortsetzt, beachte man, dass

$$(13.)\quad \mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} + R_1,$$

$$(14.)\quad \mathrm{l}(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - - \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n} + R_2$$

wird, wobei

$$(15.)\quad R_1 = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\Theta_1 x)^{2n+1}}, \quad R_2 = \frac{-x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\Theta_2 x)^{2n+1}}$$

ist. Daraus folgt

$$(16.)\quad \mathrm{l}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R_1 - R_2.$$

Da nun

$$(17.)\quad \frac{x}{1+\Theta_1 x} \leqq x, \qquad \frac{x}{1-\Theta_2 x} \leqq \frac{x}{1-x}$$

ist, so wird

$$R_1 - R_2 = \frac{1}{2n+1}\left[\left(\frac{x}{1+\Theta_1 x}\right)^{2n+1} + \left(\frac{x}{1-\Theta_2 x}\right)^{2n+1}\right],$$

$$R_1 - R_2 \leqq \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n+1}\right] = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{(1-x)^{2n+1}}\right],$$

$$(18.)\quad R_1 - R_2 \leqq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{(1-x)^{2n+1}+1}{(1-x)^{2n+1}} \leqq \frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)(1-x)^{2n+1}}.$$

Setzt man jetzt wieder

$$x = \frac{1}{2y+1}, \quad \text{also} \quad 1 - x = \frac{2y}{2y+1}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{1}{2y}, \tag{19.}$$

so findet man aus Ungleichung (18.)

$$R_1 - R_2 \leqq \frac{2}{(2n+1)(2y)^{2n+1}}. \tag{20.}$$

§ 39.

Berechnung der natürlichen Logarithmen.

Aufgabe. Man soll die natürlichen Logarithmen der Zahlen 1 bis 10 auf 8 Decimalstellen genau berechnen.

Auflösung. Um in dem Resultate eine Genauigkeit von 8 Decimalstellen zu erzielen, wird es gut sein, die Rechnung bis auf 10 Decimalstellen durchzuführen.

Zunächst ist

$$\mathrm{l}1 = 0. \tag{1.}$$

Ferner setze man in der Reihe

$$\mathrm{l}(y+1) = \mathrm{l}y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right] \tag{2.}$$

$y = 1$, dann wird

$$\mathrm{l}2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$1 : 3 \;\; = 0{,}333\,333\,333\,3,$	$1 : 3 \;\; = 0{,}333\,333\,333\,3,$
$1 : 3^3 = 0{,}037\,037\,037\,0,$	$1 : 3 \,.\, 3^3 = 0{,}012\,345\,679\,0,$
$1 : 3^5 = 0{,}004\,115\,226\,3,$	$1 : 5 \,.\, 3^5 = 0{,}000\,823\,045\,3,$
$1 : 3^7 = 0{,}000\,457\,247\,4,$	$1 : 7 \,.\, 3^7 = 0{,}000\,065\,321\,1,$
$1 : 3^9 = 0{,}000\,050\,805\,3,$	$1 : 9 \,.\, 3^9 = 0{,}000\,005\,645\,0,$
$1 : 3^{11} = 0{,}000\,005\,645\,0,$	$1 : 11 \,.\, 3^{11} = 0{,}000\,000\,513\,2,$
$1 : 3^{13} = 0{,}000\,000\,627\,2,$	$1 : 13 \,.\, 3^{13} = 0{,}000\,000\,048\,2,$
$1 : 3^{15} = 0{,}000\,000\,069\,7,$	$1 : 15 \,.\, 3^{15} = 0{,}000\,000\,004\,6,$
$1 : 3^{17} = 0{,}000\,000\,007\,7,$	$1 : 17 \,.\, 3^{17} = 0{,}000\,000\,000\,5,$

folglich ist

$$\frac{1}{2}\,l2 = 0{,}346\,573\,590\,2$$

und

$$l2 = 0{,}693\,147\,180\,4. \tag{3.}$$

Setzt man in Gleichung (2.) $y = 2$, so erhält man

$$l3 = l2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$\begin{array}{llll}
1:5 = 0{,}2, & & 1:5 & = 0{,}200\,000\,000\,0, \\
1:5^3 = 0{,}008, & & 1:3\,.\,5^3 & = 0{,}002\,666\,666\,7, \\
1:5^5 = 0{,}000\,32, & & 1:5\,.\,5^5 & = 0{,}000\,064\,000\,0, \\
1:5^7 = 0{,}000\,012\,8, & & 1:7\,.\,5^7 & = 0{,}000\,001\,828\,6, \\
1:5^9 = 0{,}000\,000\,512, & & 1:9\,.\,5^9 & = 0{,}000\,000\,056\,9, \\
1:5^{11} = 0{,}000\,000\,020\,5, & & 1:11\,.\,5^{11} & = 0{,}000\,000\,001\,9, \\
1:5^{13} = 0{,}000\,000\,000\,8, & & 1:13\,.\,5^{13} & = 0{,}000\,000\,000\,1;
\end{array}$$

folglich ist

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots = 0{,}202\,732\,554\,2,$$

$$2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} + \cdots\right) = 0{,}405\,465\,108\,4,$$

$$l2 = 0{,}693\,147\,180\,4.$$

Dies giebt

$$l3 = 1{,}098\,612\,288\,8. \tag{4.}$$

Ferner wird

$$l4 = 2\,.\,l2 = 1{,}386\,294\,360\,8. \tag{5.}$$

Für $y = 4$ folgt aus Gleichung (2.)

$$l5 = l4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\,.\,9^3} + \frac{1}{5\,.\,9^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$\begin{array}{llll}
1:9 = 0{,}111\,111\,111\,1, & & 1:9 & = 0{,}111\,111\,111\,1, \\
1:9^3 = 0{,}001\,371\,742\,1, & & 1:3\,.\,9^3 & = 0{,}000\,457\,247\,4, \\
1:9^5 = 0{,}000\,016\,935\,1, & & 1:5\,.\,9^5 & = 0{,}000\,003\,387\,0, \\
1:9^7 = 0{,}000\,000\,209\,1, & & 1:7\,.\,9^7 & = 0{,}000\,000\,029\,9, \\
1:9^9 = 0{,}000\,000\,002\,6, & & 1:9\,.\,9^9 & = 0{,}000\,000\,000\,3,
\end{array}$$

folglich ist

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots = 0{,}111\,571\,775\,7,$$

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right) = 0{,}223\,143\,551\,4,$$

$$l4 = 1{,}386\,294\,360\,8;$$

dies giebt

$$l5 = 1{,}609\,437\,912\,2. \tag{6.}$$

Ferner ist

$$l6 = l2 + l3 = 0{,}693\,147\,180\,4 + 1{,}098\,612\,288\,8,$$

oder

$$l6 = 1{,}791\,759\,469\,2. \tag{7.}$$

Für $y = 6$ folgt aus Gleichung (2.)

$$l7 = l6 + 2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \cdots\right).$$

Nun ist

$$1 : 13 = 0{,}076\,923\,076\,9, \qquad 1 : 13 = 0{,}076\,923\,076\,9,$$
$$1 : 13^3 = 0{,}000\,455\,166\,1, \qquad 1 : 3 \cdot 13^3 = 0{,}000\,151\,722\,0,$$
$$1 : 13^5 = 0{,}000\,002\,693\,3, \qquad 1 : 5 \cdot 13^5 = 0{,}000\,000\,538\,7,$$
$$1 : 13^7 = 0{,}000\,000\,015\,9, \qquad 1 : 7 \cdot 13^7 = 0{,}000\,000\,002\,3,$$

folglich ist

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \cdots = 0{,}077\,075\,339\,9,$$

$$2\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \cdots\right) = 0{,}154\,150\,679\,8,$$

$$l6 = 1{,}791\,759\,469\,2;$$

dies giebt

$$l7 = 1{,}945\,910\,149\,0; \tag{8.}$$

$$l8 = 3 \cdot l2 = 3 \cdot 0{,}693\,147\,180\,4,$$

also

$$(9.)\qquad \begin{aligned} l8 &= 2{,}079\,441\,541\,2;\\ l9 &= 2\,.\,l3 = 2\,.\,1{,}098\,612\,288\,8, \end{aligned}$$

also

$$(10.)\qquad \begin{aligned} l9 &= 2{,}197\,224\,577\,6;\\ l10 &= l2 + l5 = 0{,}693\,147\,180\,4 + 1{,}609\,437\,912\,2, \end{aligned}$$

also

$$(11.)\qquad l10 = 2{,}302\,585\,092\,6.$$

Berücksichtigt man nun, dass die beiden letzten Decimalstellen in den vorstehenden Rechnungen nicht mehr ganz zuverlässig sind, und behält man deshalb nur 8 Stellen bei, so ergiebt sich als Resultat der Rechnung die folgende Tabelle:

$$(12.)\qquad \left\{ \begin{aligned} l1 &= 0,\\ l2 &= 0{,}693\,147\,18,\\ l3 &= 1{,}098\,612\,29,\\ l4 &= 1{,}386\,294\,36,\\ l5 &= 1{,}609\,437\,91,\\ l6 &= 1{,}791\,759\,47,\\ l7 &= 1{,}945\,910\,15,\\ l8 &= 2{,}079\,441\,54,\\ l9 &= 2{,}197\,224\,58,\\ l10 &= 2{,}302\,585\,09. \end{aligned} \right.$$

Will man hieraus die Logarithmen mit der Basis 10 berechnen, so hat man nach den Ausführungen in § 18 die gefundenen Werthe mit dem *Modul* des *Briggs*'schen Logarithmensystems, nämlich mit

$$(13.)\qquad \log e = \frac{1}{l10} = \frac{1}{2{,}302\,585\,09} = 0{,}434\,294\,48$$

zu multipliciren.

Bezeichnet man also $\log e$ mit M, so erhält man für die Logarithmen mit der Basis 10 folgende Tabelle:

$$
(14.)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\log 2 & = M \, . \, l2 & = 0{,}301\,029\,99, \\
\log 3 & = M \, . \, l3 & = 0{,}477\,121\,25, \\
\log 4 & = M \, . \, l4 & = 0{,}602\,059\,99. \\
\log 5 & = M \, . \, l5 & = 0{,}698\,970\,00, \\
\log 6 & = M \, . \, l6 & = 0{,}778\,151\,25, \\
\log 7 & = M \, . \, l7 & = 0{,}845\,098\,04, \\
\log 8 & = M \, . \, l8 & = 0{,}903\,089\,98, \\
\log 9 & = M \, . \, l9 & = 0{,}954\,242\,51, \\
\log 10 & = M \, . \, l10 & = 1{,}000\,000\,00.
\end{array}\right.
$$

Für die Berechnung der Logarithmen aller übrigen Zahlen mit der Basis 10 findet man aus Gleichung (2.) durch Multiplication mit M

$$
(15.)\quad \log(y+1) = \log y + 2\,M\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \cdots\right].
$$

Dabei braucht man von der Reihe höchstens nur noch die drei ersten Glieder, wenn man auf 8 Decimalstellen genau rechnen will. Bei etwas grösseren Zahlen werden sogar schon die beiden ersten Glieder ausreichen. So ist z. B.

$$
l53 = l52 + 2\left(\frac{1}{105} + \frac{1}{3 \, . \, 105^3} + \cdots\right),
$$

$$
\frac{1}{105} = 0{,}009\,523\,809\,5,
$$

$$
\frac{1}{3 \, . \, 105^3} = 0{,}000\,000\,287\,9;
$$

folglich ist

$$
\begin{aligned}
l53 &= l52 + 2 \, . \, 0{,}009\,524\,097\,4 \\
&= l52 + 0{,}019\,048\,194\,8.
\end{aligned}
$$

Hier hat schon das *dritte* Glied der Reihe in den ersten 8 Decimalstellen keine geltende Ziffer mehr.

Allerdings darf man es sich nicht verhehlen, dass die Fehler, welche man durch Vernachlässigung der späteren Decimalstellen begeht, bei diesem Verfahren um so grösser werden, je weiter man es fortsetzt. Zu dem Fehler, der schon bei der Bildung von ly begangen ist, tritt ein neuer Fehler bei der Bildung von

$l(y+1)$ hinzu. Ist ferner die Zahl n, deren Logarithmus man bilden will, eine zusammengesetzte, ist z. B.

$$n = abc\ldots,$$

so wird

$$ln = la + lb + lc + \cdots,$$

so dass der Fehler bei ln gleich der algebraischen Summe der Fehler bei la, lb, lc,... ist.

Man muss daher die Logarithmen der Primzahlen 2, 3 und 5, die am häufigsten bei der Bildung zusammengesetzter Zahlen vorkommen, ganz besonders genau berechnen und kann das in folgender Weise. Löst man die Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} l\left(\frac{16}{15}\right) = 4l2 - l3 - l5, \\ l\left(\frac{25}{24}\right) = -3l2 - l3 + 2l5, \\ l\left(\frac{81}{80}\right) = -4l2 + 4l3 - l5 \end{cases}$$

nach $l2$, $l3$, $l5$ auf, so erhält man

$$(17.)\quad \begin{cases} l2 = 7l\left(\frac{16}{15}\right) + 5l\left(\frac{25}{24}\right) + 3l\left(\frac{81}{80}\right), \\ l3 = 11l\left(\frac{16}{15}\right) + 8l\left(\frac{25}{24}\right) + 5l\left(\frac{81}{80}\right), \\ l5 = 16l\left(\frac{16}{15}\right) + 12l\left(\frac{25}{24}\right) + 7l\left(\frac{81}{80}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber nach Gleichung (2.), wenn man für y die Werthe 15, 24 und 80 einsetzt und mit 20 Decimalstellen rechnet,

$$(18.)\quad \begin{cases} l\left(\frac{16}{15}\right) = 2\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3\,.\,31^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}064\,538\,521\,137\,571\,171\,70, \\ l\left(\frac{25}{24}\right) = 2\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3\,.\,49^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}040\,821\,994\,520\,255\,129\,56, \\ l\left(\frac{81}{80}\right) = 2\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\,.\,161^3} + \cdots\right) \\ \qquad = 0{,}012\,422\,519\,998\,557\,153\,30. \end{cases}$$

Bei der Berechnung von $l\left(\frac{16}{15}\right)$ und $l\left(\frac{25}{24}\right)$ braucht man hierbei nur 6 Glieder der Entwickelung, bei der Berechnung von $l\left(\frac{81}{80}\right)$ sogar nur 4. Dadurch findet man

$$\begin{aligned} l2 &= 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,309\,60, \\ l3 &= 1{,}098\,612\,288\,668\,109\,691\,68, \\ l5 &= 1{,}609\,437\,912\,434\,100\,375\,02, \\ l10 &= 2{,}302\,585\,092\,994\,045\,684\,62. \end{aligned}$$

Es ist nicht zu verlangen, dass in diesen Resultaten die beiden letzten Decimalstellen noch genau richtig sind; und zwar ist

bei	$l2$,	$l3$,	$l5$,	$l10$
die obere Fehlergrenze	± 48,	± 67,	± 112,	± 160
und der wirkliche Fehler	$+18$,	$+28$,	$+42$,	$+60$;

d. h. die hier angeführten Werthe von $l2$, $l3$, $l5$, $l10$ sind in den letzten beiden Decimalstellen bezw. um 18, 28, 42, 60 zu gross.

Es ist dem Anfänger sehr zu empfehlen, die hier angedeutete Rechnung wirklich durchzuführen.

Jetzt ist es auch möglich, $l7$ sehr genau auszurechnen, denn es ist

$$7^2 = \frac{49}{50} \cdot 2 \,.\, 5^2,$$

also

$$2l7 = l2 + 2l5 - l\left(\frac{50}{49}\right).$$

Dabei ist nach Gleichung (2.) für $y = 49$

$$\begin{aligned} l\left(\frac{50}{49}\right) &= 2\left(\frac{1}{99} + \frac{1}{3 \,.\, 99^3} + \frac{1}{5 \,.\, 99^5} + \cdots\right) \\ &= 0{,}020\,202\,707\,317\,519\,448\,40, \end{aligned}$$

und wenn man die hier gefundenen Werthe zu Grunde legt,

$$l2 + 2l5 = 3{,}912\,023\,005\,429\,146\,059\,64,$$

also

$$\begin{aligned} 2l7 &= 3{,}891\,820\,298\,110\,626\,611\,24, \\ l7 &= 1{,}945\,910\,149\,055\,313\,305\,62, \end{aligned}$$

ein Werth, der in den beiden letzten Decimalstellen um **51** zu gross ist.

§ 40.

Partes proportionales.

Nach den Gleichungen (16.) und (18.) in § 38 war

$$(1.)\quad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R_1 - R_2,$$

wobei

$$(2.)\quad R_1 - R_2 \leqq \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n+1}$$

ist. Dies giebt für $n = 1$, wenn man der Kürze wegen R statt $R_1 - R_2$ schreibt,

$$(3.)\quad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + R,$$

wo

$$(4.)\quad R \leqq \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3.$$

Setzt man wieder

$$x = \frac{z}{2y+z},$$

also

$$1 + x = \frac{2y+2z}{2y+z}, \quad 1 - x = \frac{2y}{2y+z},$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+z}{y}, \quad \frac{x}{1-x} = \frac{z}{2y},$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$(5.)\quad l(y+z) = ly + \frac{2z}{2y+z} + R,$$

wobei nach Ungleichung (4.)

$$(6.)\quad R \leqq \frac{z^3}{12y^3}.$$

Ist also $y > 10000$, $z \leqq 1$, so wird

$$(7.)\quad R \leqq \frac{1}{12.10^{12}},$$

d. h. R hat in den ersten 13 Decimalstellen keine geltende Ziffer mehr.

Darauf gründet sich bei dem Gebrauche der Logarithmentafeln die Berechtigung für die Interpolation durch die *partes proportionales.*

Sind z. B. in einer solchen Tafel die Logarithmen für alle fünfstelligen Zahlen angegeben, so kann man daraus doch noch den Logarithmus einer siebenstelligen Zahl n bis auf 7 Decimalstellen genau finden, wie folgt.

Da es nur auf die Mantisse des Logarithmus ankommt, so setze man das Decimal-Komma hinter die fünfte Ziffer, nenne die Ganzen y und den übrig bleibenden Decimalbruch z, dann ist

$$n = y + z, \quad \text{wobei} \quad y > 10000 \quad \text{und} \quad z < 1.$$

Jetzt ist nach Gleichung (3.)

$$\text{(8.)} \qquad \mathrm{l}n = \mathrm{l}(y + z) = \mathrm{l}y + \frac{2z}{2y + z} + R_z,$$

$$\text{(9.)} \qquad \mathrm{l}(y + 1) = \mathrm{l}y + \frac{2}{2y + 1} + R_1,$$

wobei man aber die beiden Reste R_z und R_1 vernachlässigen darf, da beide in den ersten 13 Decimalstellen keine geltende Ziffer haben. Setzt man daher

$$\text{(10.)} \qquad \Delta = \mathrm{l}(y + 1) - \mathrm{l}y = \frac{2}{2y + 1};$$

so wird

$$\text{(11.)} \qquad \mathrm{l}n = \mathrm{l}y + \frac{2z}{2y + z},$$

oder, wenn man die Gleichung

$$0 = z \,.\, \Delta - \frac{2z}{2y + 1}$$

addirt,

$$\text{(11a.)} \qquad \mathrm{l}n = \mathrm{l}y + z \,.\, \Delta + \frac{2z}{2y + z} - \frac{2z}{2y + 1}$$

$$= \mathrm{l}y + z \,.\, \Delta + \frac{2z(1 - z)}{(2y + z)(2y + 1)}.$$

Dabei ist aber, da von den beiden Factoren z und $1 - z$ der eine kleiner als $\frac{1}{2}$ und der andere kleiner als 1 sein muss,

$$\frac{2z(1-z)}{(2y+z)(2y+1)} < \frac{2z(1-z)}{4y^2} < \frac{1}{4y^2} < \frac{1}{4 \, . \, 10^8} \, .$$

Setzt man also

$$\mathrm{l}n = \mathrm{l}y + z \, . \, \Delta,$$

so ist der Fehler so klein, dass er in den ersten 8 Decimalstellen keine geltende Ziffer hat.

Man braucht also nur, um $\mathrm{l}n$ zu erhalten, in den Tafeln $\mathrm{l}y$ aufzuschlagen und den Ausdruck

$$z \, . \, \Delta = z[\mathrm{l}(y+1) - \mathrm{l}y]$$

zu addiren, welcher unter dem Namen „*partes proportionales*“ in den Logarithmentafeln an der Seite angegeben ist.

Das Gesagte gilt zunächst für *natürliche* Logarithmen, da aber die *Briggs*'schen Logarithmen aus diesen entstehen, indem man sie sämmtlich mit $M = \log e$ multiplicirt, so gilt es in ähnlicher Weise auch für *Briggs*'sche Logarithmen und ebenso für jedes andere Logarithmen-System.

§ 41.

Methode der unbestimmten Coefficienten.

Bei manchen Functionen ist die Bildung der höheren Ableitungen sehr umständlich: deshalb wählt man zur Entwickelung nach steigenden Potenzen von x einen etwas anderen Weg.

Nach der *Mac-Laurin*'schen Reihe wird

$$(1.) \quad f(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + R,$$

wobei

$$(2.) \qquad A = f(0), \quad A_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots$$

wird. Aus Gleichung (1.) folgt aber durch Differentiation

$$(3.) \quad f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \cdots + nA_n x^{n-1} + \frac{dR}{dx} \, .$$

Ist also die Entwickelung von $f'(x)$ bekannt, so findet man die Werthe der Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus Gleichung (3.). Man muss aber noch zeigen, dass in der auf diese Weise gefundenen Entwickelung der Rest R beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n. Deshalb soll der folgende Satz bewiesen werden:

Ist für hinreichend grosse Werthe von n die Grösse $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein, so gilt dasselbe auch von R.

Beweis. Ist ε eine beliebig kleine Zahl, so gilt für hinreichend grosse Werthe von n die Voraussetzung

$$-\varepsilon < \frac{dR}{dx} < +\varepsilon, \tag{4.}$$

also

$$\frac{dR}{dx} - \varepsilon < 0, \quad \frac{dR}{dx} + \varepsilon > 0,$$

oder

$$\frac{d(R - \varepsilon x)}{dx} < 0, \quad \frac{d(R + \varepsilon x)}{dx} > 0, \tag{4a.}$$

deshalb nimmt $R + \varepsilon x$ mit x beständig zu, während $R - \varepsilon x$ beständig abnimmt, so lange x zunimmt. Für $x = 0$ sind aber beide Functionen gleich 0, folglich ist für positive Werthe von x

$$R + \varepsilon x > 0 \quad \text{und} \quad R - \varepsilon x < 0, \tag{5.}$$

oder

$$-\varepsilon x < R < +\varepsilon x. \tag{5a.}$$

Für negative Werthe von x findet man ebenso

$$+\varepsilon x < R < -\varepsilon x. \tag{6.}$$

In beiden Fällen wird R beliebig klein, denn ε ist beliebig klein.

Dabei ist zu beachten, dass $\frac{dR}{dx}$ das Restglied in der Entwickelung von $f'(x)$ nach steigenden Potenzen von x ist. Man kann daher dem eben bewiesenen Satze auch die Fassung geben:

Lässt sich $f'(x)$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln, so gilt dasselbe auch von $f(x)$.

Mit Hülfe dieses Satzes findet man z. B. sehr leicht die Entwickelung von

$$f(x) = l(1 + x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n + R,$$

denn es wird nach dem binomischen Lehrsatze für

$$-1 < x < +1$$

$$(7.)\quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{dR}{dx}\,,$$

folglich ist

$A = f(0) = \text{l}1 = 0,\quad A_1 = 1,\quad 2A_2 = -1,\quad 3A_3 = +1, \ldots$

und deshalb in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 59 der Tabelle

$$(8.)\qquad \text{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots.$$

Wenn $-1 < x < +1$ ist, so wird dabei R beliebig klein, weil das Restglied $\frac{dR}{dx}$ in der Entwickelung von $f'(x)$ beliebig klein ist.

§ 42.

Entwickelung der Function arctg x nach steigenden Potenzen von x.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 65.)

Aufgabe. Man soll die Function arctg x nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Hier ist

$$(1.)\quad f(x) = \operatorname{arctg} x = A + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + R.$$

$$(2.)\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots + nA_nx^{n-1} + \frac{dR}{dx}\,.$$

Nun wird aber nach dem binomischen Lehrsatze, wenn x ein ächter Bruch ist,

$$(3.)\qquad \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \cdots,$$

folglich ist

$A = f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0,$

$A_1 = 1,\quad A_2 = 0,\quad 3A_3 = -1,\quad 4A_4 = 0,\quad 5A_5 = +1, \ldots$

und deshalb

$$(4.)\qquad \begin{cases} \operatorname{arctg} x = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + - \cdots \\ \qquad\text{für } -1 < x < +1. \end{cases}$$

R wird dabei beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n, weil das Restglied $\frac{dR}{dx}$ in der Entwickelung von $f'(x)$ beliebig klein ist.

§ 43.
Berechnung der Zahl π durch Anwendung der Entwickelung von arc tg x.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 66—68.)

Die Entwickelung von $\operatorname{arctg} x$ nach Potenzen von x ist sicher richtig, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt. Es lässt sich aber auch beweisen, dass sie noch für $x = \pm 1$ richtig bleibt.*) Wenn dies der Fall ist, so findet man daraus unmittelbar den Werth von $\frac{\pi}{4}$, weil $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gleich 1 ist. Denn die Reihe giebt für $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots. \tag{1.}$$

Diese Reihe heisst die *„Reihe von Leibniz"*.

Aus Gleichung (1.) folgt weiter

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots,$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \cdots\right); \tag{2.}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) - \cdots,$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{143} + \cdots\right). \tag{3.}$$

---

*) Der Beweis kann an dieser Stelle übergangen werden, weil die Folgerungen des Satzes hier nur geschichtliches Interesse haben. In den Beispielen auf S. 219 und 220 (§ 47) wird der Beweis nachgeholt.

Berücksichtigt man in Gleichung (2.) die ersten n Glieder und ebenso in Gleichung (3.), so findet man zwei Zahlen, zwischen denen $\frac{\pi}{4}$ liegt. Man erkennt aber auch, dass die Rechnung sehr langwierig werden würde, wenn man nach einer dieser Reihen den Werth von $\frac{\pi}{4}$ auch nur auf 6 Decimalstellen genau berechnen wollte. Man kann aber aus den Gleichungen (2.) und (3.) noch andere Reihen ableiten, die zur Berechnung von π geeigneter sind. Durch Addition der Gleichungen

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \cdots\right) \tag{2a.}$$

und

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 2\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} + \cdots\right) \tag{3a.}$$

erhält man nämlich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} - \frac{1}{11.13} + - \cdots\right),$$

also

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2.4\left(\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \cdots\right), \tag{4.}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{2}{1.3} - 2.4\left(\frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{7.9.11} + \frac{1}{11.13.15} + \cdots\right). \tag{5.}$$

Durch Addition der Gleichungen (4.) und (5.) findet man in ähnlicher Weise

$$\pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2.4\left(\frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} - \frac{1}{7.9.11} + - \cdots\right),$$

also

$$(6.)\quad \pi = 2 + \frac{2}{1.3} + 2.4.6\left(\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{5.7.9.11} + \cdots\right),$$

oder

$$(7.)\quad \pi = 2 + \frac{2}{1.3} + \frac{2.4}{1.3.5}$$
$$- 2.4.6\left(\frac{1}{3.5.7.9} + \frac{1}{7.9.11.13} + \cdots\right).$$

In dieser Weise kann man fortfahren, wobei man immer stärker convergirende Reihen erhält.

Noch schneller führen die folgenden Methoden zum Ziele. Setzt man

$$(8.)\qquad \operatorname{tg} u = \frac{1}{2}, \quad \text{oder} \quad u = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$(9.)\qquad \operatorname{tg} v = \frac{1}{3}, \quad \text{,,} \quad v = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right),$$

dann wird

$$(10.)\quad \operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1,$$

oder

$$(11.)\qquad u + v = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dies giebt

$$(12.)\qquad \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right),$$

oder

$$(13.)\quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - + \cdots\right)$$

oder

$$(14.)\quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots.$$

Diese Reihe heisst die „*Reihe von Euler*". Sie ist zur Berechnung von π schon weit geeigneter als die Reihe von *Leibniz*.

Machin hat eine Reihe zur Berechnung von π aufgestellt, welche für die numerische Berechnung noch zweckmässiger ist. Er setzte zunächst

$$(15.)\qquad \mathrm{tg}\, u = \frac{1}{5}, \quad \text{also} \quad u = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right).$$

Hieraus folgt

$$(16.)\qquad \mathrm{tg}(2u) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, u}{1 - \mathrm{tg}^2 u} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$(17.)\qquad \mathrm{tg}(4u) = \frac{2\,\mathrm{tg}(2u)}{1 - \mathrm{tg}^2(2u)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Es ist demnach

$$\mathrm{tg}(4u) > 1, \quad \text{also} \quad 4u > \frac{\pi}{4}.$$

Der Unterschied zwischen $4u$ und $\frac{\pi}{4}$ ist offenbar sehr klein; bezeichnet man ihn mit v, so wird

$$(18.)\qquad 4u = \frac{\pi}{4} + v, \quad \text{oder} \quad 4u - v = \frac{\pi}{4}$$

und

$$(19.)\qquad v = 4u - \frac{\pi}{4}.$$

Deshalb erhält man

$$\mathrm{tg}\, v = \mathrm{tg}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{tg}(4u) - \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \mathrm{tg}(4u)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)},$$

oder

$$(20.)\qquad \mathrm{tg}\, v = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}\cdot 1} = \frac{1}{239}.$$

Dies giebt

$$(21.)\qquad v = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right),$$

und mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.) und (15.)

$$(22.)\qquad \frac{\pi}{4} = 4u - v = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right),$$

oder

$$(23.)\qquad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} - + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\,.\,239^3} + - \cdots\right).$$

Will man also den Werth von π bis auf 8 Decimalstellen genau berechnen, so findet man

$$1 : 5 = 0{,}200\,000\,000\,0, \quad -1 : 3\,.\,5^3 = -0{,}002\,666\,666\,7,$$
$$1 : 5\,.\,5^5 = 0{,}000\,064\,000\,0, \quad -1 : 7\,.\,5^7 = -0{,}000\,001\,828\,6,$$
$$1 : 9\,.\,5^9 = 0{,}000\,000\,056\,9, \quad -1 : 11\,.\,5^{11} = -0{,}000\,000\,001\,9,$$
$$1 : 13\,.\,5^{13} = 0{,}000\,000\,000\,1,$$

also

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}200\,064\,057\,0 - 0{,}002\,668\,497\,2$$
$$= 0{,}197\,395\,559\,8.$$

Ferner ist

$$1 : 239 = +\,0{,}004\,184\,100\,4$$
$$-1 : 3\,.\,239^3 = -\,0{,}000\,000\,024\,4,$$

also

$$\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) = 0{,}004\,184\,076\,0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$
$$= 0{,}789\,582\,239\,2 - 0{,}004\,184\,076\,0,$$

oder

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\,163\,2,$$

$$\pi = 3{,}141\,592\,652\,8.$$

Hierbei sind die beiden letzten Decimalstellen nicht mehr sicher, weil schon bei Berechnung von $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)$ durch Vernachlässigung der folgenden Decimalstellen ein kleiner Fehler begangen ist, der in der 10ten Decimalstelle kleiner als $2\frac{1}{2}$ ist. Dieser kleine Fehler wird aber bei der Bildung von π mit 16 multiplicirt, weil

$$\pi = 16\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - 4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

ist. Dazu tritt noch ein Fehler, der von $4\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$ herrührt und der in der letzten Decimalstelle kleiner ist als 4. Der Gesammtfehler ist also kleiner als

$$\frac{44}{10^{10}}.$$

Durch eine Rechnung auf mehr, z. B. auf 20 Decimalstellen findet man dies bestätigt; es wird dann nämlich

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46.$$

Daraus erhält man ohne Weiteres noch die folgenden Zahlen, welche in der Vermessungskunde häufig angewendet werden:

$$\mathrm{arc}\,1^0 = \frac{\pi}{180} = 0{,}017\,453\,292\,519\,943,$$

$$\varrho^0 = \frac{180}{\pi} = 57{,}295\,779\,513\,1;$$

$$\mathrm{arc}\,1' = \frac{\pi}{180\,.\,60} = 0{,}000\,290\,888\,208\,666,$$

$$\varrho' = \frac{180\,.\,60}{\pi} = 3\,437{,}746\,770\,784\,9;$$

$$\mathrm{arc}\,1'' = \frac{\pi}{180\,.\,60\,.\,60} = 0{,}000\,004\,848\,136\,811,$$

$$\varrho'' = \frac{180\,.\,60\,.\,60}{\pi} = 206\,264{,}806\,247\,096\,4.$$

§ 44.
Entwickelung der Function arc sin x nach steigenden Potenzen von x.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 69.)

Aufgabe. Man soll die Function $\arcsin x$ nach steigenden Potenzen von x entwickeln.

Auflösung. Setzt man hier

$$(1.)\quad f(x) = \arcsin x = A + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n + R,$$

so wird nach dem allgemeinen binomischen Lehrsatze

$$(2.)\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= A_1 + 2A_2x + \cdots + nA_nx^{n-1} + \frac{dR}{dx}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots.$$

Wenn x^2 kleiner ist als 1, so wird $\frac{dR}{dx}$ beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n, folglich gilt auch dasselbe für R. Aus den Gleichungen (1.) und (2.) findet man daher

$$A = f(0) = \arcsin 0 = 0,$$

$$A_1 = 1,\quad 2A_2 = 0,\quad 3A_3 = \frac{1}{2},\quad 4A_4 = 0,\quad 5A_5 = \frac{1.3}{2.4}, \ldots,$$

folglich ist

$$(3.)\quad \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\text{für } -1 < x < +1.$$

Auch diese Reihe kann man zur Berechnung von π benutzen. Es ist nämlich

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\quad \text{also}\quad \frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right),$$

folglich wird

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7.2^7} + \cdots.$$

V. Abschnitt.

Convergenz der Reihen.

§ 45.

Erklärungen und vorbereitende Beispiele.

Ist

$$u_m = f(m) \tag{1.}$$

eine gegebene Function der positiven ganzen Zahl m, so bilden die einzelnen Functionswerthe

$$f(0),\quad f(1),\quad f(2), \ldots f(n-1),$$

oder

$$u_0,\quad u_1,\quad u_2, \ldots u_{n-1},$$

eine *endliche Reihe*, welche aus n Gliedern besteht, und deren Summe mit S_n bezeichnet werden möge. Es sei also

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}. \tag{2.}$$

Wächst die positive ganze Zahl n in's Unbegrenzte, so wird aus der *endlichen* Reihe eine *unendliche* Reihe. Dabei kann es vorkommen, dass sich S_n mit unbegrenzt wachsendem n einer *bestimmten*, *endlichen* Grenze S nähert, dass also

$$\lim_{n=\infty} S_n = S \tag{3.}$$

wird. In diesem Falle heisst die unendliche Reihe (oder kürzer: die Reihe) „*convergent*“.

Dies giebt die

Erklärung. *Eine Reihe heisst „convergent“, wenn S_n, die Summe der n ersten Glieder, sich mit unbegrenzt wachsendem n*

einer bestimmten, endlichen Grenze S nähert, welche die „Summe der Reihe“ genannt wird.

Wird S_n mit n zugleich *unendlich gross*, so heisst die Reihe *„divergent“*; wird der Werth von S_n mit wachsendem n *unbestimmt*, so sagt man, „die Reihe *oscillirt*“.

Dabei möge zunächst die Voraussetzung gemacht werden, dass die Reihenfolge der Glieder in keiner Weise geändert werden soll.

Zahlreiche Beispiele für solche unendliche Reihen liefert der vorhergehende Abschnitt, in welchem die *Taylor*'sche Reihe behandelt worden ist. Dort wurde die Convergenz der gebildeten Reihen dadurch geprüft, dass man untersuchte, ob der Rest R für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein wird. Ist dies der Fall, so ist die Reihe in der That *convergent*, denn der Unterschied zwischen der Function $f(x+h)$ und S_n wird beliebig klein, d. h. S_n nähert sich der bestimmten, endlichen Grenze $f(x+h)$ beliebig.

Ein anderes Beispiel liefern die geometrischen Progressionen

$$S_n = A + Ap + Ap^2 + \cdots + Ap^{n-1} = \frac{A(1-p^n)}{1-p}, \tag{4.}$$

wenn p ein ächter Bruch ist, denn dann wird sich nach Formel Nr. 11a der Tabelle S_n der Grenze

$$S = \frac{A}{1-p} \tag{5.}$$

nähern, wenn n unbegrenzt wächst.

Auch hier wird die Differenz

$$S - S_n = \frac{Ap^n}{1-p}$$

beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n.

Soll sich S_n mit wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze S nähern, so müssen die Grössen

$$S - S_n, \quad S - S_{n+1} \quad \text{und deshalb auch} \quad S_{n+1} - S_n = u_n$$

für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein werden; d. h. *die Glieder einer convergenten Reihe müssen von einer*

bestimmten Stelle ab immer kleiner und schliesslich unendlich klein werden. Damit ist nicht gesagt, dass u_{n+1} stets kleiner als u_n sein muss; es ist vielmehr sehr wohl denkbar, dass ab und zu auch grössere Glieder auf kleinere folgen; wenn aber n in's Unbegrenzte wächst, so muss u_n verschwindend klein werden, es muss also

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 \tag{6.}$$

sein.

Diese Bedingung ist eine *nothwendige*, aber durchaus noch keine *hinreichende*, wie das folgende Beispiel zeigen soll.

In der sogenannten „*harmonischen*“ Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

werden die Glieder immer kleiner und schliesslich unendlich klein; trotzdem kann man zeigen, dass S_n beliebig gross wird, wenn man nur n hinreichend gross macht, dass also die Reihe *divergent* ist.

Man setze zu diesem Zwecke

$$n = 2 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m,$$

dann wird

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1} + 2^{m-1}}\right);$$

oder

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right),$$

also

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

Da man jetzt m beliebig gross machen kann, so wird auch S_n beliebig gross, d. h. die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

ist *divergent.*

In der Reihe

$$a - a + a - a + - \cdots$$

wird S_n zwar nicht unendlich gross, aber S_n nähert sich mit wachsendem n keiner *bestimmten* Grenze, denn für *gerade* Werthe von n wird S_n gleich Null und für *ungerade* Werthe von n wird S_n gleich a. Deshalb *oscillirt* diese Reihe.

Die Reihe

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots \tag{7.}$$

ist eine *geometrische Progression* und convergirt, weil in diesem Falle

$$p = \tfrac{1}{3} < 1 \tag{8.}$$

ist. Ihre Summe ist daher nach Gleichung (5.)

$$S = \frac{1}{1 - p} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \tag{9.}$$

Indem man zu den einzelnen Gliedern dieser Reihe die entsprechenden Glieder der *oscillirenden* Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \cdots$$

addirt, erhält man eine dritte Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{26}{27} + \frac{82}{81} - + \cdots$$

und erkennt, dass die Summe S_n der ersten n Glieder dieser Reihe für *gerade* Werthe von n sich wieder dem Grenzwerthe $\frac{1}{2}$, für *ungerade* Werthe von n aber dem Grenzwerthe $\frac{5}{2}$ beliebig nähert, wenn n hinreichend gross wird.

Deshalb *oscillirt* auch diese Reihe, d. h. S_n schwankt zwischen den Grenzwerthen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{2}$ hin und her.

Ein solches Schwanken oder „*Oscilliren*" kann nur eintreten, wenn die Reihe *positive und negative* Glieder enthält. Um diesen Fall auszuschliessen, sollen zunächst nur Reihen mit lauter positiven Gliedern betrachtet werden.

§ 46.

Reihen mit lauter positiven Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 70 und 71.)

Satz 1. *Sind die Glieder einer Reihe sämmtlich positiv, so kann die Reihe niemals oscilliren; sie muss entweder convergiren oder divergiren;* d. h. entweder nähert sich S_n mit wachsendem n einer bestimmten, *endlichen* Grenze, oder S_n wird mit n zugleich *unendlich gross.*

Beweis. Nach Voraussetzung nähert sich S_n keiner bestimmten, endlichen Grenze, wie gross auch die Zahl n sein mag, d. h. es giebt immer noch eine grössere Zahl n_1, für welche S_n und S_{n_1} um eine *endliche* Grösse a_1 von einander verschieden sind; es ist also

$$S_{n_1} - S_n = a_1. \tag{1.}$$

Ebenso kann man jetzt eine Zahl n_2, welche grösser als n_1 ist, so bestimmen, dass

$$S_{n_2} - S_{n_1} = a_2 \tag{2.}$$

eine *endliche* Grösse ist. In derselben Weise kann man fortfahren und die Zahlen $n_3, n_4, \ldots n_q$ so bestimmen, dass

$$S_{n_3} - S_{n_2} = a_3, \quad S_{n_4} - S_{n_3} = a_4, \ldots S_{n_q} - S_{n_{q-1}} = a_q \tag{3.}$$

endliche Grössen sind, welche sämmtlich grösser als eine nicht beliebig kleine Grösse a sind. Indem man die Gleichungen (1.), (2.) und (3.) addirt, erhält man daher

$$S_{n_q} - S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_q \geqq q \cdot a, \tag{4.}$$

oder

$$S_{n_q} \geqq S_n + q \cdot a. \tag{4a.}$$

Da man nun q so gross machen kann, wie man will, so wird auch S_{n_q} beliebig gross und wächst mit q zugleich in's Unendliche.

Dem eben bewiesenen Satze kann man daher auch die folgende Fassung geben:

Satz 1a. *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist convergent, wenn S_n kleiner bleibt als eine endliche Grösse G, wie gross auch n sein mag.*

Daraus ergeben sich dann die folgenden Sätze:

Satz 2. *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

eine convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab

$$u_n \leqq v_n,$$

so ist auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

(die lauter positive Glieder enthalten möge) convergent.

Beweis. Setzt man

$$U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}, \quad V_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$

so wird

$$U_{m+r} - U_m = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{m+r-1},$$
$$V_{m+r} - V_m = v_m + v_{m+1} + \cdots + v_{m+r-1}.$$

Nach Voraussetzung wird

$$u_n \leqq v_n \quad \text{für} \quad n \geqq m;$$

es ist also

$$u_m \leqq v_m, \quad u_{m+1} \leqq v_{m+1}, \quad \ldots u_{m+r-1} \leqq v_{m+r-1},$$

folglich wird

$$U_{m+r} - U_m \leqq V_{m+r} - V_m \leqq V_{m+r},$$

oder

$$U_{m+r} \leqq U_m + V_{m+r}.$$

Dabei sind

$$U_m = u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1}$$

und V_{m+r} endliche Grössen, wie gross auch r sein mag, folglich ist nach Satz 1a die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergent.

Satz 3. *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

eine divergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab

$$u_n \geqq v_n,$$

so ist auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

divergent.

Beweis. Wäre die Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ convergent, so müsste nach dem zweiten Satze auch $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ convergent sein, und das widerstreitet der Voraussetzung.

Satz 4. (Kriterium von *Cauchy*.) *Eine Reihe*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

mit lauter positiven Gliedern convergirt jedenfalls, wenn von einer bestimmten Stelle ab

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1 \tag{5.}$$

ist, wobei k eine von n unabhängige Constante ist.

Beweis. Nach Voraussetzung wird für hinreichend grosse Werthe von n; z. B. für $n \geqq m$

$$u_{n+1} \leqq u_n k;$$

also

$$(6.)\quad \begin{cases} u_m = u_m, \\ u_{m+1} \leqq u_m k, \\ u_{m+2} \leqq u_{m+1} k \leqq u_m k^2, \\ u_{m+3} \leqq u_{m+2} k \leqq u_m k^3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

d. h. von einer bestimmten Stelle ab sind die Glieder der betrachteten Reihe gleich oder kleiner als die der Reihe

$$u_m + u_m k + u_m k^2 + u_m k^3 + \cdots;$$

diese Reihe ist aber *convergent*, denn sie ist eine geometrische Progression, bei welcher der Quotient k kleiner als 1 ist, und deren Summe daher nach Formel Nr. 11a der Tabelle gleich

$$\frac{u_m}{1-k}$$

wird. Deshalb ist nach Satz 2 auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergent. Gleichzeitig erkennt man aus dem Beweise, dass der Fehler kleiner als $\frac{u_m}{1-k}$ wird, wenn man die Reihe hinter dem Gliede u_{m-1} abbricht.

Beispiele.

$$1)\qquad S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Hier ist

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{n!(n+1)},$$

also wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \leqq k < 1,$$

wenn man $n + 1$ grösser als x wählt, folglich ist die Reihe

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

für alle endlichen Werthe von x convergent.

2) $$S_n = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Setzt man in dieser Reihe $u_0 = 0$, so ist

$$u_n = \frac{1.3\ldots(2n-5)(2n-3)}{2.4\ldots(2n-4)(2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$u_{n+1} = \frac{1.3\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4\ldots(2n-2)(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

folglich wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2x^2}{2n(2n+1)} = \frac{\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x^2}{4 + \frac{2}{n}}.$$

Ist x gleich 1, so nähert sich dieser Ausdruck mit wachsendem n dem Werthe 1 beliebig, dann ist also die Bedingung

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1$$

nicht erfüllt, denn k muss um eine *endliche* Grösse von 1 verschieden sein. Damit ist noch nicht gesagt, dass in diesem Falle die Reihe *divergent* ist; es lässt sich vielmehr ihre Convergenz auf einem *anderen Wege* (vergl. S. 214) sehr wohl beweisen.

Ist dagegen

$$x^2 = k < 1,$$

so wird auch

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1;$$

in diesem Falle ist also die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

sicher convergent.

3) $S_n = 1 + \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)^p}$,

wobei $p > 0$ sein möge.

Hier ist

$$u_n = \frac{x^n}{n^p}, \qquad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^p},$$

folglich wird

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \cdot x = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}$$

gleich oder kleiner als ein ächter Bruch k, wenn x **gleich** k ist. Die Reihe

$$1 + \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots$$

ist also *convergent*, wenn x kleiner als 1 ist.

Satz 5. *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern* ***ist divergent****, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1 \tag{7.}$$

ist.

Beweis. Nach Voraussetzung wird

$$\left\{\begin{array}{l} u_m = u_m, \\ u_{m+1} \geqq u_m, \\ u_{m+2} \geqq u_{m+1} \geqq u_m, \\ u_{m+3} \geqq u_{m+2} \geqq u_m, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right. \tag{8.}$$

Da nun die Reihe

$$u_m + u_m + u_m + \cdots$$

divergent ist, so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

nach Satz 3 erst recht divergent.

Die Reihen

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

und

$$1 + \frac{x}{1^p} + \frac{x^2}{2^p} + \frac{x^3}{3^p} + \cdots,$$

welche vorhin in den Beispielen 2 und 3 untersucht wurden, sind daher *divergent*, wenn $x > 1$ ist; denn man kann dann n so gross wählen, dass auch die Grössen $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, nämlich

$$\frac{\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)x^2}{4 + \frac{2}{n}}, \quad \text{bezw.} \quad \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}$$

gleich oder grösser als 1 werden.

Satz 6. *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist convergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

$$\sqrt[n]{u^n} \leqq k < 1 \tag{9.}$$

ist.

Beweis. Nach Voraussetzung ist für $n \geqq m$

$$u_n \leqq k^n, \tag{10.}$$

folglich wird

$$\left\{\begin{array}{l} u_m \leqq k^m, \\ u_{m+1} \leqq k^{m+1}, \\ u_{m+2} \leqq k^{m+2}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right. \tag{11.}$$

d. h. von einer bestimmten Stelle ab sind die Glieder der betrachteten Reihe gleich oder kleiner als die der Reihe

$$1 + k + k^2 + k^3 + \cdots.$$

Diese Reihe ist aber *convergent*, denn sie ist eine geometrische Progression, bei welcher der Quotient k kleiner als 1 ist, und deren Summe daher nach Formel Nr. 11a der Tabelle gleich

$$\frac{1}{1 - k}$$

wird. Deshalb ist nach Satz 2 auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergent.

Dass indessen die bisher aufgestellten Sätze noch nicht immer unmittelbar ausreichen, zeigt das folgende Beispiel.

Soll man die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

untersuchen, so setze man $u_0 = 0$, so dass

$$S_n = 0 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}$$

wird; dann ist

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

und

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich dem Werthe 1 beliebig mit wachsendem n, wird also grösser als jeder beliebige ächte Bruch k. Satz 4 reicht hier deshalb zum Beweise der Convergenz nicht aus.

Ebenso nähert sich

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[n]{n^{-2}} = n^{-\frac{2}{n}}$$

dem Werthe 1 beliebig, denn es ist

$$\log(\sqrt[n]{u_n}) = \log\left(n^{-\frac{2}{n}}\right) = -\frac{2}{n}\log n.$$

Dieser Ausdruck wird aber mit wachsendem n beliebig klein. Nimmt man z. B. die Zahl 10 als Basis des Logarithmensystems und setzt

$$n = 10^m,$$

so wird

$$\log\sqrt[n]{u_n} = -\frac{2m}{10^m},$$

folglich nähert sich $\log \sqrt[n]{u_n}$ mit wachsendem m dem Werthe 0 und deshalb $\sqrt[n]{u_n}$ dem Werthe 1 beliebig.*) Daher ist auch Satz 6 nicht unmittelbar verwendbar.

Setzt man aber

$$u_0 = \frac{1}{1^2},$$

$$u_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2},$$

$$u_2 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2},$$

. . . .

$$u_m = \frac{1}{(2^m)^2} + \frac{1}{(2^m+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^m+2^m-1)^2},$$

so wird

$$u_0 = 1,$$

$$u_1 < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$u_2 < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4},$$

. . . .

$$u_m < \frac{1}{(2^m)^2} + \frac{1}{(2^m)^2} + \cdots \frac{1}{(2^m)^2} = \frac{1}{2^m}.$$

Es ist also

$$u_1 < \frac{1}{2}, \quad \sqrt{u_2} < \frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{u_3} < \frac{1}{2}, \quad \cdots \sqrt[m]{u_m} < \frac{1}{2},$$

und deshalb die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

convergent.

Satz 7. *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

---

*) Ein vollständig strenger Nachweis dafür, dass $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ ist, wird an einer späteren Stelle (Seite 311) gegeben werden.

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1 \tag{12.}$$

ist.

Beweis. Für hinreichend grosse Werthe von m ist in diesem Falle

$$u_m \geqq 1, \quad u_{m+1} \geqq 1, \quad u_{m+2} \geqq 1, \ldots;$$

da nun die Reihe

$$1 + 1 + 1 + \cdots$$

divergent ist, so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

nach Satz 3 erst recht divergent.

Das zu Satz 6 gegebene Beispiel kann man sogleich verallgemeinern und den folgenden Satz beweisen:

Satz 8. *Die Reihe*

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

ist convergent für $p > 1$.

Beweis. Setzt man

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{1}{1^p}, \\ u_1 = \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p}, \\ u_2 = \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{5^p} + \dfrac{1}{6^p} + \dfrac{1}{7^p}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_m = \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dfrac{1}{(2^m+1)^p} + \cdots + \dfrac{1}{(2^{m+1}-1)^p}, \end{array}\right. \tag{13.}$$

dann wird

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 < \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{2^p} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}, \\ u_2 < \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} + \dfrac{1}{4^p} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{p-1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_m < \dfrac{1}{(2^m)^p} + \dfrac{1}{(2^m)^p} + \cdots + \dfrac{1}{(2^m)^p} = \left(\dfrac{1}{2^m}\right)^{p-1}, \end{array}\right. \tag{14.}$$

folglich ist

$$(15.)\quad u_1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}, \quad \sqrt[2]{u_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}, \quad \ldots \sqrt[m]{u_m} < \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1},$$

und da nach Voraussetzung $p-1$ positiv sein soll,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = k < 1.$$

Deshalb ist die Reihe

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

convergent, wenn $p > 1$ ist.

Satz 9. *Die Reihe*

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

ist divergent für $p \leqq 1$.

Beweis. Setzt man in diesem Falle

$$(16.)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{1^p} = 1, \\ u_1 = \frac{1}{2^p}, \\ u_2 = \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}, \\ u_3 = \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ u_m = \frac{1}{(2^{m-1}+1)^p} + \frac{1}{(2^{m-1}+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^p}, \end{cases}$$

dann wird

$$(17.)\quad \begin{cases} u_2 > \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{2}{4p}, \quad \text{oder} \quad 2u_2 > \frac{4}{4p} = 4^{1-p}, \\ u_3 > \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} = \frac{4}{8^p}, \quad \text{oder} \quad 2u_3 > \frac{8}{8p} = 8^{1-p}, \\ \cdot\quad\cdot \\ u_m > \frac{1}{(2^m)^p} + \frac{1}{(2^m)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^p} = \frac{2^{m-1}}{(2^m)^p}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{oder} \quad 2u_m > \frac{2^m}{(2^m)^p} = (2^m)^{1-p}, \end{cases}$$

also

$$(18.)\qquad \sqrt[2]{2u_2} > 2^{1-p}, \quad \sqrt[3]{2u_3} > 2^{1-p}, \ldots \sqrt[m]{2u_m} > 2^{1-p}.$$

Dies giebt, da $p \leqq 1$ und deshalb $1 - p \geqq 0$ ist,

$$\sqrt[m]{2u_m} \geqq 1,$$

folglich ist nach Satz 7 die Reihe

$$2u_0 + 2u_1 + 2u_2 + \cdots$$

und deshalb auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

divergent.

Satz 10. *Ist*

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

eine convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, und ist von einer bestimmten Stelle ab

$$(19.)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

so ist auch die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \ldots,$$

welche gleichfalls lauter positive Glieder enthalten möge), convergent.

Beweis. Nach Voraussetzung ist für $n \geqq m$

$$(19a.)\qquad u_{n+1} \leqq \frac{u_n}{v_n} \cdot v_{n+1},$$

also für $n = m$

$$u_{m+1} \leqq \frac{u_m}{v_m} \cdot v_{m+1},$$

oder, wenn man $\frac{u_m}{v_m}$ mit A bezeichnet,

$$(20.)\qquad u_{m+1} \leqq A \,.\, v_{m+1}.$$

Ferner wird für $n = m + 1, m + 2, \ldots$

$$(21.)\qquad \begin{cases} u_{m+2} \leqq \dfrac{u_{m+1}}{v_{m+1}} \cdot v_{m+2} \leqq A \,.\, v_{m+2}, \\ u_{m+3} \leqq \dfrac{u_{m+2}}{v_{m+2}} \cdot v_{m+3} \leqq A \,.\, v_{m+3}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

Daraus folgt, dass von einer bestimmten Stelle ab die Glieder der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ kleiner sind als die ent-

sprechenden Glieder der Reihe $Av_0 + Av_1 + Av_2 + \cdots$; da aber $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ nach Voraussetzung eine convergente Reihe ist, so gilt dasselbe von

$$Av_0 + Av_1 + Av_2 + \cdots; \tag{22.}$$

deshalb ist auch nach Satz 2 die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergent.

Satz 11. (Kriterium von *Raabe*.) *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern*

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist convergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqq p > 1 \tag{23.}$$

ist.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt

$$n - p \geqq n\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

oder

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{n-p}{n}. \tag{24.}$$

Setzt man jetzt $v_0 = 0$ und für $n > 0$

$$v_n = \frac{1}{n^p}, \tag{25.}$$

so ist die Reihe

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = 0 + \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots$$

nach Satz 8 convergent, weil $p > 1$ ist. Dabei wird

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p. \tag{26.}$$

Nun ist nach Formel Nr. 51a der Tabelle

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(\Theta x);$$

für

$$f(x) = (1+x)^{p+1}, \quad f'(x) = (p+1)(1+x)^p$$

erhält man daher

$$(1+x)^{p+1} = 1 + (p+1)(1+\Theta x)^p \,.\, x.$$

Da $0 \leqq \Theta \leqq +1$ ist, so ist für positive Werthe von x

$$1 + \Theta x \leqq 1 + x,$$

also

$$(1+x)^{p+1} \leqq 1 + (p+1)(1+x)^p \,.\, x = 1 + (px + x)(1+x)^p,$$

oder

$$(1+x)^p(1-px) \leqq 1,$$

$$1 - px \leqq \left(\frac{1}{1+x}\right)^p. \tag{27.}$$

Setzt man in dieser Ungleichung $x = \frac{1}{n}$, so erhält man

$$1 - \frac{p}{n} = \frac{n-p}{n} \leqq \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \tag{28.}$$

oder mit Rücksicht auf Ungleichung (24.)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}. \tag{29.}$$

Es gilt deshalb in diesem Falle Satz 10, d. h. die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist convergent.

Beispiel.

Es sei

$$S_{n+1} = 0 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-3)}{2 \,.\, 4 \ldots (2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1},$$

dann wird für $n \geqq 2$

$$u_n = \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-5)(2n-3)}{2 \,.\, 4 \ldots (2n-4)(2n-2)} \cdot \frac{1}{2n-1},$$

$$u_{n+1} = \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \,.\, 4 \ldots (2n-2)(2n)} \cdot \frac{1}{2n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \frac{4n^2 - 4n + 1}{4n^2 + 2n} = \frac{4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{2}{n}}.$$

Dieser Ausdruck nähert sich mit wachsendem n der Grenze 1 beliebig; deshalb ist Satz 4 nicht anwendbar. Dagegen wird

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left(1-\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}\right)=\frac{6n-1}{4n+2}$$
$$=1+\frac{2n-3}{4n+2}=\frac{11}{10}+\frac{4(n-2)}{5(2n+1)}.$$

Es ist also

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqq\frac{11}{10}>1 \quad \text{für} \quad n\geqq 2,$$

und

$$\lim_{n=\infty}\left[n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\right]=\lim_{n=\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{3}{2},$$

folglich ist die Reihe

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots$$

convergent.

Satz 12. *Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqq 1 \tag{30.}$$

ist.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt

$$n-1\leqq n\frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \text{oder} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq\frac{n-1}{n}. \tag{31.}$$

Setzt man also

$$(m-1)u_m=A, \tag{32.}$$

so ist für hinreichend grosse Werthe von m

$$u_m=\frac{A}{m-1},$$
$$u_{m+1}\geqq\frac{(m-1)u_m}{m}=\frac{A}{m},$$

$$u_{m+2} \geqq \frac{m u_{m+1}}{m+1} \geqq \frac{A}{m+1},$$

$$u_{m+3} \geqq \frac{(m+1) u_{m+2}}{m+2} \geqq \frac{A}{m+2},$$

. . . .

Da nun die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

divergent ist, so ist auch die Reihe

$$A\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{A}{1} + \frac{A}{2} + \frac{A}{3} + \frac{A}{4} + \cdots$$

divergent, folglich ist nach Satz 3

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

erst recht divergent.

§ 47.

Reihen mit positiven und negativen Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 72 und 73.)

Die Bedingungen, welche in dem vorhergehenden Paragraphen für die Convergenz einer Reihe aufgestellt wurden, bezogen sich immer nur auf ihre Glieder *von einer bestimmten Stelle ab.* Die ersten Glieder der Reihe, d. h. die Glieder *bis zu einer bestimmten Stelle*, die noch im Endlichen liegt, sind nur der einen Bedingung unterworfen, dass keines von ihnen unendlich gross wird.

Für Reihen mit positiven und negativen Gliedern gilt zunächst der folgende Satz:

Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern convergirt, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt.

Beweis. Es sei

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}; \tag{1.}$$

hierbei seien die Glieder

$$u_1', \quad u_2', \quad \ldots u_\mu',$$

alle positiv, und die Glieder

$$-u_1'', \quad -u_2'', \ldots -u_\nu''$$

alle negativ. Setzt man also

(2.) $$u_1' + u_2' + \cdots + u_\mu' = S_n', \quad u_1'' + u_2'' + \cdots + u_\nu'' = S_n'',$$

so wird

(3.) $$S_n = S_n' - S_n''.$$

Aus der gegebenen Reihe kann man aber eine andere bilden, indem man sämmtliche Glieder mit dem positiven Vorzeichen nimmt. Diese Reihe ist nach Voraussetzung convergent, d. h. die Summe $S_n' + S_n''$ nähert sich mit wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze. Dies ist aber nur möglich, wenn weder S_n' noch S_n'' mit n zugleich unendlich gross wird. Deshalb nähern sich nach Satz 1a des vorhergehenden Paragraphen S_n' und S_n'' einzeln einer bestimmten, endlichen Grenze, folglich gilt dasselbe auch für

$$S_n = S_n' - S_n''.$$

Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern kann aber auch dann noch *convergiren*, wenn die Summe der absoluten Beträge *divergirt*.

Versteht man unter einer *alternirenden Reihe* eine Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, so gilt z. B. der Satz:

(Kriterium von *Leibniz*.) *Eine alternirende Reihe convergirt, wenn der absolute Betrag der Glieder immer kleiner und schliesslich unendlich klein wird.*

Im Gegensatz zu der Bemerkung auf Seite 200 möge besonders hervorgehoben werden, dass hier von einer bestimmten Stelle ab u_{n+1} *stets kleiner als* u_n *sein muss.* Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann die Reihe auch divergiren.

Beweis. Es sei

(4.) $$S_{2m} = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + - \cdots + u_{2m-2} - u_{2m-1},$$

(5.) $$\begin{cases} Q_1 = u_{2m}, \\ Q_3 = u_{2m} - (u_{2m+1} - u_{2m+2}), \\ Q_5 = u_{2m} - (u_{2m+1} - u_{2m+2}) - (u_{2m+3} - u_{2m+4}), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ Q_{2r-1} = u_{2m} - (u_{2m+1} - u_{2m+2}) - \cdots - (u_{2m+2r-3} - u_{2m+2r-2}); \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} Q_2 = (u_{2m} - u_{2m+1}), \\ Q_4 = (u_{2m} - u_{2m+1}) + (u_{2m+2} - u_{2m+3}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Q_{2r} = (u_{2m} - u_{2m+1}) + (u_{2m+2} - u_{2m+3}) + \cdots \\ \qquad\qquad + (u_{2m+2r-2} - u_{2m+2r-1}). \end{cases}$$

Da nach Voraussetzung die Glieder ihrem absoluten Betrage nach immer kleiner werden, da also für hinreichend grosse Werthe von m

$$u_{2m} > u_{2m+1} > u_{2m+2} > \cdots > u_{2m+2r-1} > 0,$$

so sind in den Gleichungen (5.) und (6.) die Klammergrössen sämmtlich positiv, so dass man erhält

$$(7.)\quad \begin{cases} u_{2m} = Q_1 > Q_3 > Q_5 > \cdots > Q_{2r-1}, \\ 0 < Q_2 < Q_4 < Q_6 < \cdots < Q_{2r}. \end{cases}$$

Ausserdem ist

$$Q_{2r} = Q_{2r-1} - u_{2m+2r-1} < Q_{2r-1},$$

folglich wird

$$(8.)\quad 0 < Q_{2r} < Q_{2r-1} < u_{2m},$$

wie gross auch r sein mag. Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{r=\infty} (Q_{2r-1} - Q_{2r}) = \lim_{r=\infty} u_{2m+2r-1} = 0,$$

deshalb wird, welchen Werth m auch haben mag,

$$(9.)\quad \lim_{r=\infty} Q_{2r-1} = \lim_{r=\infty} Q_{2r},$$

und zwar liegt die gemeinsame Grenze dieser beiden Grössen nach den Ungleichungen (8.) zwischen 0 und u_{2m}. Da aber u_{2m} mit wachsendem m beliebig klein wird, so ist damit bewiesen, dass der Unterschied zwischen

$$S_{2m} \quad \text{und} \quad S_{2m+2r-1} = S_{2m} + Q_{2r-1}$$

und ebenso zwischen

$$S_{2m} \quad \text{und} \quad S_{2m+2r} = S_{2m} + Q_{2r}$$

beliebig klein gemacht werden kann, welchen Werth r auch haben mag, wenn man nur m hinreichend gross macht. S_n nähert sich daher mit wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze S, gleichviel ob n gerade oder ungerade ist, d. h. die Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + - \cdots$$

ist *convergent.*

Für jeden beliebigen Werth von n ist dabei

$$S = S_{2m} + \lim_{r=\infty} Q_{2r}, \tag{10.}$$

folglich wird, da Q_{2r} eine Summe von lauter positiven Grössen ist,

$$S_{2m} < S. \tag{11.}$$

Die Gleichung (10.) kann auch auf die Form

$$S = S_{2m+1} - (u_{2m} - \lim_{r=\infty} Q_{2r}) \tag{10a.}$$

gebracht werden, wobei nach Ungleichung (7.)

$$\lim_{r=\infty} Q_{2r} < u_{2m}, \quad \text{oder} \quad u_{2m} - \lim_{r=\infty} Q_{2r} > 0$$

ist, folglich wird

$$S < S_{2m+1}, \tag{12.}$$

oder, wenn man die Ungleichungen (11.) und (12.) zusammenfasst,

$$S_{2m} < S < S_{2m+1} \quad \text{und ebenso} \quad S_{2m} < S < S_{2m-1}. \tag{13.}$$

Da nun

$$S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m-1} \quad \text{und} \quad S_{2m+1} - S_{2m} < u_{2m} \tag{14.}$$

ist, so ergiebt sich aus den Ungleichungen (13.), dass *der Unterschied zwischen S und S_n kleiner als u_n wird, gleichviel ob n gerade oder ungerade ist.*

Beispiele.

1) Die Reihe

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

ist *convergent*, und zwar ist nach Formel Nr. 60 der Tabelle ihre Summe gleich $l2$, obwohl die Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

divergent ist, wie schon in § 45 gezeigt wurde.

2) Die Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

ist *convergent*, und zwar ist nach Formel Nr. 66 der Tabelle ihre Summe gleich $\frac{\pi}{4}$. Hierdurch ist auch der Nachweis geführt, dass die Formel Nr. 65 der Tabelle noch richtig bleibt für $x = +1$. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

ist dagegen *divergent*. Dies folgt schon daraus, dass

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots,$$

oder

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

ist.

Bei alternirenden Reihen kann ein eigenthümlicher Umstand eintreten. Werden nämlich die absoluten Beträge der Glieder schliesslich nicht beliebig klein, sondern nähern sie sich einer bestimmten, endlichen Grenze ϱ, so werden sich die Differenzen

$$u_m - u_{m+1}$$

der Grenze Null nähern. Es kann also sehr wohl eintreten, dass sich mit wachsendem n

$$S_{2n} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$

einer bestimmten, endlichen Grenze nähert. Dasselbe ist dann bei

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n} = S_{2n} + u_{2n}$$

der Fall; trotzdem ist die Reihe *nicht convergent*, denn es ist nach Voraussetzung

$$\lim_{n=\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n=\infty} u_{2n} = \varrho,$$

d. h. die Summe der Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + - \cdots$$

nähert sich *zwei* endlichen, um ϱ von einander *verschiedenen* Grenzen, jenachdem man eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl

von Gliedern addirt. Eine solche Reihe wird, wie schon in § 45 hervorgehoben wurde, „eine *oscillirende* Reihe“ genannt.

Beispiele.

1) Bei der Reihe

$$a - a + a - a + - \cdots$$

ist

$$S_{2n} = 0, \quad S_{2n+1} = a.$$

2) Bei der Reihe

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + - \cdots$$

ist

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

$$S_{2n+1} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{2n+2}{2n+1},$$

also

$$\lim_{n=\infty} S_{2n} = l2, \quad \lim_{n=\infty} S_{2n+1} = 1 + l2.$$

3) Addirt man zu den Gliedern der convergenten Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 2$$

die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + - - \cdots,$$

so erhält man die Reihe

$$\frac{2}{1} + 0 - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} - \frac{7}{16} - \frac{15}{32} + \frac{65}{64} - \frac{63}{128} - \frac{127}{256} + - - \cdots.$$

Bei dieser Reihe ist

$$\lim_{n=\infty} S_{3n} = 2, \quad \lim_{n=\infty} S_{3n+1} = 3, \quad \lim_{n=\infty} S_{3n+2} = 2\tfrac{1}{2};$$

diese Reihe oscillirt also zwischen *drei* verschiedenen Werthen.

§ 48.
Bedingte und unbedingte Convergenz.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 74.)

Bisher wurde die Annahme gemacht, dass bei den Gliedern einer Reihe eine bestimmte Ordnung festgehalten werde.

Bei einer Summe mit einer *endlichen* Anzahl von Gliedern ändert sich der Werth der Summe gar nicht, wenn man die Aufeinanderfolge der Glieder ändert; bei Summen mit unendlich vielen Gliedern aber, d. h. also bei unendlichen Reihen kann sich möglicher Weise der Werth der Summe mit der Reihenfolge der Glieder ändern. Ist z. B.

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right)$$

und

$$S_n' = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

so wird

$$S_n' - S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right),$$

oder

$$S_n' - S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right].$$

Nun wird aber

$$\lim_{n=\infty} S_n = l2, \quad \lim_{n=\infty} (S_n' - S_n) = \frac{1}{2} l2,$$

folglich ist

$$\lim S_n' = \frac{3}{2} l2 = \frac{3}{2} \lim S_n.$$

Die Reihen

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots$$

und

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}++-\cdots$$

sind also beide convergent und jede von ihnen enthält, wenn man sie nur weit genug fortsetzt, sämmtliche Glieder, welche die andere enthält, aber ihre Summen haben *verschiedene Werthe, weil die Aufeinanderfolge der Glieder in den beiden Reihen eine verschiedene ist.*

Zwei Reihen, welche sich nur durch die Aufeinanderfolge ihrer Glieder von einander unterscheiden, müssen natürlich so beschaffen sein, dass jedes Glied der ersten Reihe gleichfalls in der zweiten Reihe, wenn auch an einer späteren Stelle, vorkommt. Bezeichnet man z. B. mit

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

die Summe der n ersten Glieder in der einen Reihe und mit

$$S_p' = u_0' + u_1' + \cdots + u'_{p-1}$$

die Summe der p ersten Glieder in der anderen Reihe, so kann man p immer so gross machen, dass *alle* in S_n enthaltenen Glieder $u_0, u_1, \ldots u_{n-1}$ auch unter den Gliedern von S_p' wirklich vorkommen.

Erklärung. *Eine Reihe, bei der sich die Summe der n ersten Glieder mit wachsendem n nur unter der Bedingung derselben endlichen Grenze nähert, dass die Aufeinanderfolge der Glieder eine bestimmte ist, heisst „bedingt convergent". Bleibt aber dieser Grenzwerth derselbe, wie man auch die Glieder der Reihe anordnen mag, so heisst die Reihe „unbedingt convergent".*

Dabei gilt nun der folgende Satz:

Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn nach Absonderung von S_n die Summe von beliebig vielen Gliedern, welche aus den noch folgenden Gliedern willkürlich ausgewählt sind, beliebig klein wird für hinreichend grosse Werthe von n.

Beweis. Um zu zeigen, dass sich dann

(1.) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$, und $S_p' = u_0' + u_1' + \cdots + u'_{p-1}$

derselben endlichen Grenze nähern, kann man p so gross wählen, dass die Glieder

$$u_0,\ u_1,\ \ldots u_{n-1}$$

sämmtlich unter den Gliedern

$$u_0',\ u_1',\ \ldots u'_{p-1}$$

enthalten sind. Ausserdem kommen in S_p' noch beliebig viele andere Glieder

$$u_r,\ u_s,\ u_t,\ \ldots$$

vor, so dass

(2.) $$S_p' = S_n + u_r + u_s + u_t + \cdots$$

wird. Nach Voraussetzung ist aber

(3.) $$\lim_{n=\infty}(u_r + u_s + u_t + \cdots) = 0,$$

folglich wird

(4.) $$\lim S_p' = \lim S_n:$$

d. h. unter der gemachten Voraussetzung nähert sich die Summe S_n mit wachsendem n derselben Grenze, wie man auch die Reihenfolge der Glieder bestimmen mag.

Diese Voraussetzung, unter welcher der eben bewiesene Satz gilt, wird offenbar erfüllt, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt. Bezeichnet man nämlich mit $|u|$ den absoluten Betrag von u, und nähert sich

(5.) $$\Sigma_n = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}|$$

mit wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze Σ, so wird für hinreichend grosse Werthe von n

(6.) $$\Sigma_{n+\alpha} - \Sigma_n = |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+\alpha-1}|$$

beliebig klein, folglich erst recht

$$u_r + u_s + u_t + \cdots,$$

wobei $u_r,\ u_s,\ u_t, \ldots$ aus den Gliedern $u_n,\ u_{n+1}, \ldots u_{n+\alpha-1}$ willkürlich ausgewählt sind.

Hiervon gilt aber auch die Umkehrung:

Wird bei willkürlicher Auswahl der Glieder $u_r,\ u_s,\ u_t, \ldots$ aus den Gliedern $u_n,\ u_{n+1}, \ldots u_{n+\alpha-1}$ die Summe

$$u_r + u_s + u_t + \cdots$$

für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein, so ist in der Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *die Summe der absoluten Beträge eine convergente Reihe.*

Beweis. Setzt man

$$S_{n+\alpha} - S_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+\alpha-1} = D_\alpha \tag{7.}$$

und bezeichnet die Summe aller *positiven* Glieder, welche in D_α enthalten sind, mit D_α' und die Summe aller in D_α enthaltenen *negativen* Glieder mit $-D_\alpha''$, so ist

$$D_\alpha = D_\alpha' - D_\alpha''. \tag{8.}$$

Nach Voraussetzung müssen D_α' und D_α'' *einzeln* beliebig klein werden, folglich wird auch

$$\Sigma_{n+\alpha} - \Sigma_n = D_\alpha' + D_\alpha'' \tag{9.}$$

beliebig klein für hinreichend grosse Werthe von n. Σ_n und $\Sigma_{n+\alpha}$ nähern sich daher mit wachsendem n demselben Grenzwerthe Σ, d. h. die Summe der absoluten Beträge ist *convergent.*

Der vorhin ausgesprochene Satz deckt sich daher mit dem folgenden Satze:

Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt; und umgekehrt.

§ 49.

Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Reihen. Wurzelausziehung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 75.)

Satz 1. *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{1.}$$

und

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{2.}$$

zwei (bedingt oder unbedingt) convergente Reihen, so werden diese Reihen addirt, indem man die gleichstelligen Glieder addirt; es wird also

$$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots \tag{3.}$$

Beweis. Setzt man

$$U_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1}, \tag{4.}$$

$$V_m = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1}, \tag{5.}$$

so wird

$$U_m + V_m = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_{m-1} + v_{m-1}). \tag{6.}$$

Nun ist aber

$$\lim_{m=\infty}(U_m + V_m) = \lim_{m=\infty} U_m + \lim_{m=\infty} V_m = U + V, \tag{7.}$$

folglich erhält man aus Gleichung (6.), wenn m in's Unbegrenzte wächst, die convergente Reihe

$$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots. \tag{8.}$$

In derselben Weise kann man auch drei und mehr Reihen addiren.

Satz 2. *Sind wieder durch die Gleichungen* (1.) *und* (2.) *zwei (bedingt oder unbedingt) convergente Reihen gegeben, so werden diese Reihen von einander subtrahirt, indem man die gleichstelligen Glieder von einander subtrahirt,* also

$$U - V = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots. \tag{9.}$$

Der Beweis wird in derselben Weise wie bei der Addition geführt.

Satz 3. *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{10.}$$

und

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{11.}$$

zwei unbedingt convergente Reihen, und ist

$$\left\{\begin{array}{l} w_0 = u_0 v_0, \\ w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \end{array}\right. \tag{12.}$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt convergent, und ihre Summe W ist gleich dem Producte UV der Summen der beiden ersten Reihen.

Beweis. Es sei

$$(13.)\quad \begin{cases} U_m = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{m-1}, \\ V_m = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m-1}, \\ W_m = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{m-1}, \end{cases}$$

und es mögen zunächst die Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots v_0, v_1, v_2, \ldots$ alle positiv sein, dann ist für $m = 2n$

$$U_{2n} . V_{2n} = W_{2n} + (u_1 v_{2n-1} + u_2 v_{2n-2} + \cdots + u_{2n-2} v_2 + u_{2n-1} v_1)$$
$$+ \cdots + (u_{2n-2} v_{2n-1} + u_{2n-1} v_{2n-2}) + u_{2n-1} v_{2n-1},$$

also

$$(14.)\quad U_{2n} . V_{2n} > W_{2n}.$$

Dagegen ist

$$W_{2n} = U_n . V_n + (u_0 v_n + u_n v_0) + (u_0 v_{n+1} + u_1 v_n + u_n v_1 + u_{n+1} v_0)$$
$$+ \cdots + (u_0 v_{2n-1} + u_1 v_{2n-2} + \cdots + u_{2n-2} v_1 + u_{2n-1} v_0),$$

also

$$(15.)\quad W_{2n} > U_n . V_n.$$

Ebenso kann man zeigen, dass

$$(16.)\quad U_{2n+1} . V_{2n+1} > W_{2n+1} > U_n . V_n$$

ist. Lässt man aber n immer grösser werden, so nähern sich die Producte $U_n . V_n$ und $U_{2n} . V_{2n}$, bezw. $U_{2n+1} . V_{2n+1}$ nach Voraussetzung derselben endlichen Grenze $U . V$, folglich nähern sich auch die dazwischen liegenden Werthe W_{2n} bezw. W_{2n+1} einer bestimmten, endlichen Grenze W, und es wird

$$(17.)\quad W = U . V.$$

Enthalten die Reihen U und V positive und negative Glieder, sind sie aber, wie vorausgesetzt wurde, *unbedingt convergent*, d. h. sind auch noch die Summen der absoluten Beträge convergent, so nähert sich der Ausdruck

$$U_n . V_n - W_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-2} v_{n-1} + u_{n-1} v_{n-2}) + \cdots$$
$$+ (u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-2} v_2 + u_{n-1} v_1),$$

wie vorhin gezeigt wurde, mit wachsendem n dem Werthe 0, wenn man die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ sämmt-

lich durch ihre absoluten Beträge ersetzt; er nähert sich also dem Werthe 0 erst recht, wenn diese Grössen theilweise negativ sind. Es wird daher auch in diesem Falle

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} U_n \,.\, V_n = U \,.\, V. \tag{18.}$$

Dabei ist auch

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

eine *unbedingt convergente* Reihe; denn ersetzt man die Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots$ in den Gleichungen

$$\begin{aligned} w_0 &= u_0 v_0, \\ w_1 &= u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ w_2 &= u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

durch ihre absoluten Beträge, so mögen dadurch die Grössen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ in $w_0', w_1', w_2', \ldots$ übergehen. Bezeichnet man nun den absoluten Betrag von w_0 mit $|w_0|$, den von w_1 mit $|w_1|, \ldots$, so wird

$$|w_0| = w_0', \quad |w_1| \leqq w_1', \quad |w_2| \leqq w_2', \ldots . \tag{19.}$$

Jetzt enthält aber die Reihe

$$w_0' + w_1' + w_2' + \cdots$$

lauter positive Glieder und ist convergent, folglich gilt dasselbe auch für

$$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots,$$

d. h. die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

ist *unbedingt convergent.*

Beispiel.

$$U = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{20.}$$

$$V = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots \tag{21.}$$

sind zwei unbedingt convergente Reihen, folglich ist

$$U.V = 1 + \left(\frac{x}{1!} + \frac{y}{1!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{xy}{1!\,1!} + \frac{y^2}{2!}\right) + \cdots . \tag{22.}$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$(23.)\quad w_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{y^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}\Big[x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + \frac{n}{1!}xy^{n-1} + y^n\Big]$$

$$= \frac{(x+y)^n}{n!},$$

folglich erhält man

$$(24.)\quad U \cdot V = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots.$$

Setzt man für U und V nach Formel Nr. 52 der Tabelle ihre Werthe ein, so ergiebt sich hieraus die bekannte Formel

$$(25.)\quad e^x e^y = e^{x+y}.$$

In derselben Weise kann man auch das Product von drei oder mehr *unbedingt convergenten* Reihen bilden.

Macht man die Factoren eines solchen Productes sämmtlich einander gleich, so erhält man die *Potenz* einer Reihe. Ist z. B. wieder

$$(26.)\quad U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

eine unbedingt convergente Reihe, so wird auch

$$(27.)\quad U^m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$

eine unbedingt convergente Reihe, bei welcher nach den Regeln der Multiplication

$$(28.)\quad A_n = \Sigma \frac{m!}{\alpha_0!\, \alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!} u_0^{\alpha_0} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_n^{\alpha_n}$$

ist. Die Summation erstreckt sich dabei auf alle Werthe von $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, für welche

$$(29.)\quad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n \end{cases}$$

wird. Deshalb kann α_n nur die Werthe 0 und 1 annehmen, d. h. A_n ist in Bezug auf u_n nur vom *ersten* Grade, ein Umstand, welcher für das Folgende von Bedeutung ist. Die ausführliche Ableitung des in Gleichung (28.) ausgesprochenen Gesetzes für die Bildung von A_n kann übergangen werden, weil für die Berechnung der einzelnen Glieder $A_0, A_1, A_2, \ldots$ die recurrirende Formel

$$(30.)\quad nu_0A_n + [n-(m+1)]u_1A_{n-1} + [n-2(m+1)]u_2A_{n-2} + [n-3(m+1)]u_3A_{n-3} + \cdots + [n-(n-1)(m+1)]u_{n-1}A_1 + [n-n(m+1)]u_nA_0 = 0$$

ausreicht, welche sogleich durch den Schluss von m auf $m+1$ bewiesen werden soll.*)

Durch Multiplication der Gleichungen (26.) und (27.) findet man nämlich

$$(31.)\qquad U^{m+1} = B_0 + B_1 + B_2 + \cdots,$$

wobei nach den Gleichungen (12.)

$$(32.)\quad \begin{cases} B_0 = u_0A_0, \\ B_1 = u_0A_1 + u_1A_0, \\ B_2 = u_0A_2 + u_1A_1 + u_2A_0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ B_n = u_0A_n + u_1A_{n-1} + u_2A_{n-2} + \cdots + u_{n-1}A_1 + u_nA_0 \end{cases}$$

ist. Deshalb kann man die Gleichung (30.) auf die Form

$$(33.)\quad n(u_0A_n + u_1A_{n-1} + u_2A_{n-2} + \cdots + u_{n-1}A_1 + u_nA_0) - (m+1)[u_1A_{n-1} + 2u_2A_{n-2} + 3u_3A_{n-3} + \cdots + (n-1)u_{n-1}A_1 + nu_nA_0] = 0,$$

oder

$$(34.)\quad nB_n - (m+1)[u_1A_{n-1} + 2u_2A_{n-2} + 3u_3A_{n-3} + \cdots + (n-1)u_{n-1}A_1 + nu_nA_0] = 0$$

bringen. Vertauscht man in dieser Gleichung der Reihe nach n mit $n-1,\ n-2,\ \ldots 3, 2, 1$, so erhält man die Gleichungen

---

*) Sollte dem Anfänger der Beweis Schwierigkeiten bereiten, so mögen zunächst die besonderen Fälle $m = 2, 3, 4, \ldots$ behandelt werden.

$$
(35.)\quad \begin{cases}
(n-1)B_{n-1}-(m+1)[u_1A_{n-2}+2u_2A_{n-3}+3u_3A_{n-4}+\cdots \\
\qquad\qquad +(n-1)u_{n-1}A_0]=0, \\
(n-2)B_{n-2}-(m+1)[u_1A_{n-3}+2u_2A_{n-4}+3u_3A_{n-5}+\cdots \\
\qquad\qquad +(n-2)u_{n-2}A_0]=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
3B_3-(m+1)[u_1A_2+2u_2A_1+3u_3A_0]=0, \\
2B_2-(m+1)[u_1A_1+2u_2A_0]=0, \\
B_1-(m+1)u_1A_0=0.
\end{cases}
$$

Indem man die Gleichungen (34.) und (35.) bezw. mit u_0, u_1, u_2, u_3, ... u_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1} multiplicirt und dann zu einander addirt, ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
&nu_0B_n+(n-1)u_1B_{n-1}+(n-2)u_2B_{n-2}+\cdots \\
&\qquad\qquad +3u_{n-3}B_3+2u_{n-2}B_2+u_{n-1}B_1 \\
&-(m+1)[u_1(u_0A_{n-1}+u_1A_{n-2}+u_2A_{n-3}+\cdots \\
&\qquad\qquad +u_{n-3}A_2+u_{n-2}A_1+u_{n-1}A_0) \\
&+2u_2(u_0A_{n-2}+u_1A_{n-3}+u_2A_{n-4}+\cdots+u_{n-3}A_1+u_{n-2}A_0) \\
&+3u_3(u_0A_{n-3}+u_1A_{n-4}+u_2A_{n-5}+\cdots+u_{n-3}A_0) \\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+(n-2)u_{n-2}(u_0A_2+u_1A_1+u_2A_0)+(n-1)u_{n-1}(u_0A_1+u_1A_0) \\
&\qquad\qquad +nu_nu_0A_0]=0,
\end{aligned}
$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (32.)

$$
\begin{aligned}
(36.)\quad &nu_0B_n+(n-1)u_1B_{n-1}+(n-2)u_2B_{n-2}+\cdots \\
&\qquad\qquad +3u_{n-3}B_3+2u_{n-2}B_2+u_{n-1}B_1 \\
&-(m+1)[u_1B_{n-1}+2u_2B_{n-2}+3u_3B_{n-3}+\cdots \\
&\qquad\qquad +(n-2)u_{n-2}B_2+(n-1)u_{n-1}B_1+nu_nB_0]=0,
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
(36\text{a}.)\quad &nu_0B_n+[n-(m+2)]u_1B_{n-1}+[n-2(m+2)]u_2B_{n-2} \\
&\qquad +[n-3(m+2)]u_3B_{n-3}+\cdots \\
&\qquad +[n-(n-1)(m+2)]u_{n-1}B_1+[n-n(m+2)]u_nB_0=0.
\end{aligned}
$$

Dies ist aber die Formel, welche sich aus Gleichung (30.) ergiebt, indem man m mit $m+1$ und demgemäss die Grössen A_0, A_1, A_2, ... A_n mit B_0, B_1, B_2, ... B_n vertauscht. Nun ist

die Formel zunächst richtig für $m = 1$, denn für diesen Werth von m wird

$$A_0 = u_0, \; A_1 = u_1, \; A_2 = u_2, \ldots A_n = u_n,$$

so dass die Gleichung (30.) übergeht in

$$(30a.) \quad nu_0u_n + (n-2)u_1u_{n-1} + (n-4)u_2u_{n-2} + \cdots$$
$$+ (4-n)u_{n-2}u_2 + (2-n)u_{n-1}u_1 - nu_nu_0 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber richtig, denn auf der linken Seite heben sich je zwei Glieder, von denen das eine ebenso weit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht, gegen einander fort.

Deshalb ist die Gleichung (30.) auch richtig für $m = 2$, und deshalb dann auch für $m = 3$ und so fort, d. h. sie ist richtig für alle Werthe von m.

Bei der Division der unbedingt convergenten Reihe

$$W = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

durch die unbedingt convergente Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

wird eine Reihe

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

gesucht, für welche

$$(37.) \qquad UV = W$$

wird. Zwischen den Gliedern dieser 3 Reihen gelten daher dieselben Beziehungen wie bei der Multiplication, nur sind jetzt die Grössen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ *gegeben*, während die Grössen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ *gesucht* sind. Diese findet man daher der Reihe nach aus den Gleichungen (12.); es ist nämlich unter der Voraussetzung, dass u_0 von 0 verschieden ist,

$$w_0 = u_0v_0, \qquad \text{also} \qquad v_0 = \frac{w_0}{u_0},$$

$$w_1 = u_0v_1 + u_1v_0, \qquad \text{„} \qquad v_1 = \frac{w_1 - u_1v_0}{u_0},$$

$$w_2 = u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0, \qquad \text{„} \qquad v_2 = \frac{w_2 - u_1v_1 - u_2v_0}{u_0},$$

. . . .

allgemein

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_n v_0,$$

also

$$(38.) \qquad v_n = \frac{w_n - u_1 v_{n-1} - u_2 v_{n-2} - \cdots - u_n v_0}{u_0}.$$

Lässt sich dann zeigen, dass die Reihe

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

gleichfalls *unbedingt convergent* ist, so ergiebt sich aus der Berechnung der Grössen $v_0, v_1, v_2, \ldots$, dass $UV = W$ sein muss, folglich wird

$$(39.) \qquad V = \frac{W}{U}.$$

Schliesslich kann man auch aus der *Potenzirung* die *Wurzelausziehung* herleiten. Ist nämlich die Reihe

$$(40.) \qquad S = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

gegeben, so findet man die Reihe

$$(41.) \qquad \sqrt[m]{S} = U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots,$$

indem man nach und nach die einzelnen Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so bestimmt, dass

$$(42.) \qquad U^m = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

wird. Dies ist mit Hülfe der Gleichung (30.) leicht möglich, wenn man aus A_0 die m^{te} Wurzel ausziehen kann. Es ist nämlich

$$(43.) \qquad A_0 = u_0^m, \quad \text{also} \quad u_0 = \sqrt[m]{A_0},$$

und ferner nach Gleichung (30.)

$$u_0 A_1 - m u_1 A_0 = 0, \quad \text{also} \quad u_1 = \frac{u_0 A_1}{m A_0},$$

$$2(u_0 A_2 + u_1 A_1) - (m+1) u_1 A_1 - 2m u_2 A_0 = 0,$$

also

$$u_2 = \frac{2(u_0 A_2 + u_1 A_1) - (m+1) u_1 A_1}{2m A_0},$$

. . . .

allgemein

$$n(u_0A_n + u_1A_{n-1} + u_2A_{n-2} + \cdots + u_{n-1}A_1) - (m+1)[u_1A_{n-1} + 2u_2A_{n-2} + \cdots + (n-1)u_{n-1}A_1] - nmu_nA_0 = 0,$$

also

$$(44.)\quad u_n = \{n(u_0A_n + u_1A_{n-1} + u_2A_{n-2} + \cdots + u_{n-1}A_1) - (m+1)[u_1A_{n-1} + 2u_2A_{n-2} + \cdots + (n-1)u_{n-1}A_1]\} : nmA_0.$$

Lässt sich dann zeigen, dass die Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

unbedingt convergent ist, so wird

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = S$$

gleichfalls eine unbedingt convergente Reihe, und es ist

$$U = \sqrt[m]{S}.$$

In dieser Weise kann man die algebraischen Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens, Dividirens und der Wurzelausziehung auf die unendlichen Reihen übertragen.

§ 50.

Convergenz der Potenzreihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 76.)

Unter einer *Potenzreihe* versteht man eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

Von einer solchen Reihe gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. *Eine Potenzreihe convergirt unbedingt, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

$$\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| \leqq k < 1$$

ist, d. h. für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4 in § 46.

Satz 2. *Eine Potenzreihe convergirt unbedingt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Grösse x_0, wenn von einer bestimmten Stelle ab*

$$|a_n| x_0^n \leqq g$$

ist, wobei g eine bestimmte endliche Grösse bedeutet.

Beweis. Nach Voraussetzung ist für hinreichend grosse Werthe von m

$$|a_m| x_0^m \leqq g, \quad |a_{m+1}| x_0^{m+1} \leqq g, \quad |a_{m+2}| x_0^{m+2} \leqq g, \ldots,$$

folglich ist, wenn x vorläufig positiv genommen wird,

$$|a_m x^m| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^m, \quad |a_{m+1} x^{m+1}| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+1},$$

$$|a_{m+2} x^{m+2}| \leqq g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+2}, \ldots.$$

Da nun $\frac{x}{x_0}$ nach Voraussetzung ein ächter Bruch ist, so wird die geometrische Progression

$$g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^m + g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+1} + g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{m+2} + \cdots$$

$$= g \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^m \left[1 + \frac{x}{x_0} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots\right]$$

eine convergente Reihe, folglich erst recht

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots,$$

d. h. die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

ist *unbedingt convergent.*

In der Reihe wird nur das Vorzeichen der Glieder $a_1 x$, $a_3 x^3$, $a_5 x^5, \ldots$ geändert, wenn man x mit $-x$ vertauscht. Der Satz gilt also für positive und negative Werthe von x, wenn nur der absolute Betrag von x kleiner ist als x_0.

§ 51.

Convergenz der periodischen Reihen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 77 und 78.)

Die Reihen von der Form

$$(1.)\quad \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + a_3\cos(3x) + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

nennt man „*periodische Reihen*", weil die Glieder sämmtlich denselben Werth behalten, wenn man x um ein Vielfaches von 2π vermehrt oder vermindert.

Zunächst möge der einfache Fall betrachtet werden, wo die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ alle einander gleich und die Coefficienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sämmtlich gleich 0 sind; es sei also

$$(2.)\quad S_n = a_0\Big[\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cdots + \cos(n-1)x\Big].$$

Aus der bekannten Formel

$$\sin a - \sin b = 2\sin\Big(\frac{a-b}{2}\Big)\cos\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

folgt für $a = \frac{2m+1}{2}x,\quad b = \frac{2m-1}{2}x$

$$(3.)\quad 2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\cos(mx) = \sin\Big(\frac{2m+1}{2}x\Big) - \sin\Big(\frac{2m-1}{2}x\Big).$$

Multiplicirt man Gleichung (2.) mit $2\sin\Big(\frac{x}{2}\Big)$, so erhält man daher

$$(4.)\quad 2S_n\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) = a_0\Big[\sin\Big(\frac{x}{2}\Big) + \Big\{\sin\Big(\frac{3x}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big\}$$
$$+ \Big\{\sin\Big(\frac{5x}{2}\Big) - \sin\Big(\frac{3x}{2}\Big)\Big\}$$
$$+ \cdots + \Big\{\sin\Big(\frac{2n-1}{2}x\Big) - \sin\Big(\frac{(2n-3)}{2}x\Big)\Big\}$$
$$= a_0\sin\Big(\frac{2n-1}{2}x\Big),$$

oder

$$(5.)\qquad S_n = \frac{a_0 \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Wächst n in's Unbegrenzte, so schwankt der Werth von $\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$ zwischen -1 und $+1$, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze, folglich ist die Reihe *nicht convergent.*

Jetzt seien die Coefficienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ alle einander gleich, und die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien sämmtlich gleich 0; es sei also

$$(6.)\qquad S_n' = b_1[\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)].$$

Aus der bekannten Formel

$$\cos b - \cos a = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

folgt für $a = \frac{2m+1}{2}x,\quad b = \frac{2m-1}{2}x$

$$(7.)\qquad 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(mx) = \cos\left(\frac{2m-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2m+1}{2}x\right).$$

Multiplicirt man Gleichung (6.) mit $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, so erhält man daher

$$(8.)\qquad \begin{aligned} 2S_n'\sin\left(\frac{x}{2}\right) = b_1\Big[&\left\{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right\} \\ &+ \left\{\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2}\right)\right\} + \cdots \\ &+ \left\{\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right\}\Big] \\ = b_1&\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right], \end{aligned}$$

oder

$$S_n' = \frac{b_1}{2}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right], \tag{9.}$$

eine Grösse, die sich ebenfalls keiner bestimmten Grenze nähert. wenn n in's Unbegrenzte wächst, folglich ist auch diese Reihe *nicht convergent.*

Bilden die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine *steigende* Reihe, so werden sich S_n und S_n' im Allgemeinen noch weniger einer bestimmten, endlichen Grenze nähern; deshalb möge dieser Fall von der Betrachtung ausgeschlossen werden, so dass nur noch untersucht werden muss, ob die periodischen Reihen dann convergent sind, wenn die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *fallende* Reihen bilden. Es sei jetzt also

$$S_n = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos(2x) + \cdots + a_{n-1}\cos(n-1)x, \tag{10.}$$

wobei

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0 \tag{11.}$$

sein möge; dann wird nach Gleichung (3.)

$$2S_n\sin\left(\frac{x}{2}\right) = a_0\sin\left(\frac{x}{2}\right) + a_1\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right] + a_2\left[\sin\left(\frac{5x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right] + \cdots + a_{n-1}\left[\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{2n-3}{2}x\right)\right],$$

oder

$$2S_n\sin\left(\frac{x}{2}\right) - a_{n-1}\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right) = \tag{12.}$$

$$(a_0 - a_1)\sin\left(\frac{x}{2}\right) + (a_1 - a_2)\sin\left(\frac{3x}{2}\right) + (a_2 - a_3)\sin\left(\frac{5x}{2}\right) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1})\sin\left(\frac{2n-3}{2}x\right).$$

In der Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) = a_0 - a_{n-1} \tag{13.}$$

sind sämmtliche Glieder positiv, und die Summe der ersten n

Glieder nähert sich mit wachsendem n der bestimmten, endlichen Grenze a_0, d. h. die in Gleichung (13.) angegebene Reihe ist *unbedingt* convergent. Deshalb ist auch die in Gleichung (12.) angegebene Reihe *unbedingt* convergent, da der absolute Betrag der einzelnen Glieder kleiner ist als die entsprechenden Glieder in der Reihe

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots.$$

Da noch

$$\lim_{n=\infty} a_{n-1} \sin\left(\frac{2n-1}{2} x\right) = 0$$

ist, so nähert sich $2S_n \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ mit wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze. Dasselbe gilt auch für S_n selbst, wenn man die Werthe von x ausnimmt, für welche $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ gleich 0 wird. Dies giebt den Satz:

Die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots$$

ist convergent für alle Werthe von x, welche von 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... verschieden sind, wenn die Coefficiententen a_0, a_1, a_2, a_3, ... positiv sind und eine bis in's unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden.

Indem man x mit $x + \pi$ vertauscht, findet man, dass die Reihe

$$+ \tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) - a_3 \cos(3x) + - \cdots$$

unter denselben Bedingungen für alle Werthe von x convergirt, die von $\pm \pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ... verschieden sind.

Ebenso findet man, wenn die Coefficienten b_1, b_2, b_3, ... positiv sind und eine bis in's unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, wenn also

$$(14.)\qquad b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0,$$

aus

$$(15.)\qquad S_n' = b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + \cdots + b_n \sin(nx),$$

indem man beide Seiten dieser Gleichung mit $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ multiplicirt und Gleichung (7.) anwendet,

$$(16.)\quad 2S_n'\sin\left(\frac{x}{2}\right) = b_1\cos\left(\frac{x}{2}\right) - (b_1-b_2)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - (b_2-b_3)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

$$-\cdots-(b_{n-1}-b_n)\cos\left(\frac{2n-1}{2}x\right) - b_n\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf die jetzt geltenden Voraussetzungen die Reihe

$$(17.)\qquad (b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\cdots = b_1$$

unbedingt convergent, folglich erst recht die Reihe

$$(b_1-b_2)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)+(b_2-b_3)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)+(b_3-b_4)\cos\left(\frac{7x}{2}\right)+\cdots,$$

bei welcher die absoluten Beträge der einzelnen Glieder noch kleiner sind. Da hierbei noch $\sin x$, $\sin(2x)$, $\sin(3x), \ldots$ sämmtlich gleich 0 sind für alle Werthe von x, für welche $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ verschwindet, so bleibt die Reihe

$$b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

auch noch für diese Werthe von x convergent, und man erhält den Satz:

Die Reihe

$$b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + \cdots$$

ist für alle Werthe von x convergent, wenn die Coefficienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiv sind und eine bis in's unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden.

Indem man x mit $x+\pi$ vertauscht, findet man, dass die Reihe

$$b_1\sin x - b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) - + \cdots$$

unter denselben Bedingungen für alle Werthe von x convergirt.

Beispiele.

1) Die Reihe

$$1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(3x)}{3} + \cdots$$

ist **convergent**, wenn x von $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ verschieden ist.

2) Die Reihe

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1}} + \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2}} + \frac{\sin(3x)}{\sqrt{3}} + \cdots$$

ist **convergent** für alle Werthe von x.

VI. Abschnitt.

Maxima und Minima von entwickelten Functionen einer Veränderlichen.

§ 52.

Bedingungen, unter denen ein Maximum oder Minimum eintreten kann.

Wenn sich die unabhängige Veränderliche x, von der eine stetige Function

$$y = f(x) \tag{1.}$$

abhängt, um eine sehr kleine positive oder negative Grösse $\pm a$ ändert, so sollen die zugehörigen Werthe der Function, nämlich

$$f(x - a) \quad \text{und} \quad f(x + a),$$

„zu $f(x)$ *benachbarte* Werthe“ genannt werden, und zwar ist $f(x - a)$ „ein unmittelbar *vorhergehender*“, $f(x + a)$ „ein unmittelbar *folgender* benachbarter Werth“ der Function.

Wenn nun $f(x)$ grösser ist als alle unmittelbar vorhergehenden und folgenden Werthe der Function, so heisst $f(x)$ „ein Maximum“; und wenn $f(x)$ kleiner ist als alle unmittelbar vorhergehenden und folgenden Werthe der Function, so heisst $f(x)$ „ein Minimum“.

Im ersten Falle ist also

$$f(x - a) - f(x) < 0 \quad \text{und auch} \quad f(x + a) - f(x) < 0;$$

im zweiten Fall ist

$$f(x - a) - f(x) > 0 \quad \text{und auch} \quad f(x + a) - f(x) > 0.$$

Am besten wird man sich diese Beziehung klar machen durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) als eine

Curve. Dieser geometrischen Deutung sind auch die oben eingeführten Bezeichnungen entnommen.

Wenn z. B. der Gleichung (1.) die Curve in Figur 23 oder in Figur 24 entspricht, so hat die Function für

$$x = x_1 = OQ_1$$

ein *Maximum* und für

$$x = x_2 = OQ_2$$

ein *Minimum*, d. h. die Ordinate O_1P_1 des Punktes P_1 ist *grösser* als die Ordinaten aller benachbarten Punkte, und die Ordinate Q_2P_2 ist *kleiner* als die Ordinaten aller benachbarten Punkte.

Fig. 23.

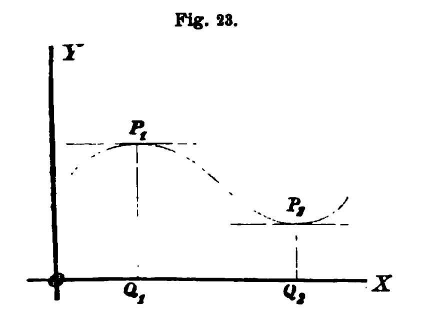
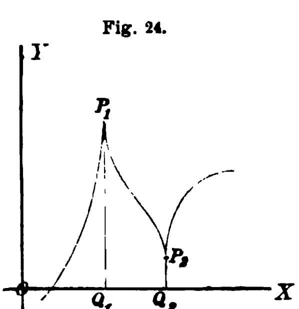


Fig. 24.



Damit nun die Curve einen solchen höchsten Punkt P_1 erreicht, muss sie vorher steigen und nachher fallen; und damit sie einen solchen tiefsten Punkt erreicht, muss sie vorher fallen und nachher steigen.

Aus diesen Erwägungen kann man die Bedingungen ableiten, unter denen $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird.

In § 13 (Seite 80) war nämlich gezeigt worden, dass $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *positiv* sein muss, wenn die Curve mit der Gleichung $y = f(x)$ in dem zugehörigen Punkte *steigt*, und dass $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ *negativ* sein muss, wenn die Curve in dem zugehörigen Punkte *fällt*. Unabhängig von der geometrischen Darstellung gab dies den Satz:

Wenn eine Function $y = f(x)$ gleichzeitig mit x zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Werth von x positiv;

wenn aber die Function abnimmt, während x zunimmt, so ist die Ableitung für den betrachteten Werth von x negativ;
und umgekehrt:

Eine Function $f(x)$ nimmt gleichzeitig mit x zu für alle Werthe von x, für welche $f'(x)$ positiv ist, und die Function nimmt ab, während x zunimmt, für alle Werthe von x, für welche $f'(x)$ negativ ist.

Wenn also $f(x)$ ein *Maximum* werden soll, so muss $f'(x)$ aus dem Positiven in das Negative übergehen; wenn dagegen $f(x)$ ein *Minimum* werden soll, so muss $f'(x)$ aus dem Negativen in das Positive übergehen.

Hieraus folgt, dass $f(x)$ nur für diejenigen Werthe von x ein Maximum oder Minimum werden kann, für welche die Ableitung $f'(x)$ einen *Zeichenwechsel* erleidet. Setzt man voraus, dass $f'(x)$ wohl unendlich gross werden kann, dass aber alle übrigen Fälle der Unstetigkeit ausgeschlossen sind, so tritt ein solcher Zeichenwechsel nur dann ein, wenn $f'(x)$ entweder gleich *Null* oder *unendlich gross* wird.

Dies giebt den Satz:

Die Function $f(x)$ kann nur für diejenigen Werthe von x ein Maximum oder Minimum werden, für welche $f'(x)$ gleich Null oder unendlich gross wird.

Aus der geometrischen Deutung der Ableitung, nämlich aus (Formel Nr. 16 der Tabelle)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

folgt, wie auch aus den Figuren zu ersehen ist, dass in den Curvenpunkten, welche einem Maximum oder Minimum entsprechen, die Tangente zur X-Axe oder zur Y-Axe parallel sein muss.

Ist $f'(x) = 0$, ist also die Tangente in dem zugehörigen Curvenpunkte P parallel zur X-Axe, so liegen die dem Punkte P benachbarten Punkte sämmtlich unterhalb oder sämmtlich oberhalb dieser Tangente, jenachdem der Punkt P einem Maximum oder Minimum entspricht (vergl. Fig. 23).

Ist $f'(x) = \infty$, ist also die Tangente parallel zur Y-Axe, so hat die Curve in dem zugehörigen Punkte P eine nach oben

oder nach unten gerichtete *Spitze*, jenachdem der Punkt P einem Maximum oder einem Minimum entspricht (vgl. Fig. 24).

Bemerkung.

Wird $f'(x)$ gleich Null oder unendlich gross, so ist es *möglich*, aber nicht immer *nothwendig*, dass $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Fig 25.

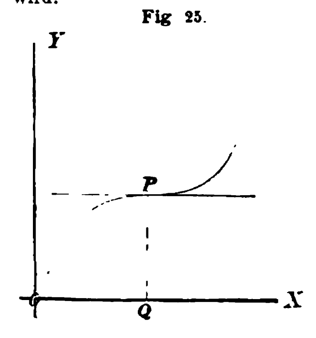
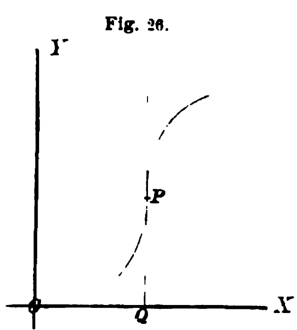


Fig. 26.



In Figur 25 wird z. B.

$$f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = OQ,$$

und in Figur 26 wird

$$f'(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = OQ;$$

trotzdem findet in beiden Fällen weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Die Punkte P in Figur 25 und 26 sind vielmehr *Wendepunkte*, von denen an einer späteren Stelle noch ausführlich die Rede sein wird.

Die Regel, welche sich aus den vorhergehenden Betrachtungen für die Aufsuchung der Maxima und Minima ergiebt, ist daher die folgende:

Man ermittele diejenigen Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich Null oder unendlich gross wird, und untersuche dann für die dadurch gefundenen Werthe von x noch das Vorzeichen von $f'(x-a)$ und $f'(x+a)$.

Wird für hinreichend kleine Werthe von a

$$f'(x-a) < 0$$

und

$$f'(x+a) > 0,$$

so ist $f(x)$ ein *Minimum*, wie man aus den Figuren 27 und 28 erkennt, in denen

§ 53.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll untersuchen, für welche Werthe von x die Function

(1.) $$y = \frac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 15x + 30) = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

(2.) $$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 5).$$

Die beiden Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich Null wird, sind also

(3.) $$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 5.$$

Für diese Werthe kann *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum eintreten. Um zu entscheiden, ob das eine oder das andere wirklich stattfindet, bilde man nach Anleitung des vorigen Paragraphen

$$f'(1 - a) = \frac{1}{2}(1 - a - 1)(1 - a - 5) = \frac{a}{2}(a + 4)$$

und

$$f'(1 + a) = \frac{1}{2}(1 + a - 1)(1 + a - 5) = \frac{a}{2}(a - 4).$$

Für hinreichend kleine Werthe der positiven Grösse a ist daher

(4.) $$f'(1 - a) > 0, \quad f'(1 + a) < 0,$$

folglich ist

(5.) $$f(1) = \frac{1}{6}(1 - 9 + 15 + 30) = \frac{37}{6} = 6{,}1666\ldots$$

ein Maximum.

Ebenso bilde man

$$f'(5 - a) = \frac{1}{2}(5 - a - 1)(5 - a - 5) = -\frac{a}{2}(4 - a)$$

und

$$f'(5 + a) = \frac{1}{2}(5 + a - 1)(5 + a - 5) = +\frac{a}{2}(4 + a).$$

Für hinreichend kleine Werthe von a ist daher

(6.) $$f'(5 - a) < 0 \quad \text{und} \quad f'(5 + a) > 0,$$

folglich wird

(7.) $\quad f(5) = \frac{1}{6}(125 - 225 + 75 + 30) = \frac{5}{6} = 0,8333\ldots$
ein Minimum.

Man könnte jetzt noch fragen, für welche Werthe von x die erste Ableitung $f'(x)$ unendlich gross wird. Diese Frage beantwortet sich aber nach Gleichung (2.) dahin, dass es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen $f'(x)$ unendlich gross wird.

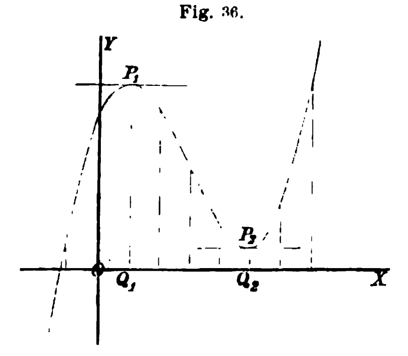
Demnach sind $x = 1$ und $x = 5$ die *einzigen* Werthe von x, für welche die Function ein Maximum oder Minimum werden kann.

Bemerkung.

Die Richtigkeit des gefundenen Resultates kann man durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) anschaulich machen. Aus dieser Gleichung findet man nämlich

$y = -7,333\ldots$ für $x = -2$,
$y = +0,833\ldots$ „ $x = -1$,
$y = +5$ „ $x = 0$,
$y = +6,166\ldots$ „ $x = +1$,
$y = +5,333\ldots$ „ $x = +2$,
$y = +3,5$ „ $x = +3$,
$y = +1,666\ldots$ „ $x = +4$,
$y = +0,833\ldots$ „ $x = +5$,
$y = +2$ „ $x = +6$,
$y = +6,166\ldots$ „ $x = +7$.

Fig. 36.



Wenn man nach diesen Angaben die Curve zeichnet, welche der Gleichung (1.) entspricht, so findet man in der That, dass dem Werthe $x_1 = OQ_1 = 1$ ein Maximum und dem Werthe $x_2 = OQ_2 = 5$ ein Minimum entspricht.

Der Anblick der Figur lehrt ferner, dass die *Maximal-Werthe* durchaus nicht immer die *grössten* Functions-Werthe sind, und dass die *Minimal-Werthe* ebenso wenig die *kleinsten* Functions-Werthe zu sein brauchen. Die Maximal-Werthe sind nur *grösser*, und die Minimal-Werthe sind nur *kleiner* als die *benachbarten* Werthe der Function.

Aufgabe 2. Man soll untersuchen, für welche Werthe von x die Function

(8.) $$y = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x + 48) = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Aus Gleichung (8.) folgt

(9.) $$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 12x + 12) = \frac{3}{8}(x - 2)^2.$$

Der einzige Werth von x, für welchen $f'(x)$ gleich Null wird, ist

$$x = 2,$$

während $f'(x)$ für keinen endlichen Werth von x unendlich gross wird.

Um zu entscheiden, ob für x gleich 2 ein Maximum oder ein Minimum eintritt, bilde man

$$f'(2-a) = \tfrac{3}{8}(2-a-2)^2 = \tfrac{3}{8}a^2$$

und

$$f'(2+a) = \tfrac{3}{8}(2+a-2)^2 = \tfrac{3}{8}a^2.$$

Es wird also

$$(10.)\qquad f'(2-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(2+a) > 0,$$

folglich ist $f(2)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

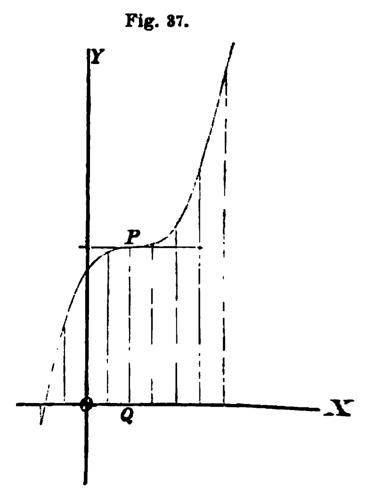
Da $x = 2$ der einzige Werth von x war, für welchen möglicher Weise ein Maximum oder Minimum eintreten konnte, so besitzt die Function überhaupt weder ein Maximum noch ein Minimum.

Bemerkung.

Gleichung (8.) giebt

$$\begin{array}{lll} y = -1 & \text{für} & x = -2, \\ y = +3{,}625 & \text{„} & x = -1, \\ y = +6 & \text{„} & x = 0, \\ y = +6{,}875 & \text{„} & x = +1, \\ y = +7 & \text{„} & x = +2, \\ y = +7{,}125 & \text{„} & x = +3, \\ y = +8 & \text{„} & x = +4, \\ y = +10{,}375 & \text{„} & x = +5, \\ y = +15 & \text{„} & x = +6. \end{array}$$

Fig. 37.



Construirt man hiernach die Curve, welche der Gleichung (8.) entspricht (Fig. 37), so findet man es bestätigt, dass $f(x)$ für keinen Werth von x ein Maximum oder ein Minimum wird. Man sieht vielmehr, dass die Curve für x gleich 1 einen Wendepunkt besitzt.

Aufgabe 3. Man soll die Werthe von x bestimmen, für welche

(11.) $$y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2} = f(x)$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Die Gleichung (11.) kann man auf die Form

(11a.) $$f(x) = m - b(x-c)^{\frac{2}{5}}$$

bringen und erhält daraus

(12.) $$f'(x) = -\frac{2}{5}b(x-c)^{-\frac{3}{5}} = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(x-c)^3}}.$$

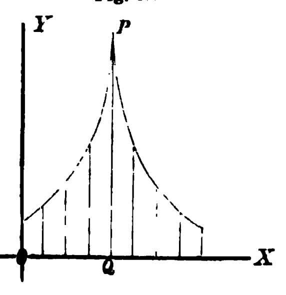


Fig. 38.

Hieraus folgt, dass $f'(x)$ für keinen endlichen Werth von x gleich Null werden kann. Dagegen wird

(13.) $$f'(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c.$$

Dies ist also der einzige Werth von x, für welchen $f(x)$ möglicher Weise ein Maximum oder Minimum wird. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f'(c-a) = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(c-a-c)^3}} = \frac{+2b}{5\sqrt[5]{a^3}}$$

und

$$f'(c+a) = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{(c+a-c)^3}} = \frac{-2b}{5\sqrt[5]{a^3}}.$$

Unter der Voraussetzung, dass b eine positive Zahl ist, erhält man also

(14.) $$f'(c-a) > 0 \quad \text{und} \quad f'(c+a) < 0,$$

folglich wird

(15.) $$f(c) = m$$

ein Maximum. (Vergl. Fig. 38.)

Aufgabe 4. Von einem Rechteck ist der Umfang gleich $2c$, wie gross muss man die Seiten machen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

Auflösung. Bezeichnet man die eine Seite AB mit x, so wird die andere Seite

Fig. 39.

(16.) $$BC = c - x,$$

und der Flächeninhalt

(17.) $$F = f(x) = x(c - x) = cx - x^2;$$

mithin liefert

(18.) $$f'(x) = c - 2x = 0$$

den Werth

(19.) $$x = \tfrac{1}{2}c.$$

Um zu unterscheiden, ob für diesen Werth von x wirklich ein Maximum eintritt, bilde man

$$f'(x - a) = f'\left(\frac{c}{2} - a\right) = c - (c - 2a) = +2a$$

und

$$f'(x + a) = f'\left(\frac{c}{2} + a\right) = c - (c + 2a) = -2a.$$

Da $f'(x - a) > 0$ und $f'(x + a) < 0$ ist, so wird $f(x)$ ein Maximum. Dies giebt den Satz:

Unter allen Rechtecken mit gleichem Umfange hat das Quadrat den grössten Flächeninhalt.

Aufgabe 5. Von einem Dreieck ABC sind zwei Seiten b und c gegeben; wie gross muss der eingeschlossene Winkel sein, wenn der Flächeninhalt ein Maximum werden soll?

Auflösung. Nennt man den eingeschlossenen Winkel x, so wird der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks

(20.) $$2F = bc\sin x = f(x),$$

also wird

Fig. 40.

(21.) $$f'(x) = bc\cos x = 0 \text{ für } x = \frac{\pi}{2};$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = bc\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) > 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = bc\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) < 0,$$

folglich wird $f(x)$ ein Maximum für $x = \frac{\pi}{2}$, d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks wird am grössten, wenn der von den gegebenen Seiten b und c eingeschlossene Winkel ein rechter ist.

§ 54.

Entscheidung über das Eintreten eines Maximums oder Minimums durch Untersuchung der höheren Ableitungen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 79.)

Die Fälle, wo $f'(x)$ unendlich gross wird, mögen in den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen sein. Es soll vielmehr vorausgesetzt werden, dass die Function $f(x)$ mit ihren n ersten Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ *stetig* und *endlich* sei, wobei über die Zahl n später noch passend verfügt werden soll. Dann ist nach Formel Nr. 49 der Tabelle

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R, \tag{1.}$$

wobei unter Anwendung der zweiten Form des Restes

$$R = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x)]h^n \tag{2.}$$

ist. Setzt man in dieser Entwickelung das eine Mal

$$h = -a$$

und das andere Mal

$$h = +a,$$

so kann man dieselbe benutzen, um das Vorzeichen von

$$\Delta_1 = f(x-a) - f(x) \quad \text{und von} \quad \Delta_2 = f(x+a) - f(x) \tag{3.}$$

zu bestimmen. Sind nun diese Differenzen für hinreichend kleine Werthe von a beide *negativ*, so wird $f(x)$ offenbar ein Maximum; sind aber diese Differenzen beide *positiv*, so wird $f(x)$ ein Minimum; haben endlich diese beiden Differenzen verschiedenes Zeichen, so tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein.

Für $n = 1$ erhält man aus den Gleichungen (1.) und (2.)

$$\Delta = f(x+h) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!}h + [f'(x+\Theta h) - f'(x)]h. \tag{4.}$$

Hierbei werde

$$f'(x+\Theta h) - f'(x) = \alpha \tag{5.}$$

gesetzt, dann erhält man

(4a.) $$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1!}[f'(x)+\alpha].$$

Da $\alpha=0$ ist für $h=0$, so wird wegen der Stetigkeit der Function $f'(x)$ die Grösse α mit h zugleich beliebig klein. Ist also

(6.) $$f'(x)\lesseqgtr 0,$$

so kann man h so klein wählen, dass α, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f'(x)$. Das Vorzeichen der Klammergrösse $f'(x)+\alpha$ wird deshalb mit dem Vorzeichen von $f'(x)$ übereinstimmen. Ist α gleich α_1 für $h=-a$ und α gleich α_2 für $h=+a$, so folgt hieraus, dass

$$\Delta_1=f(x-a)-f(x)=-a[f'(x)+\alpha_1]$$

und

$$\Delta_2=f(x+a)-f(x)=+a[f'(x)+\alpha_2]$$

entgegengesetztes Vorzeichen haben, dass also weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten kann, so lange die Ungleichung (6.) besteht.

Ein Maximum oder Minimum von $f(x)$ kann vielmehr nur eintreten, wenn

(7.) $$f'(x)=0$$

ist. Die geometrische Deutung dieses Resultates giebt wieder den Satz:

Die Tangente in einem Curvenpunkte, welcher einem Maximum oder Minimum entspricht, ist der X-Axe parallel.

Ist Gleichung (7.) befriedigt, so füge man noch die Voraussetzung hinzu, dass auch $f''(x)$ für die betrachteten Werthe von x stetig sei, und dass

(8.) $$f''(x)\lesseqgtr 0.$$

Nach den Gleichungen (1.) und (2.) wird dann für n gleich 2

$$\Delta=f(x+h)-f(x)=\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{1}{2!}[f''(x+\Theta h)-f''(x)]h^2,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

(9.) $$\Delta=f(x+h)-f(x)=\frac{h^2}{2!}[f''(x)+\beta],$$

wobei

$$f''(x + \Theta h) - f''(x) = \beta \tag{10.}$$

gesetzt worden ist. Da $\beta = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ diese Grösse β mit h zugleich beliebig klein. Man kann also h immer so klein wählen, dass β, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f''(x)$, dass also das Vorzeichen von $f''(x)$ über das Vorzeichen der Klammergrösse $f''(x) + \beta$ entscheidet. Ist β gleich β_1 für $h = -a$, und β gleich β_2 für $h = +a$, so folgt hieraus, dass

$$\Delta_1 = f(x - a) - f(x) = \frac{a^2}{2!}[f''(x) + \beta_1]$$

und

$$\Delta_2 = f(x + a) - f(x) = \frac{a^2}{2!}[f''(x) + \beta_2]$$

gleiches Vorzeichen haben, dass also ein *Maximum* eintritt, wenn $f''(x)$ *negativ* ist, während ein *Minimum* eintritt, wenn $f''(x)$ *positiv* ist.

Dies giebt die folgende Regel:

Ist

$$f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) < 0,$$

so wird $f(x)$ *ein Maximum; ist dagegen*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x) > 0,$$

so wird $f(x)$ *ein Minimum.*

Es bleibt nur der Fall übrig, wo

$$f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = 0. \tag{11.}$$

Fügt man dann die Voraussetzung hinzu, dass $f'''(x)$ für die betrachteten Werthe von x stetig sei, und dass

$$f'''(x) \gtrless 0, \tag{12.}$$

so folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) für $n = 3$

$$f(x + h) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{1}{3!}[f'''(x + \Theta h) - f'''(x)]h^3,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.)

(13.) $$f(x+h) - f(x) = \frac{h^3}{3!}[f'''(x) + \gamma],$$

wobei

(14.) $$f'''(x + \Theta h) - f'''(x) = \gamma$$

gesetzt worden ist. Da $\gamma = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f'''(x)$ diese Grösse γ mit h zugleich beliebig klein. Man kann also h immer so klein wählen, dass γ, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f'''(x)$, dass also das Vorzeichen von $f'''(x)$ über das Vorzeichen der Klammergrösse $f'''(x) + \gamma$ entscheidet. Ist nun γ gleich γ_1 für $h = -a$, und γ gleich γ_2 für $h = +a$, so folgt hieraus, dass

$$\varDelta_1 = f(x - a) - f(x) = -\frac{a^3}{3!}[f'''(x) + \gamma_1]$$

und

$$\varDelta_2 = f(x + a) - f(x) = +\frac{a^3}{3!}[f'''(x) + \gamma_2]$$

entgegengesetztes Vorzeichen haben, dass also weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten kann, so lange neben den Gleichungen (11.) die Ungleichung (12.) besteht.

Ist dagegen auch $f'''(x)$ gleich Null, ist also

(15.) $$f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0,$$

so füge man die Voraussetzung hinzu, dass $f^{(4)}(x)$ für die betrachteten Werthe von x stetig sei, und dass

(16.) $$f^{(4)}(x) \gtrless 0$$

wird. Jetzt folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) für $n = 4$, wenn man die Gleichungen (15.) berücksichtigt,

(17.) $$f(x+h) - f(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \frac{1}{4!}[f^{(4)}(x+\Theta h) - f^{(4)}(x)]h^4$$
$$= \frac{h^4}{4!}[f^{(4)}(x) + \delta],$$

wobei

(18.) $$f^{(4)}(x + \Theta h) - f^{(4)}(x) = \delta$$

gesetzt worden ist. Da $\delta = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f^{(4)}(x)$ diese Grösse δ mit h zugleich beliebig

klein. Man kann also h immer so klein wählen, dass δ, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner wird als $f^{(4)}(x)$, dass also das Vorzeichen von $f^{(4)}(x)$ über das Vorzeichen der Klammergrösse $f^{(4)}(x) + \delta$ entscheidet. Ist nun δ gleich δ_1 für $h = -a$, und δ gleich δ_2 für $h = +a$, so folgt hieraus, dass

$$\varDelta_1 = f(x-a) - f(x) = \frac{a^4}{4!}[f^{(4)}(x) + \delta_1]$$

und

$$\varDelta_2 = f(x+a) - f(x) = \frac{a^4}{4!}[f^{(4)}(x) + \delta_2]$$

gleiches Vorzeichen haben, dass also $f(x)$ ein *Maximum* wird, wenn $f^{(4)}(x)$ *negativ* ist, während $f(x)$ ein *Minimum* wird, wenn $f^{(4)}(x)$ *positiv* ist.

In dieser Weise kann man fortfahren. Ganz allgemein findet man das folgende Resultat:

Es sei für einen bestimmten Werth von x

$$(19.)\quad f'(x) = 0,\quad f''(x) = 0,\quad f'''(x) = 0,\ \ldots f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$f^{(n)}(x)$ dagegen sei von Null verschieden und für die betrachteten Werthe der Veränderlichen stetig; dann folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (19.)

$$(20.)\quad f(x+h) - f(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x)]h^n$$

$$= \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x) + \nu],$$

wobei

$$(21.)\quad f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x) = \nu$$

gesetzt worden ist. Da $\nu = 0$ ist für $h = 0$, so wird wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}(x)$ diese Grösse ν mit h zugleich beliebig klein. Man kann also h immer so klein wählen, dass ν, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner wird als $f^{(n)}(x)$, dass also das Vorzeichen von $f^{(n)}(x)$ über das Vorzeichen der Klammergrösse $f^{(n)}(x) + \nu$ entscheidet. Ist nun ν gleich ν_1 für $h = -a$ und ν gleich ν_2 für $h = +a$, so ergiebt sich hieraus, dass

$$\varDelta_1 = f(x-a) - f(x) = (-1)^n\frac{a^n}{n!}[f^{(n)}(x) + \nu_1]$$

und

$$\Delta_2 = f(x + a) - f(x) = \frac{a^n}{n!}[f^{(n)}(x) + \nu_2]$$

gleiches oder *entgegengesetztes* Zeichen haben, jenachdem *n gerade* oder *ungerade* ist.

Daher wird $f(x)$ ein *Maximum*, wenn *n gerade* und $f^{(n)}(x)$ *negativ* ist; $f(x)$ wird ein *Minimum*, wenn *n gerade* und $f^{(n)}(x)$ *positiv* ist. Wenn dagegen *n ungerade* ist, so wird $f(x)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Dies giebt die allgemeine Regel:

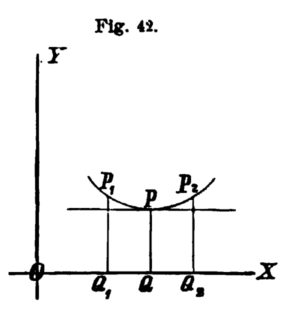
Um die Werthe von x zu bestimmen, für welche $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, bestimme man die Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich Null wird. Ein solcher Werth sei x, und $f^{(n)}(x)$ sei die erste spätere Ableitung, welche für diesen Werth von x nicht verschwindet; dann ist $f(x)$ ein Maximum, wenn n gerade und $f^{(n)}(x)$ negativ ist; $f(x)$ ist ein Minimum, wenn n gerade und $f^{(n)}(x)$ positiv ist. Dagegen tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn n ungerade ist.

Bemerkungen.

1) Gewöhnlich wird n gleich 2, nur ausnahmsweise kommen auch grössere Werthe von n in Betracht.

Fig. 41.

Fig. 42.



2) Aus dem Vorhergehenden folgt, dass vier wesentlich verschiedene Fälle eintreten können, wenn für irgend einen Werth von x

$$f'(x) = 0$$

wird.

I. Ist unter dieser Voraussetzung entweder $f''(x)$ *negativ*, oder $f''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null ver-

schieden ist, von *gerader* Ordnung und *negativ*, so wird der entsprechende Werth der Function ein *Maximum* (vergl. Fig. 41).

II. Ist unter der Voraussetzung, dass $f'(x) = 0$ wird, entweder $f''(x)$ *positiv*, oder $f''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *gerader* Ordnung und *positiv*, so wird der entsprechende Werth der Function ein *Minimum* (vergl. Fig. 42).

III. Ist für einen Werth von x, für welchen $f'(x) = 0$ wird, auch $f''(x) = 0$, und ist entweder $f'''(x)$ *positiv*, oder $f'''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *ungerader* Ordnung und *positiv*, so ist der entsprechende Werth der Function weder ein Maximum noch ein Minimum (vergl. Fig. 43).

Fig. 43.

Fig. 44.

IV. Ist für einen Werth von x, für welchen $f'(x) = 0$ wird, auch $f''(x) = 0$, und ist entweder $f'''(x)$ *negativ*, oder $f'''(x)$ gleich Null und die erste höhere Ableitung, welche von Null verschieden ist, von *ungerader* Ordnung und *negativ*, so ist der entsprechende Werth der Function weder ein Maximum noch ein Minimum (vergl. Fig. 44).

3) In den Figuren 43 und 44 ist der Punkt P ein Wendepunkt, und zwar steigt die Curve in Figur 43 bis zum Punkte P und fährt unmittelbar hinter ihm fort, zu steigen. Im Punkte P selbst ist die Richtung der Curve parallel zur X-Axe.

In Figur 44 dagegen fällt die Curve bis zum Punkte P und fährt unmittelbar hinter ihm fort, zu fallen. Auch hier ist P ein Wendepunkt, in welchem die Richtung der Curve zur X-Axe parallel ist.

§ 55.

Anwendungen.

Es möge diese Methode zunächst auf die Aufgaben angewendet werden, welche schon in § 53 behandelt worden sind; Aufgabe 3 daselbst kommt hier aber nicht in Betracht, weil hier nur die Fälle berücksichtigt werden, in denen $f'(x)$ *stetig* und *endlich* bleibt.

Aufgabe 1. Für welche Werthe von x wird die Function

$$y = \tfrac{1}{6}(x^3 - 9x^2 + 15x + 30) = f(x) \tag{1.}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Man bilde

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 - 6x + 5) = \tfrac{1}{2}(x - 1)(x - 5), \tag{2.}$$

$$f''(x) = x - 3 \tag{3.}$$

und bestimme die Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man

$$x = 1 \quad \text{und} \quad x = 5. \tag{4.}$$

Für diese Werthe kann *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum eintreten. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f''(1) = -2 \quad \text{und} \quad f''(5) = +2, \tag{5.}$$

folglich wird

$$f(1) = 6{,}1666\ldots \tag{6.}$$

ein *Maximum*, weil $f''(1)$ *negativ* ist, und

$$f(5) = 0{,}8333\ldots \tag{7.}$$

ein *Minimum*, weil $f''(5)$ *positiv* ist.

(Vergl. Fig 36 auf Seite 249.)

Aufgabe 2. Für welche Werthe von x wird die Function

$$y = \tfrac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 12x + 48) = f(x) \tag{8.}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Man bilde

$$f'(x) = \tfrac{3}{8}(x^2 - 4x + 4) = \tfrac{3}{8}(x - 2)^2, \tag{9.}$$

$$f''(x) = \tfrac{3}{4}(x - 2) \tag{10.}$$

und bestimme die Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man nur den einzigen Werth

$$x = 2, \tag{11.}$$

für den *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Um darüber zu entscheiden, bildet man $f''(2)$ und findet

$$f''(2) = 0. \tag{12.}$$

Deshalb muss man noch die *dritte* Ableitung

$$f'''(x) = \tfrac{3}{4} \tag{13.}$$

bilden. Da diese Ableitung sogar für jeden Werth von x von 0

verschieden ist, so tritt *weder ein Maximum noch ein Minimum* ein.

(Vergl. Fig. 37 auf Seite 250.)

Aufgabe 3. Für welche Werthe von x wird

$$f(x) = x(c - x) = cx - x^2 \tag{14.}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Man bilde

$$f'(x) = c - 2x, \tag{15.}$$

$$f''(x) = -2 \tag{16.}$$

und bestimme den Werth von x, für welchen $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man nur den einzigen Werth

$$x = \tfrac{1}{2}c. \tag{17.}$$

Da $f''(x)$ für *jeden* Werth von x *negativ* ist, so wird $f(x)$ für $x = \frac{1}{2}c$ ein *Maximum*.

Aufgabe 4. Für welche Werthe von x wird

$$f(x) = bc\sin x \tag{18.}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Man bilde

$$f'(x) = bc\cos x, \tag{19.}$$

$$f''(x) = -bc\sin x \tag{20.}$$

und bestimme den Werth von x, für welchen $f'(x)$ gleich 0 wird. Dadurch findet man, weil der Dreieckswinkel x kleiner als π sein muss, den einzigen Werth

$$x = \frac{\pi}{2}. \tag{21.}$$

Um zu entscheiden, ob für diesen Werth von x wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, bildet man $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und findet

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -bc. \tag{22.}$$

Da dieser Werth *negativ* ist, so wird $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ein *Maximum*.

Aufgabe 5. Die Function

$$f(x) = x^2 - 2ax + b^2$$

wird ein *Minimum* für $x = a$, und zwar wird

$$f(x) = b^2 - a^2.$$

Aufgabe 6. Die Function

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x - 20$$

wird ein *Maximum* für $x = 4$ und ein *Minimum* für $x = 8$; dabei ist

$$f(4) = 140 \quad \text{und} \quad f(8) = 108.$$

Aufgabe 7. Die Function

$$f(x) = a + (x - c)^4$$

wird ein *Minimum* für $x = c$, und zwar ist

$$f(c) = a.$$

Aufgabe 8. Die Function

$$f(x) = a + (x - c)^5$$

hat weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*.

Aufgabe 9. Die Function

$$f(x) = a + (x - c)^n$$

wird ein *Minimum* für $x = c$, wenn n eine *gerade* Zahl ist; sie ist dagegen weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, wenn n eine *ungerade* Zahl ist.

Aufgabe 10. Die Function

$$f(x) = x^2(a - x)^3 = a^3x^2 - 3a^2x^3 + 3ax^4 - x^5$$

wird unter der Voraussetzung, dass a positiv ist, für $x = 0$ ein *Minimum*, für $x = \frac{2a}{5}$ ein *Maximum* und für $x = a$ weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, obgleich $f'(a) = 0$ ist.

Aufgabe 11. Die Function

$$f(x) = (x - 1)^4(x + 2)^3$$

wird für $x = 1$ ein *Minimum*,

„ $x = -\frac{5}{7}$ ein *Maximum*

und für $x = -2$ weder ein *Maximum* noch ein *Minimum*, obgleich $f'(-2) = 0$ ist.

Aufgabe 12. Die Function

$$f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$$

wird für $x = \frac{a}{e}$ ein *Maximum*.

Aufgabe 13. Die Function

$$f(x) = \frac{x}{1x}$$

wird für $x = e$ ein *Minimum*.

Aufgabe 14. Die Function

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

wird für $x = e$ ein *Maximum*.

Aufgabe 15. Die Function

$$f(x) = x^x$$

wird für $x = \frac{1}{e}$ ein *Minimum*.

§ 56.

Vereinfachungen der Rechnung, wenn $f'(x)$ eine gebrochene Function ist.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 80.)

Hat $f'(x)$ die Form

$$f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1.}$$

so wird im Allgemeinen $f'(x)$ zugleich mit $P(x)$ gleich Null. Will man nun entscheiden, ob $f(x)$ für einen Werth von x, für welchen $P(x)$ gleich Null ist, ein Maximum oder Minimum wird, so muss man das Vorzeichen von

$$f''(x) = \frac{Q(x)P'(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} \tag{2.}$$

bestimmen. Nun ist aber für den betrachteten Werth von x die Function $P(x)$ gleich Null, folglich wird

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}. \tag{3.}$$

Das Vorzeichen dieses Bruches kann man aber verhältnissmässig leicht bestimmen.

Beispiele.

Aufgabe 1. Für welchen Werth von x wird die Function

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{4.}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. Man bilde

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{5.}$$

Daraus folgt, dass $P(x)$ und deshalb auch $f'(x)$ nur verschwindet für

$$x = +1 \quad \text{und} \quad x = -1. \tag{6.}$$

Für diese Werthe von x wird aber

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \tag{7.}$$

also

$$f''(+1) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad f''(-1) = +\frac{1}{2}.$$

Deshalb ist

$$f(+1) = +\frac{1}{2} \text{ ein Maximum}$$

und

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \text{ ein Minimum.}$$

Aufgabe 2. Für welche Werthe von x wird die Function

$$f(x) = \frac{2-3x+x^2}{2+3x+x^2}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. $f(+\sqrt{2})$ wird ein Minimum
und $f(-\sqrt{2})$ „ „ Maximum.

Aufgabe 3. Für welche Werthe von x wird die Function

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung. $f(+1)$ wird ein Maximum
und $f(-1)$ „ „ Minimum.

Aufgabe 4. Für welche Werthe von x wird die Function

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}$$

ein Maximum oder Minimum?

Auflösung.

$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ werden Maxima,

$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und $f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ werden Minima.

§ 57.

Verschiedene Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima.

A. Maximum oder Minimum einer gegebenen Function.

Aufgabe 1. Für welche Werthe von x wird die Function

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$$

ein Minimum?

Auflösung. Hier wird

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$
$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x} = 0 \text{ für } x = 0,$$
$$f^{(4)}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x} = f(x) = 4 > 0 \text{ für } x = 0;$$

folglich tritt für $x = 0$ ein Minimum ein.

Aufgabe 2. Man soll eine positive Zahl c so in zwei Theile zerlegen, dass das Product aus der vierten Potenz des einen Theiles und der siebenten Potenz des anderen Theiles ein Maximum wird.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden Theile von c mit x und $c - x$, so wird

$$f(x) = x^4(c - x)^7, \tag{1.}$$

folglich ist

$$f'(x) = x^3(c - x)^6 (4c - 11x). \tag{2.}$$

Die beiden Werthe $x = 0$ und $x = c$, für welche $f'(x)$ verschwindet, kommen hier nicht in Betracht, denn $x = 0$ liefert ein *Minimum*, weil $f'(x)$ aus dem Negativen in's Positive übergeht, wenn x den Werth 0 passirt, und für $x = c$ tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, weil für hinreichend kleine Werthe von a

$$f'(c - a) = (c - a)^3 a^6(-7c + 11a) < 0,$$

und auch

$$f'(c + a) = (c + a)^3 a^6(-7c - 11a) < 0$$

ist. Dagegen tritt wirklich ein Maximum ein, wenn

$$4c - 11x = 0, \quad \text{oder} \quad x = \frac{4}{11}c \tag{3.}$$

ist, weil $f'(x)$ für diesen Werth von x verschwindet, und weil

$$f''(x) = x^2(c - x)^5(12c^2 - 80cx + 110x^2) = -\frac{4^3 \cdot 7^6 \cdot c^9}{11^8} < 0 \tag{4.}$$

ist. Hier ergiebt sich auch aus der Natur der Aufgabe, dass zwischen $x = 0$ und $x = c$ ein Werth von x liegen muss, für welchen $f(x)$ ein Maximum wird, denn die stetige Function $f(x)$ wird für $x = 0$ und für $x = c$ selbst gleich 0 und ist für die dazwischen liegenden Werthe von x positiv.

Aufgabe 3. Man soll die Zahl c so in zwei Theile zerlegen, dass das Product aus der m^{ten} Potenz des einen Theiles und aus der n^{ten} Potenz des anderen Theiles ein Maximum wird.

Auflösung. Aehnlich wie bei der vorigen Aufgabe ist hier

$$f(x) = x^m(c - x)^n \tag{5.}$$

die Function, welche für $x = \frac{mc}{m + n}$ ein Maximum wird, denn es wird

$$f'\left(\frac{mc}{m+n}\right) = 0, \quad f''\left(\frac{mc}{m+n}\right) = -\frac{m^{m-1} \cdot n^{n-1} \cdot c^{m+n-2}}{(m + n)^{m+n-3}} < 0. \tag{6.}$$

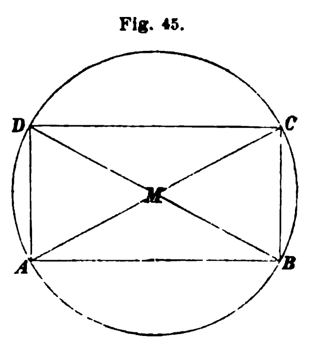
Bemerkung.

Man erkennt, dass die vorhergehende Aufgabe, und ebenso Aufgabe 3 in § 55 nur besondere Fälle dieser Aufgabe sind.

B. Aufgaben aus der Planimetrie.

Aufgabe 4. In einen Kreis (Fig. 45) mit dem Halbmesser a soll ein Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalt eingeschrieben werden.

Fig. 45.



Auflösung. Bezeichnet man die eine Seite des Rechtecks AB mit x, so wird die andere Seite

$$BC = \sqrt{4a^2 - x^2},$$

also der Flächeninhalt

$$F = AB \cdot BC = x\sqrt{4a^2 - x^2}, \tag{7.}$$

$$F^2 = x^2(4a^2 - x^2) = 4a^2x^2 - x^4. \tag{8.}$$

Soll F ein Maximum werden, dann muss auch F^2 ein Maximum werden, so dass man

$$f(x) = 4a^2x^2 - x^4 \tag{9.}$$

setzen kann. Dies giebt

$$f'(x) = 8a^2x - 4x^3 = 4x(2a^2 - x^2), \tag{10.}$$

$$f''(x) = 8a^2 - 12x^2, \tag{11.}$$

$$f'(a\sqrt{2}) = 0, \quad f''(a\sqrt{2}) = -16a^2 < 0, \tag{12.}$$

folglich tritt für

$$AB = BC = a\sqrt{2} \tag{13.}$$

ein Maximum ein. Es gilt also der Satz:

Unter allen Rechtecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden können, hat das Quadrat den grössten Flächeninhalt.

Aufgabe 5. In einen Kreis (Fig. 45) mit dem Halbmesser a soll ein Rechteck mit möglichst grossem Umfange eingeschrieben werden.

Auflösung. Benutzt man dieselben Bezeichnungen wie in der vorhergehenden Aufgabe, so wird der halbe Umfang

$$\tfrac{1}{2}u = x + \sqrt{4a^2 - x^2} = f(x), \tag{14.}$$

$$(15.)\quad f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2} - x}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Hier wird $P(x) = 0$, wenn

$$(16.)\qquad \sqrt{4a^2 - x^2} = x = a\sqrt{2}$$

ist; für diesen Werth von x wird

$$(17.)\quad f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = \frac{-x - \sqrt{4a^2 - x^2}}{4a^2 - x^2} = \frac{-2a\sqrt{2}}{2a^2} = -\frac{\sqrt{2}}{a} < 0,$$

folglich tritt ein Maximum ein. Dies giebt den Satz:

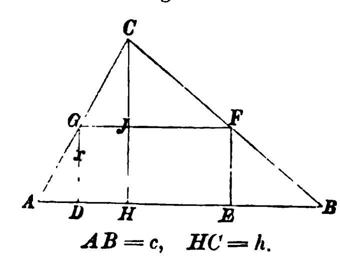
Unter allen Rechtecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden können, hat das Quadrat den grössten Umfang.

Bemerkung.

Die Lösung der beiden vorhergehenden Aufgaben wird noch etwas kürzer, wenn man den Winkel CAB als Veränderliche einführt; es sollten aber an dieser Stelle trigonometrische Functionen vermieden werden.

Aufgabe 6. Von einem Dreieck ABC (Fig. 46) ist die Grundlinie AB gleich c und die Höhe $HC = h$ gegeben; man soll in dieses Dreieck ein Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalte einzeichnen, so dass die eine Seite DE in der Basis AB liegt.

Fig. 46.



$AB = c, \quad HC = h.$

Auflösung. Bezeichnet man die Höhe DG eines solchen Rechtecks mit x, so wird

$$JC : HC = GF : AB,$$

oder

$$(h - x) : h = DE : c,$$

also

$$(18.)\qquad DE = \frac{c(h - x)}{h}.$$

Mithin ist der Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$

$$(19.)\qquad F = \frac{xc(h - x)}{h} = \frac{c}{h}(hx - x^2).$$

Daher ist in dieser Aufgabe

$$f(x) = hx - x^2, \quad f'(x) = h - 2x, \quad f''(x) = -2; \tag{20.}$$

daraus folgt, dass $f(x)$ ein Maximum wird für $x = \frac{h}{2}$.

Das grösste unter allen Rechtecken, welche sich in der angegebenen Weise in das Dreieck ABC einschreiben lassen, ist also dasjenige, dessen Höhe und Grundlinie halb so gross sind wie die Höhe und die Grundlinie des gegebenen Dreiecks. Der Flächeninhalt von diesem Rechteck ist

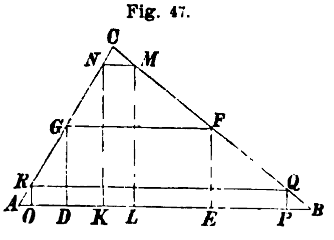
$$F = \frac{ch}{4}, \tag{21.}$$

also halb so gross wie der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks.

Bemerkung.

In vielen Fällen erkennt man schon aus der Natur der Aufgabe, ob für die Werthe von x, für welche $f'(x)$ verschwindet, ein Maximum oder Minimum eintritt. In das Dreieck ABC (Fig. 47) lassen sich z. B. unendlich viele Rechtecke einschreiben. Denkt man sie sich alle gezeichnet und fängt man bei demjenigen an, dessen Höhe gleich h und dessen Grundlinie gleich Null ist (Fig. 46), das also mit der Höhe h des Dreiecks selbst zusammenfällt, so wird bei diesem Rechteck auch der Flächeninhalt gleich Null. Wenn dann die Höhe des Rechtecks kleiner wird, so wird die Basis grösser. Auf diese Weise gelangt man in Figur 47 zu den Rechtecken $KLMN$, $DEFG$, $OPQR$ und endlich zu einem Rechteck, dessen Höhe gleich Null, und dessen Grundlinie gleich c ist, so dass auch bei diesem Rechteck der Flächeninhalt gleich Null wird.

Fig. 47.



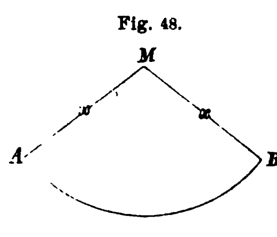
Daraus folgt, dass der Flächeninhalt dieser Rechtecke zuerst zunehmen und dann wieder abnehmen muss. Deshalb muss es wenigstens *ein* Rechteck in dieser Reihe von Rechtecken geben, dessen Flächeninhalt ein *Maximum* ist.

Da man aber aus Gleichung (20.) nur einen einzigen Werth von x, nämlich $x = \frac{h}{2}$ findet, für den ein Maximum oder Minimum eintreten kann, so folgt, dass dieser Werth wirklich das Maximum liefert.

Durch derartige Ueberlegungen kann man in vielen Fällen die Bildung und Berechnung von $f''(x)$ ersparen. So würden z. B. in der Aufgabe 4 ganz ähnliche Erwägungen zum Ziele geführt haben.

Aufgabe 7. Von einem Kreissector (Fig. 48) ist der gesammte Umfang u gegeben; wie gross muss man den Halbmesser machen, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird?

Fig. 48.



Auflösung. Bezeichnet man den Halbmesser MA mit x, so wird der gesammte Umfang des Sectors

$$u = 2x + \widehat{AB}, \quad \text{also} \quad \widehat{AB} = u - 2x. \tag{22.}$$

Der doppelte Flächeninhalt des Sectors ist daher

$$2F = \widehat{AB} \,.\, x = (u - 2x)x = ux - 2x^2 = f(x), \tag{23.}$$

folglich wird

$$f'(x) = u - 4x = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{u}{4}, \tag{24.}$$

$$f''(x) = -4 < 0. \tag{25.}$$

Der Flächeninhalt wird daher ein Maximum, wenn der Bogen des Sectors die Hälfte vom Umfange des Sectors ist.

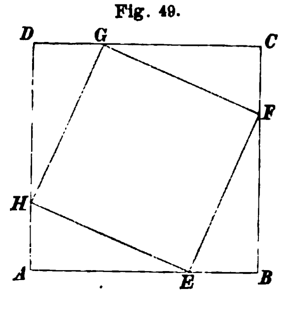
Aufgabe 8. Man soll das kleinste unter allen Quadraten bestimmen, welche sich in ein gegebenes Quadrat $ABCD$ (Fig. 49) einschreiben lassen.

Auflösung. Es sei $EFGH$ eines der Quadrate, welche sich in das gegebene Quadrat einschreiben lassen. Bezeichnet man AB mit a und AE mit x, so wird

$$EB = AH = a - x,$$

also

Fig. 49.



$$HE^2 = x^2 + (a - x)^2.$$

Dieser Ausdruck ist gleichzeitig auch der Flächeninhalt des Quadrates $EFGH$, also die Function, welche ein Minimum werden soll; daher ist

$$f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2. \tag{26.}$$

Daraus folgt

$$f'(x) = 4x - 2a, \quad f''(x) = 4: \tag{27.}$$

die Ableitung $f'(x)$ verschwindet also

nur für $x = \frac{a}{2}$. Da nun $f''(x)$ für alle Werthe von x den positiven Werth 4 hat, so wird

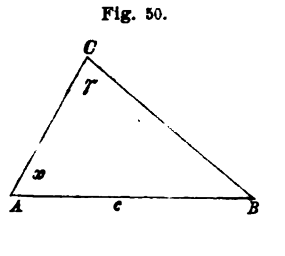
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2} \tag{28.}$$

ein Minimum. Die Punkte E, F, G, H müssen daher in der Mitte von den Seiten des gegebenen Quadrates liegen, damit das eingeschriebene Quadrat $EFGH$ möglichst klein wird.

C. Aufgaben aus der Trigonometrie und Vermessungskunde.

Aufgabe 9. Von einem Dreieck ABC (Fig. 50.) ist die Grundlinie $AB = c$ und der Winkel γ an der Spitze gegeben; wie gross müssen die anderen Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

Fig. 50.



Auflösung. Bezeichnet man den Dreieckswinkel α mit x, so wird der dritte Winkel β gleich $180 - (\gamma + x)$ und der Flächeninhalt ist

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma} = \frac{c^2 \sin x \sin(\gamma + x)}{2\sin\gamma}. \tag{29.}$$

Da der Factor $\frac{c^2}{2\sin\gamma}$ positiv ist, so wird F ein Maximum, wenn $\sin x \sin(\gamma + x)$ ein Maximum wird; deshalb ist in dieser Aufgabe

(30.) $f(x) = \sin x \sin(\gamma + x)$,

(31.) $f'(x) = \cos x \sin(\gamma + x) + \cos(\gamma + x)\sin x = \sin(\gamma + 2x)$,

(32.) $f''(x) = 2\cos(\gamma + 2x)$.

Für

$$\gamma + 2x = \pi = \alpha + \beta + \gamma,$$

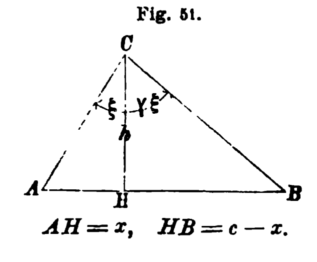
oder, da x gleich α ist, für

$$x = \alpha = \beta \tag{33.}$$

verschwindet $f'(x)$, und $f''(x)$ wird gleich $-2<0$. Deshalb wird der Flächeninhalt ein Maximum, wenn das Dreieck ein *gleichschenkliges* ist.

Aufgabe 10. Von einem Dreieck ABC (Fig. 51) ist die Grundlinie c und die Höhe h gegeben; wie gross müssen die anderen Seiten sein, damit der Winkel γ, welcher c gegenüberliegt, ein Maximum wird?

Fig. 51.



$AH = x, \quad HB = c - x.$

Auflösung. Die Höhe des Dreiecks theile die Grundlinie c in die Abschnitte x und $c-x$, und den Winkel γ theile sie in die Winkel ξ und $\gamma - \xi$; dann ist

$$\text{(34.)} \qquad \operatorname{tg}\xi = \frac{x}{h}, \quad \operatorname{tg}(\gamma - \xi) = \frac{c-x}{h},$$

also

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}[\xi + (\gamma - \xi)] = \frac{\operatorname{tg}\xi + \operatorname{tg}(\gamma - \xi)}{1 - \operatorname{tg}\xi \operatorname{tg}(\gamma - \xi)},$$

oder

$$\text{(35.)} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{x}{h} + \frac{c-x}{h}}{1 - \frac{x(c-x)}{h^2}} = \frac{hc}{h^2 - x(c-x)}.$$

Da die Ableitung von $\operatorname{tg}x$, nämlich $1 + \operatorname{tg}^2 x$ (vergl. Formel Nr. 26 der Tabelle) beständig positiv ist, so nimmt $\operatorname{tg}x$ mit x gleichzeitig zu, und zwar für *alle* Werthe von x. Deshalb wird $\operatorname{tg}\gamma$ mit γ zugleich ein Maximum oder Minimum. In der vorliegenden Aufgabe kommt es daher nur darauf an, x so zu bestimmen, dass

$$\frac{hc}{h^2 - x(c-x)}$$

ein Maximum wird. Dieser Ausdruck ist aber ein Bruch, dessen Zähler eine positive Constante ist. Deshalb wird der Bruch ein *Maximum*, wenn der Nenner ein *Minimum* ist. Man hat also zu setzen

$$f(x) = h^2 - x(c - x) = h^2 - cx + x^2, \tag{36.}$$

$$f'(x) = -c + 2x, \quad f''(x) = 2. \tag{37.}$$

Daraus folgt, dass $f(x)$ für $x = \frac{c}{2}$ ein Minimum wird. Für diesen Werth von x werden $\operatorname{tg}\gamma$ und γ ein Maximum, und das Dreieck wird wieder ein *gleichschenkliges.*

Aufgabe 11. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten, nämlich $a + b$ gleich s, und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ; wie gross müssen die Seiten a und b selbst sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

Auflösung. Bezeichnet man die Seite a mit x, so wird b gleich $s - x$, und man erhält für den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks

$$2F = x(s - x)\sin\gamma. \tag{38.}$$

Deshalb hat man in diesem Falle zu setzen

$$f(x) = sx - x^2, \quad f'(x) = s - 2x, \quad f''(x) = -2, \tag{39.}$$

folglich wird für $x = \frac{s}{2}$ der Flächeninhalt ein Maximum.

Aufgabe 12. Von einem Dreieck ist gegeben die Summe zweier Seiten, nämlich $a + b$ gleich s, und der anliegende Winkel α; wie gross müssen die beiden anderen Winkel sein, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird?

Auflösung. Bezeichnet man den Dreieckswinkel β mit x, so wird γ gleich $180^0 - (\alpha + x)$. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}, \tag{40.}$$

oder, weil nach dem Sinussatz

$$c = \frac{s\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

ist,

$$F = \frac{s^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{2(\sin\alpha + \sin\beta)^2}, \tag{40a.}$$

also

$$(41.)\qquad \frac{2F}{s^2\sin\alpha} = \frac{\sin x \sin(\alpha + x)}{(\sin\alpha + \sin x)^2} = f(x).$$

Da nämlich der Factor $\frac{s^2\sin\alpha}{2}$ positiv ist, so wird F mi[t] $f(x)$ zugleich ein Maximum. Hieraus folgt nach einigen Um-formungen

$$(42.)\qquad f'(x) = \frac{\sin\alpha[\sin(\alpha + 2x) - \sin x]}{(\sin\alpha + \sin x)^3} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Damit $f'(x)$ verschwindet, muss

$$(43.)\quad \sin(\alpha + 2x) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\alpha + x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + 3x}{2}\right) = 0$$

sein. Da $\alpha + x$ grösser als 0 und kleiner als π sein muss, so kann Gleichung (43.) nur befriedigt werden, wenn

$$\frac{\alpha + 3x}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \alpha + 3x = \pi = \alpha + \beta + \gamma$$

ist. Dies giebt

$$(44.)\qquad 2x = 2\beta = \gamma = \tfrac{2}{3}(\pi - \alpha), \quad x = \beta = \tfrac{1}{3}(\pi - \alpha).$$

Ob für diesen Werth von x wirklich ein Maximum von $f(x)$ eintritt, findet man aus dem Vorzeichen von $f''(x)$, wobei nach Formel Nr. 80 der Tabelle

$$(45.)\qquad f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}$$

ist. Nun wird, weil $\alpha + 2x$ gleich $\pi - x$ ist,

$$(46.)\qquad P'(x) = \sin\alpha[2\cos(\alpha + 2x) - \cos x]$$
$$= -3\sin\alpha\cos x < 0,$$

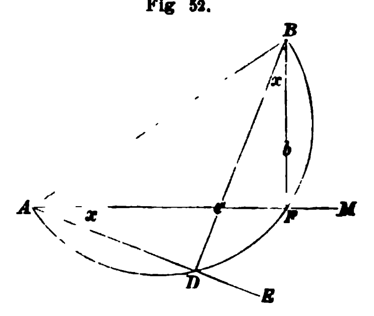
$$(47.)\qquad Q(x) = (\sin\alpha + \sin x)^3 > 0,$$

folglich ist $f''(x) < 0$, und $f(x)$ ein Maximum.

Aufgabe 13. Es ist eine Gerade AM gegeben (Fig. 52) und ausserhalb derselben ein Punkt B; man soll auf der Geraden AM einen Punkt C bestimmen, so dass

$$(48.)\qquad S = p\,.\,AC + q\,.\,CB$$

ein Minimum wird, wobei $p < q$ vorausgesetzt werden soll.



Auflösung. Es sei der Winkel, den CB mit dem von B auf AM gefällten Lothe BF bildet, gleich x, und es sei

$$AF = a, \quad FB = b,$$

dann wird

$$S = f(x) = p(AF - CF) + q \,.\, CB \tag{49.}$$
$$= p(a - b\operatorname{tg}x) + q \cdot \frac{b}{\cos x},$$

$$f'(x) = -\frac{pb}{\cos^2 x} + \frac{qb\sin x}{\cos^2 x} = \frac{b(q\sin x - p)}{\cos^2 x} = \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{50.}$$

$P(x)$ wird gleich 0, wenn

$$\sin x = \frac{p}{q} \tag{51.}$$

ist; für diesen Werth von x wird

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)} = \frac{bq\cos x}{\cos^2 x} = \frac{bq}{\cos x} > 0, \tag{52.}$$

folglich tritt ein Minimum ein.

Legt man AE unter dem aus Gleichung (51.) gefundenen Winkel x im Punkte A an die Gerade AM an und verlängert BC bis zum Schnittpunkte D mit der Geraden AE, so steht BD senkrecht auf AE, und es wird mit Rücksicht auf Gleichung (51.)

$$S = p \,.\, AC + q \,.\, CB = q\sin x \,.\, AC + q \,.\, CB \tag{53.}$$
$$= q(AC\sin x + CB) = q(DC + CB) = q \,.\, DB.$$

Aufgabe 14. Es ist eine Gerade AM gegeben (Fig. 53) und auf verschiedenen Seiten derselben zwei Punkte B und C; man soll auf AM einen Punkt D bestimmen, so dass

$$S = p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD \tag{54.}$$

ein Minimum wird.

Fig. 53.

Auflösung. Es seien BB_1 und CC_1 die Lothe, die man von B und C auf AM fällen kann, und es sei

$$(55.)\quad \begin{cases} AB_1 = b, & AC_1 = c, \\ B_1B = b_1, & C_1C = c_1, \quad AD = x, \end{cases}$$

dann wird

$$(56.)\quad S = f(x) = px + q\sqrt{(b-x)^2 + b_1^2} + r\sqrt{(c-x)^2 + c_1^2},$$

$$(57.)\quad f'(x) = p - \frac{q(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + b_1^2}} - \frac{r(c-x)}{\sqrt{(c-x)^2 + c_1^2}} = 0.$$

oder, wenn man den Winkel B_1DB mit ν und den Winkel C_1DC mit μ bezeichnet,

$$(57a.)\quad p - q\cos\nu - r\cos\mu = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so tritt wirklich ein Minimum ein, denn es ist

$$f''(x) = \frac{qb_1^2}{[(b-x)^2 + b_1^2]^{3/2}} + \frac{rc_1^2}{[(c-x)^2 + c_1^2]^{3/2}} > 0.$$

Der Werth von x und die Lage des Punktes D lassen sich aus der Gleichung (57.) oder (57a.) noch nicht in einfacher Weise ermitteln, dagegen werden diese Gleichungen benutzt werden können zur Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 15. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben (Fig. 54); man soll einen Punkt D bestimmen, so dass

$$(58.)\quad S = p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD$$

ein Minimum wird.

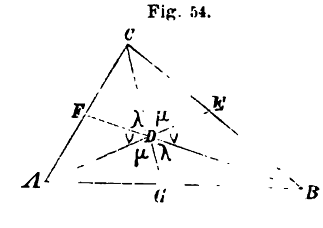


Fig. 54.

Auflösung. Die Gerade AD habe bereits die verlangte Richtung, dann ergiebt sich, wenn man Winkel

$$BDG = CDF \text{ mit } \lambda,$$
$$CDE = ADG \text{ mit } \mu,$$
$$ADF = BDE \text{ mit } \nu$$

bezeichnet, aus Gleichung (57a.) der vorhergehenden Aufgabe

(59.) $$p - q\cos\nu - r\cos\mu = 0.$$

In derselben Weise, oder durch cyklische Vertauschung der Buchstaben p, q, r und λ, μ, ν findet man

(60.) $$q - r\cos\lambda - p\cos\nu = 0,$$

(61.) $$r - p\cos\mu - q\cos\lambda = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen p, so erhält man

(62.) $$q(\cos\mu + \cos\lambda\cos\nu) = r(\cos\nu + \cos\lambda\cos\mu),$$

oder, weil

$$\cos\mu = -\cos(\lambda + \nu) = -\cos\lambda\cos\nu + \sin\lambda\sin\nu,$$
$$\cos\nu = -\cos(\lambda + \mu) = -\cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu$$

ist.

(62a.) $$q\sin\lambda\sin\nu = r\sin\lambda\sin\mu,$$

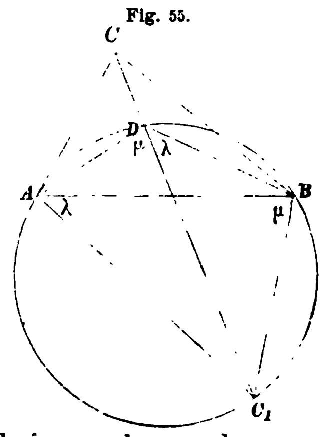
oder

(63.) $$q : \sin\mu = r : \sin\nu.$$

Ebenso findet man

(64.) $$p : \sin\lambda = q : \sin\mu.$$

Fig. 55.



Beschreibt man um das Dreieck ADB den umschriebenen Kreis (Fig. 55) und verlängert CD bis zum zweiten Schnittpunkte C_1 mit diesem Kreise, so sind in dem Dreieck ABC_1 die Winkel bei A, B und C_1 bezw. gleich λ, μ und ν, so dass man erhält

(65.) $$BC_1 : C_1A : AB = \sin\lambda : \sin\mu : \sin\nu,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (63.) und (64.)

(66.) $$BC_1 : C_1A : AB = p : q : r.$$

Daraus ergiebt sich die folgende *Construction*:

Man errichte über AB auf der zu C entgegengesetzten Seite ein Dreieck ABC_1, dessen Seiten in Uebereinstimmung mit Glei-

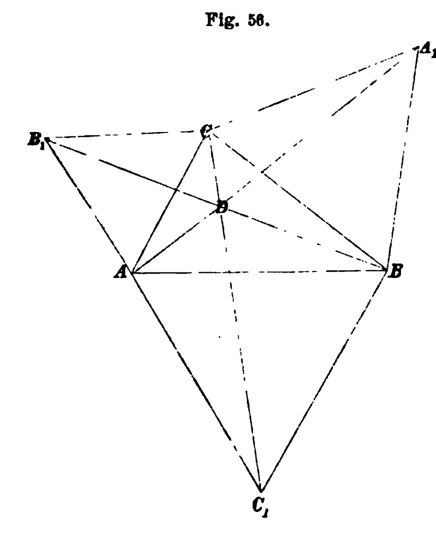


Fig. 56.

chung (66.) sich verhalten wie $p : q : r$, und beschreibe um dieses Dreieck den umschriebenen Kreis, dann schneidet die Gerade CC_1 diesen Kreis in dem gesuchten Punkte D.

Man kann natürlich auch über der Seite BC ein Dreieck BCA_1 und über der Seite CA ein Dreieck CAB_1 construiren (Fig. 56), so dass

$$(67.)\quad BC : CA_1 : A_1B = B_1C : CA : AB_1 = p : q : r$$

ist. Durch den gesuchten Punkt D gehen dann auch die Geraden AA_1 und BB_1 und die Kreise, welche diesen Dreiecken BCA_1 und CAB_1 umschrieben sind. Gleichzeitig erhält man für S eine geometrische Darstellung. Nach dem *Ptolemaeischen* Lehrsatze ist nämlich (Fig. 55)

$$(68.)\qquad AD \,.\, BC_1 + BD \,.\, AC_1 = C_1D \,.\, AB;$$

nun ist aber nach Construction

$$BC_1 = \frac{p \,.\, AB}{r}, \quad AC_1 = \frac{q \,.\, AB}{r},$$

folglich geht Gleichung (68.) über in

$$\frac{AB}{r}(p \,.\, AD + q \,.\, BD) = C_1D \,.\, AB.$$

Dies giebt

$$(69.)\ S = p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD = r(CD + DC_1) = r \,.\, CC_1.$$

In derselben Weise findet man auch

$$(69a.)\qquad S = p \,.\, AA_1 \quad \text{und} \quad S = q \,.\, BB_1.$$

Ein besonderer Fall ist der, wo

$$p = q = r = 1, \quad \text{also} \quad S = AD + BD + CD$$

wird, ein Fall, der auch in Figur 56 berücksichtigt ist. Dann sind die Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1 *gleichseitige Dreiecke*, die Winkel λ, μ, ν sind alle drei gleich 60^0, so dass Winkel

$$BDC = CDA = ADB = 120^0$$

wird, und endlich ist

$$S = AA_1 = BB_1 = CC_1. \tag{69b.}$$

Bemerkung.

1) Der gefundene Punkt D hat nur dann die Eigenschaft des Minimums, wenn von den Eckpunkten des Dreiecks keiner *innerhalb* der um die Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1 beschriebenen Kreise liegt. Läge z. B. C innerhalb des Kreises um ABC_1, so würde aus den Ungleichungen

$$AC < AD + CD, \quad BC < BD + CD, \quad AC + BC < AD + BD,$$

wenn man sie bezw. mit $p + r - q$, $q + r - p$, $p + q - r$ multiplicirt und dann addirt, folgen

$$p \,.\, AC + q \,.\, BC < p \,.\, AD + q \,.\, BD + r \,.\, CD.$$

2) Die letzten drei Aufgaben haben ganz besondere Bedeutung für die Lehre vom Trassiren und bilden den Ausgangspunkt für eine Reihe von Aufgaben, deren Besprechung hier aber zu weit führen würde. (Man vergleiche *Launhardt*, Theorie des Trassirens, Hannover 1887.)

D. Aufgaben aus der Stereometrie.

Aufgabe 16. Man soll unter allen Cylindern, die sich in einen geraden Kegel einschreiben lassen, denjenigen bestimmen, welcher das grösste Volumen hat.

Auflösung. Die Höhe des gegebenen Kegels (Fig. 57) CS sei h, der Halbmesser CB der Grundfläche sei r, die Höhe CE des eingeschriebenen Cylinders sei y, und der Halbmesser CD seiner Grundfläche sei x. Dadurch findet man für das Volumen des Cylinders

$$V = x^2 \pi y. \tag{70.}$$

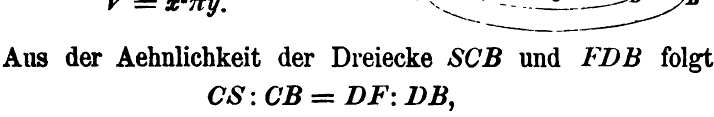


Fig. 57.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SCB und FDB folgt

$$CS : CB = DF : DB,$$

oder

$$h : r = y : r - x,$$

folglich wird

$$(71.)\qquad y = \frac{h}{r}(r - x) \quad \text{und} \quad V = \frac{h\pi}{r} x^2(r - x).$$

Die Function, welche ein Maximum werden soll, ist daher $\left(\text{abgesehen von dem positiven constanten Factor } \frac{h\pi}{r}\right)$

$$(72.)\qquad f(x) = x^2(r - x) = rx^2 - x^3.$$

Dies giebt

$$(73.)\quad f'(x) = 2rx - 3x^2 = x(2r - 3x), \quad f''(x) = 2r - 6x.$$

Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet erstens für $x = 0$ und zweitens für $x = \frac{2r}{3}$. Nun ist

$$f''(0) = 2r > 0,$$

folglich erhält man für $x = 0$ ein Minimum. In der That, der entsprechende Cylinder ist zu einer geraden Linie zusammengeschrumpft, und sein Volumen ist gleich Null. Dagegen wird

$$f''\left(\frac{2r}{3}\right) = -2r < 0,$$

folglich wird $f\left(\frac{2r}{3}\right)$ ein Maximum. Die Höhe y des zugehörigen Cylinders ist nach Gleichung (71.) gleich $\frac{h}{3}$, und das Volumen wird nach Gleichung (70.)

$$(74.)\qquad V = \frac{4r^2h\pi}{27}.$$

Da das Volumen des gegebenen Kegels gleich $\frac{r^2h\pi}{3}$ ist, so ist das Volumen des grössten Cylinders, der sich in einen geraden Kreiskegel einschreiben lässt, gleich $\frac{4}{9}$ von dem Volumen des Kegels.

Aufgabe 17. Man soll unter allen Cylindern, welche sich einem geraden Kreiskegel einschreiben lassen (Fig. 57), denjenigen bestimmen, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Auflösung. Wendet man dieselben Bezeichnungen an wie in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man für die Mantelfläche des Cylinders

$$M = 2x\pi y. \tag{75.}$$

Nach Gleichung (71.) ist aber

$$y = \frac{h}{r}(r - x),$$

folglich wird

$$M = \frac{2h\pi}{r}(rx - x^2).$$

Die Function, welche ein Maximum werden soll, ist daher

$$f(x) = rx - x^2, \tag{76.}$$

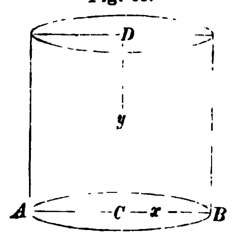
deshalb wird

$$f'(x) = r - 2x, \quad f''(x) = -2. \tag{77.}$$

Daraus findet man, dass die Mantelfläche für $x = \frac{r}{2}$ ein Maximum wird.

Aufgabe 18. Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 58) soll so geformt werden, dass es bei gegebenem Volumen eine möglichst kleine Gesammtoberfläche besitzt. In welchem Verhältnisse stehen dann die Höhe und der Halbmesser der Grundfläche?

Fig. 58.



Auflösung. Bezeichnet man den Halbmesser CB der Grundfläche mit x, die Höhe CD mit y, die Oberfläche mit F und das Volumen mit V, so wird

$$V = x^2\pi y, \quad \text{oder} \quad y = \frac{V}{x^2\pi}, \tag{78.}$$

$$F = 2x\pi y + 2x^2\pi = 2Vx^{-1} + 2x^2\pi = f(x), \tag{79.}$$

also

(80.) $f'(x) = -2Vx^{-2} + 4x\pi = 2x^{-2}(2x^3\pi - V) = 0.$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (78.)

(81.) $$2x^3\pi = V, \quad y = 2x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.$$

Für diesen Werth von x tritt wirklich ein Minimum ein, denn es wird dann

(82.) $f''(x) = 4Vx^{-3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0.$

Die Gesammtoberfläche wird daher möglichst klein, wenn der Durchmesser des Grundkreises und die Höhe einander gleich sind.

Aufgabe 19. Ein cylindrisches Gefäss (Fig. 58) soll so geformt werden, dass bei gegebenem Volumen (nicht die Gesammtoberfläche, sondern nur) der Mantel und die *eine* Grundfläche zusammen ein Minimum werden.

Auflösung. In diesem Falle ist

(83.) $f(x) = 2x\pi y + x^2\pi = 2Vx^{-1} + x^2\pi,$

(84.) $f'(x) = -2Vx^{-2} + 2x\pi = 0$ für $x^3\pi = V.$

Dies giebt

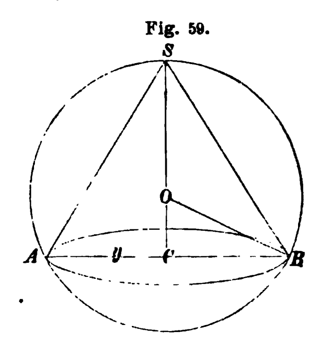
(85.) $$y = x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\,,$$

und zwar tritt für diesen Werth von x wirklich ein Minimum ein, weil

(86.) $$f''(x) = 4Vx^{-3} + 2\pi = 6\pi > 0$$

wird. *Hier muss also der Halbmesser der Grundfläche der Höhe gleich sein.*

Fig. 59.



Aufgabe 20. Man soll einer Kugel einen geraden Kegel (Fig. 59) einschreiben, dessen Mantelfläche ein Maximum ist.

Auflösung. Bezeichnet man den Halbmesser BO der Kugel mit a, den Halbmesser AC von der Grundfläche des Kegels mit y, die Scheitelkante AS mit s und die Höhe CS mit x, so wird die Mantelfläche des Kegels

(87.) $$M = y\pi s.$$

Nun ist aber nach bekannten Sätzen aus der Planimetrie

(88.) $$y^2 = x(2a - x), \quad s^2 = 2ax;$$

deshalb wird

(89.) $$M^2 = 2ax^2(2a - x)\pi^2.$$

Ist M ein Maximum, so gilt dasselbe von M^2, folglich hat man hier zu setzen

(90.) $$f(x) = x^2(2a - x) = 2ax^2 - x^3;$$

dies giebt

(91.) $$\begin{cases} f'(x) = 4ax - 3x^2 = x(4a - 3x), \\ f''(x) = 4a - 6x. \end{cases}$$

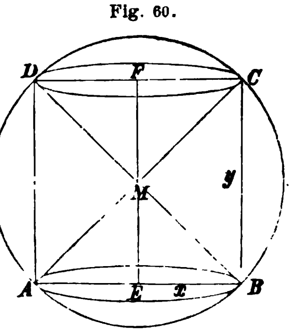
Für $x = 0$ wird $f(x)$ ein Minimum, dagegen wird

(92.) $$f\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{32a^3}{27}$$

ein Maximum.

Aufgabe 21. In eine Kugel mit dem Halbmesser a soll ein Cylinder mit möglichst grosser Gesammtoberfläche einbeschrieben werden. (Vergl. Fig. 60).

Fig. 60.



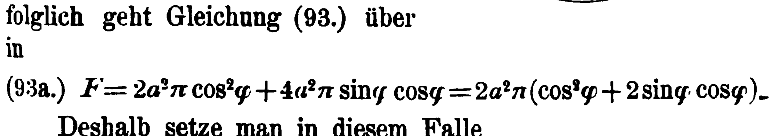
Auflösung. Bezeichnet man den Halbmesser der Grundkreise mit x und die Höhe des Cylinders mit y, so wird die Oberfläche

(93.) $$F = 2x^2\pi + 2x\pi y.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel BAC mit φ, so wird

(94.) $$\begin{cases} 2x = 2a\cos\varphi, \\ y = 2a\sin\varphi, \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (93.) über in



(93a.) $$F = 2a^2\pi\cos^2\varphi + 4a^2\pi\sin\varphi\cos\varphi = 2a^2\pi(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi).$$

Deshalb setze man in diesem Falle

(95.) $$f(\varphi) = \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

also

$$(96.)\quad f'(\varphi) = -2\cos\varphi\sin\varphi + 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 2\cos(2\varphi) - \sin(2\varphi).$$

$$(97.)\quad f''(2\varphi) = -4\sin(2\varphi) - 2\cos(2\varphi).$$

Ein Maximum oder Minimum kann daher nur eintreten, wenn

$$(98.)\qquad \mathrm{tg}(2\varphi) = 2, \quad \text{oder} \quad \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - \mathrm{tg}^2\varphi} = 2,$$

also

$$(98\mathrm{a.})\qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2 \mp \frac{2}{\sqrt{5}}},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

ist. Da φ ein *spitzer* Winkel sein muss, so kann hierbei nur das *obere* Vorzeichen gelten. Man erhält daher nach den Gleichungen (94.)

$$(99.)\quad x = a\cos\varphi = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad y = 2a\sin\varphi = a\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

Nun wird nach den Gleichungen (98a.) und (97.)

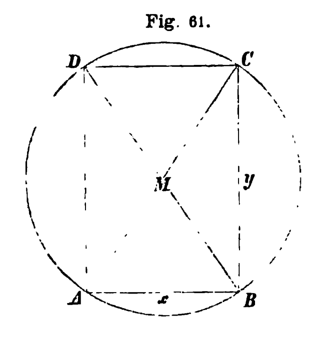
$$(100.)\quad \cos(2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(2\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad f''(\varphi) = -2\sqrt{5} < 0,$$

folglich tritt für die gefundenen Werthe von x und y ein Maximum ein.

E. Aufgaben aus der Physik und Mechanik.

Aufgabe 22. Man soll aus einem Baumstamme mit kreisförmigem Querschnitte (Fig. 61) einen Balken mit rechteckigem Querschnitte so ausschneiden, dass seine Tragfähigkeit ein Maximum wird.

Fig. 61.



Auflösung. Da die Tragfähigkeit T proportional zu der Breite x des Querschnitts und proportional zum Quadrate der Höhe y desselben ist, so wird

$$T = cxy^2,$$

wobei

$$y^2 = d^2 - x^2,$$

wenn man mit d den Durchmesser AC des Kreises bezeichnet. Dies giebt

$$T = cx(d^2 - x^2) = c(d^2x - x^3), \tag{101.}$$

$$f(x) = d^2x - x^3, \tag{102.}$$

$$f'(x) = d^2 - 3x^2 = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{d}{\sqrt{3}}. \tag{103.}$$

Für diesen Werth von x tritt ein Maximum ein, denn es ist

$$f''(x) = -6x < 0. \tag{104.}$$

Die Tragfähigkeit des Balkens ist daher ein Maximum, wenn

$$x^2 : y^2 : d^2 = 1 : 2 : 3, \quad \text{oder} \quad x : y : d = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}. \tag{105.}$$

Aufgabe 23. Auf derselben Seite einer geraden Linie MN (Fig. 62) seien zwei Punkte A und B gegeben; man soll die Lage des Punktes C auf der Geraden MN so bestimmen, dass $\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$ ein Minimum wird.

Fig. 62.

Auflösung. Fällt man von A und B auf MN die Lothe AA_1 und BB_1, dann sei

$$A_1A = a, \quad B_1B = b,$$
$$A_1B_1 = l;$$

setzt man also

$$A_1C = x, \quad \text{so wird} \quad CB_1 = l - x.$$

Dies giebt

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = a^2 + x^2 + b^2 + (l - x)^2 = f(x), \tag{106.}$$

$$f'(x) = 2x - 2(l - x) = 4x - 2l, \quad f''(x) = 4, \tag{107.}$$

folglich wird $f(x)$ ein Minimum für $x = \frac{l}{2}$, d. h., wenn der Punkt C in der Mitte zwischen A_1 und B_1 liegt.

Aufgabe 24. Auf derselben Seite einer geraden Linie MN (Fig. 62) seien zwei Punkte A und B gegeben; man soll die Lage des Punktes C auf der Geraden MN so bestimmen, dass $AC + CB$ ein Minimum wird.

Auflösung. Die Function, welche hier ein Minimum werden soll, ist

$$(108.)\qquad AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2} = f(x).$$

Dies giebt

$$(109.)\qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}},$$

$$(110.)\qquad f''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{b^2}{[b^2 + (l - x)^2]\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}.$$

Um die Werthe von x zu bestimmen, für welche $f'(x)$ verschwindet, beachte man, dass aus Gleichung (109.) folgt

$$f'(x) = \frac{A_1C}{AC} - \frac{CB_1}{CB} = \cos ACA_1 - \cos BCB_1.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn der Winkel

$$(111.)\qquad ACA_1 = BCB_1.$$

Die beiden Dreiecke ACA_1 und BCB_1 sind deshalb ähnlich, und es wird

$$x : a = (l - x) : b,$$

oder

$$(112.)\qquad x = \frac{al}{a + b}, \quad l - x = \frac{bl}{a + b}.$$

Da bei dieser Bestimmung von x die zweite Ableitung von $f(x)$ nach Gleichung (110.), nämlich

$$(113.)\qquad f''(x) = \frac{\overline{A_1A}^2}{\overline{AC}^3} + \frac{\overline{B_1B}^2}{\overline{BC}^3},$$

positiv ist, so wird $AC + CB$ ein Minimum.

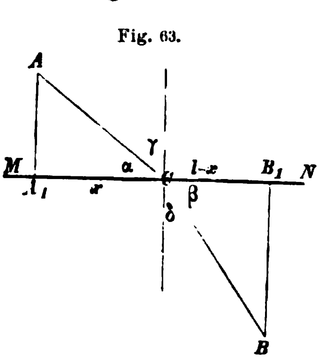
Wegen Gleichheit der Winkel ACA_1 und BCB_1 ist die gebrochene Linie ACB der Weg, den ein Lichtstrahl nehmen würde, der von dem Punkte A ausgeht und von der Geraden MN nach B reflectirt werden soll.

Dieser Weg ist demnach ein Minimum.

Aufgabe 25. Die Gerade MN (Fig. 63) trenne das Medium, in welchem das Licht sich mit der Geschwindigkeit c fortbewegt, von dem Medium, in welchem die Geschwindigkeit des Lichtes

gleich d ist; in welchem Punkte C muss der Lichtstrahl die Gerade MN treffen, damit er in der kürzesten Zeit vom Punkte A in dem ersten Medium zum Punkte B in dem anderen Medium gelangt, und nach welchem Gesetze wird er gebrochen?

Fig. 63.



Auflösung. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei den beiden vorhergehenden Aufgaben wird in diesem Falle die Zeit t_1, welche der Strahl braucht, um von A nach C zu gelangen, $\frac{AC}{c}$, und die Zeit t_2, welche er braucht, um von C nach B zu gelangen, $\frac{CB}{d}$,

Setzt man also

$$\frac{1}{c} = p, \quad \frac{1}{d} = q, \tag{114.}$$

so erhält man

$$f(x) = t_1 + t_2 = p\sqrt{a^2 + x^2} + q\sqrt{b^2 + (l - x)^2}, \tag{115.}$$

$$f'(x) = \frac{px}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{q(l - x)}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = 0, \tag{116.}$$

oder

$$f'(x) = \frac{p \cdot A_1C}{AC} - \frac{q \cdot CB_1}{CB} = p\cos\alpha - q\cos\beta = 0, \tag{116a.}$$

wobei die Winkel A_1CA und B_1CB bezw. mit α und β bezeichnet sind. Nennt man die Winkel, welche das Einfallsloth im Punkte C mit den Strahlen AC und BC bildet, bezw. γ und δ, so wird

$$p\sin\gamma = q\sin\delta, \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\delta}{d},$$

also

$$\sin\gamma : \sin\delta = c : d. \tag{117.}$$

In dieser Gleichung ist das Gesetz ausgesprochen, nach welchem der Strahl im Punkte C gebrochen wird.

Aus

$$(118.)\quad f''(x) = \frac{pa^2}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{qb^2}{[b^2 + (l - x)^2]\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$$

$$= \frac{p \cdot \overline{A_1A}^2}{\overline{AC}^3} + \frac{q \cdot \overline{B_1B}^2}{\overline{BC}^3} > 0$$

folgt wieder, dass $p \cdot AC + q \cdot CB$ ein Minimum wird.

VII. Abschnitt.

Bestimmung von Ausdrücken, welche an der Grenze eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ haben.

§ 58.

Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 81.)

Nähern sich in dem Bruche $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ Zähler und Nenner der Grenze 0, wenn sich x dem Werthe a nähert, so erhält dieser Bruch für x gleich a die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Beispiele dafür kommen in der Differential-Rechnung sehr häufig vor. Schon die Erklärung des Differential-Quotienten (vergl. Formel Nr. 15 der Tabelle)

(1.) $$f'(x) = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

liefert den Grenzwerth eines Ausdruckes von der Form $\frac{0}{0}$. Indem man x mit a und x_1 mit x vertauscht, geht Gleichung (1.) über in

(2.) $$f'(a) = \lim_{x = a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a};$$

ebenso ist

(3.) $$\varphi'(a) = \lim_{x = a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt schon die Lösung der vorgelegten Aufgabe. Weil nämlich nach Voraussetzung

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{und} \quad f(a) = 0 \tag{4.}$$

ist, so erhält man

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}, \tag{5.}$$

also

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\lim \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\lim \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}. \tag{6.}$$

Man findet daher den wahren Werth von $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, *indem man Zähler und Nenner einzeln differentiirt und in den Quotienten der Ableitungen* x *gleich* a *einsetzt.*

Gleichung (6.) führt zu keinem brauchbaren Resultate, wenn $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ entweder beide gleich Null oder beide unendlich gross werden. Deshalb möge Gleichung (6.) durch die folgende Untersuchung noch auf eine etwas andere Form gebracht werden.

Hülfssatz. *Verschwindet die Function* $F(x)$, *die mit ihrer ersten Ableitung* $F'(x)$ *in dem Intervalle von* a *bis* b *stetig und endlich sein möge, für* $x = a$ *und für* $x = b$, *so giebt es zwischen* a *und* b *mindestens einen Werth von* x *— er heisse* ξ *—, für welchen* $F'(x) = 0$ *wird.*

Beweis. Wäre $F'(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b *positiv*, so müsste nach Satz 3 in § 13 (Seite 81) die Function $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b *beständig zunehmen.* Es müsste also, da $F(a) = 0$ ist, $F(b) > 0$ sein, und das widerstreitet der Voraussetzung. Wäre dagegen $F'(x)$ für alle Werthe von x zwischen a und b *negativ*, so müsste nach demselben Satze $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b *beständig abnehmen.* Es müsste also, da $F(a) = 0$ ist, $F(b) < 0$ sein, was gleichfalls der Voraussetzung widerstreitet.

Deshalb muss $F'(x)$ in dem betrachteten Intervalle *positive und negative* Werthe annehmen. Es sei z. B.

$$F'(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad F'(x_2) < 0,$$

wobei x_1 und x_2 beide zwischen a und b liegen. Da nun $F'(x)$ in dem betrachteten Intervalle nach Voraussetzung eine *stetige* Function ist, so giebt es nach Satz 14 in § 8 (Seite 55) zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Werth von x, für welchen $F'(x)$ gleich Null wird. Dieser Werth von x, welcher ξ heissen möge, liegt deshalb auch zwischen a und b, so dass die Grösse

$$\Theta = \frac{\xi - a}{b - a} \tag{7.}$$

zwischen 0 und + 1 liegt. Aus Gleichung (7.) findet man

$$\xi = a + \Theta(b - a), \tag{8.}$$

also

$$F'(\xi) = F'[a + \Theta(b - a)] = 0. \tag{9.}$$

Den Sinn dieses Satzes kann man am besten erkennen, indem man die Function

$$y = F(x)$$

durch eine Curve geometrisch darstellt, welche die X-Axe in den Punkten A und B schneiden muss, wenn man

$$OA = a, \quad OB = b$$

macht. (Fig. 64 und 65.)

Fig. 64.

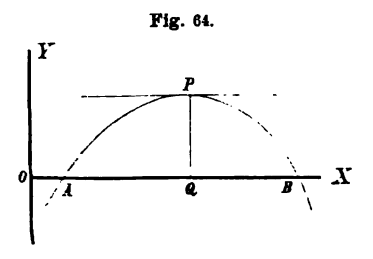
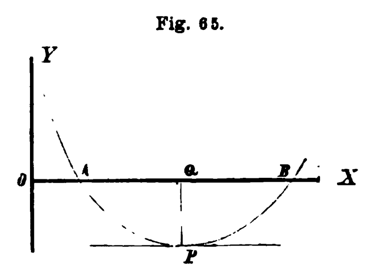


Fig. 65.



Wenn nun die Curve (dem Falle $F'(a) > 0$ entsprechend) im Punkte A *steigt* (Fig. 64), so muss sie, um die X-Axe im Punkte B wieder zu erreichen, nachher *fallen*, d. h. für spätere

Werthe von x muss $F'(x)$ *negativ* sein. Da nach Voraussetzung $F'(x)$ in dem Intervalle *stetig und endlich* ist, so muss bei dem Übergange vom Steigen zum Fallen auf der Curve ein Punkt P mit der Abscisse $OQ = \xi$ liegen, in welchem die Tangente zur X-Axe parallel ist, d. h. $F'(\xi)$ ist gleich Null.

Wenn dagegen die Curve (dem Falle $F'(a) < 0$ entsprechend) im Punkte A *fällt* (Fig. 65), so muss sie, um die X-Axe im Punkte B wieder zu erreichen, nachher *steigen*, d. h. für spätere Werthe von x muss $F'(x)$ *positiv* sein. Auch hier muss also bei dem Übergange vom Fallen zum Steigen auf der Curve ein Punkt P mit der Abscisse $OQ = \xi$ liegen, in welchem die Tangente zur X-Axe parallel ist, d. h. $F'(\xi)$ ist auch in diesem Falle gleich Null.

Der Satz bleibt sogar auch dann noch richtig, wie man ohne Weiteres erkennt, wenn die Curve in dem Punkte A oder B, oder auch in beiden Punkten auf der X-Axe senkrecht steht, wenn also

$F'(a) = \pm\infty$, oder $F'(b) = \pm\infty$, oder $F'(a) = \pm\infty$ *und* $F'(b) = \pm\infty$.

Hülfssatz 2. *Sind die Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ mit ihren ersten Ableitungen $\varphi'(x)$ und $f'(x)$ in dem Intervalle von a bis b stetig und endlich, so giebt es zwischen a und b mindestens einen Werth von x, für welchen*

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \tag{10.}$$

wird.

Beweis. Die Function

$$F(x) = \varphi(x) - \varphi(a) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)}[f(x) - f(a)] \tag{11.}$$

verschwindet für $x = a$ und $x = b$ und bleibt mit ihrer Ableitung $F'(x)$ nach den Voraussetzungen des Satzes in dem Intervalle von a bis b stetig und endlich, wenn $f(b)$ von $f(a)$ verschieden ist. Deshalb giebt es nach dem ersten Hülfssatze zwischen a und b mindestens einen Werth von x, für welchen $F'(x)$ verschwindet. Nennt man diesen Werth wieder ξ, so erhält man also

$$F'(\xi) = \varphi'(\xi) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{f(b) - f(a)} f'(\xi) = 0,$$

oder

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}=\frac{\varphi'[a+\Theta(b-a)]}{f'[a+\Theta(b-a)]}, \tag{12.}$$

und wenn man $b=x$ setzt,

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{f(x)-f(a)}=\frac{\varphi'[a+\Theta(x-a)]}{f'[a+\Theta(x-a)]}. \tag{12a.}$$

Diese Formel stimmt mit Gleichung (26.) in § 36 überein, wenn man die Buchstaben f und x bezw. mit ψ und z vertauscht. Sie bleibt auch dann noch richtig, wenn $\varphi'(a)$ oder $f'(a)$, oder $\varphi'(a)$ *und* $f'(a)$ unendlich gross werden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\varphi(a)=0 \quad \text{und} \quad f(a)=0$$

ist, geht Gleichung (12a.) über in

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi'[a+\Theta(x-a)]}{f'[a+\Theta(x-a)]}=\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)}. \tag{13.}$$

Dies gilt, wie klein auch $x-a$ sein mag, folglich wird

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(\xi)}{f'(\xi)},$$

oder, da ξ mit x zugleich sich dem Grenzwerthe a nähert,

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{14.}$$

Diese Gleichung geht ohne Weiteres in Gleichung (6.) über, wenn $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ nicht beide gleich 0 sind oder nicht beide unendlich gross werden.

Aus Gleichung (14.) findet man sogleich, dass man das angegebene Verfahren noch zum zweiten Male anwenden muss, wenn auch

$$\lim_{x=a}\varphi'(x)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a}f'(x)=0 \tag{15.}$$

ist. In diesem Falle wird also

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi''(x)}{f''(x)}. \tag{16.}$$

Wird auch noch

$$\lim_{x=a}\varphi''(x)=0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a}f''(x)=0, \tag{17.}$$

so wendet man dasselbe Verfahren auf $\lim \frac{\varphi''(x)}{f''(x)}$ an, indem man Zähler und Nenner einzeln differentiirt, und erhält

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} \,. \tag{18.}$$

Kommt man bei Fortsetzung dieses Verfahrens zu einem Bruche, der für $\lim x = a$ nicht mehr die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ hat, so ist die Aufgabe gelöst. In diesem Falle ergiebt sich die allgemeine Regel: *Ist*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=a} \varphi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x=a} \varphi'(x) = 0, \quad \ldots \lim\limits_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = 0, \\ \lim\limits_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x=a} f'(x) = 0, \quad \ldots \lim\limits_{x=a} f^{(n-1)}(x) = 0, \end{cases} \tag{19.}$$

so ist

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)} \,. \tag{20.}$$

Bei dieser Herleitung dürfen $\lim\limits_{x=a} \varphi^{(n)}(x)$ und $\lim\limits_{x=a} f^{(n)}(x)$ auch unendlich gross sein. Macht man aber die Voraussetzung, dass die Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ mit ihren ersten n Ableitungen *stetig* und *endlich* bleiben für alle Werthe von x, deren Unterschied von a beliebig klein ist, so kann man dasselbe Resultat auch durch Anwendung der *Taylor*'schen Reihe finden. Nach Formel Nr. 50 der Tabelle ist, wenn man $n + 1$ mit n vertauscht,

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}[a + \Theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n; \end{aligned} \tag{21.}$$

ebenso findet man

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(a) &+ \frac{\varphi'(a)}{1!}(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{\varphi^{(n)}[a + \Theta_1(x-a)]}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \tag{22.}$$

Wenn aber die in den Gleichungen (19.) angegebenen Voraussetzungen gelten, so reduciren sich diese Gleichungen (21.) und (22.) auf

$$f(x) = \frac{f^{(n)}[a + \Theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n, \tag{21a.}$$

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^{(n)}[a + \Theta_1(x - a)]}{n!}(x - a)^n, \tag{22a.}$$

folglich ist

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n)}[a + \Theta_1(x - a)]}{f^{(n)}[a + \Theta(x - a)]} \tag{23.}$$

und

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)}, \tag{24.}$$

ein Resultat, das mit Gleichung (20.) übereinstimmt.

Bei dieser Untersuchung ist die Voraussetzung gemacht, dass man die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $f(x)$ bilden kann, namentlich aber, dass a ein *endlicher* Werth ist. Diese zweite Voraussetzung darf auch wegfallen: denn, wenn a unendlich gross wird, setze man

$$x = \frac{1}{t}, \quad \text{also} \quad t = \frac{1}{x}, \tag{25.}$$

dann wird

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{t=0} \frac{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t=0} \frac{\frac{d\varphi(x)}{dt}}{\frac{df(x)}{dt}}. \tag{26.}$$

Da nun aber

$$\frac{d\varphi(x)}{dt} = \varphi'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot \varphi'(x), \quad \frac{df(x)}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot f'(x)$$

ist, so findet man, auch wenn man t als die unabhängige Veränderliche betrachtet, nach der angegebenen Regel

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{27.}$$

Dabei muss man die Functionen $\varphi'(x)$ und $f'(x)$ zunächst für endliche Werthe von x bilden und dann x unendlich gross werden lassen.

§ 59.

Uebungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}$.

2) $\lim\limits_{x=0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$,

$\lim \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim \frac{\sin x}{6x} = \frac{0}{0}$,

$\lim \frac{\sin x}{6x} = \lim \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$.

3) $\lim\limits_{x=0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim \frac{a^x \mathrm{l} a - b^x \mathrm{l} b}{1} = \mathrm{l} a - \mathrm{l} b = \mathrm{l}\left(\frac{a}{b}\right)$.

4) $\lim\limits_{x=1} \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = \lim \frac{-mx^{m-1}}{-nx^{n-1}} = \frac{m}{n}$.

5) $\lim\limits_{x=0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$.

6) $\lim\limits_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} = \lim \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$.

Nun ist aber

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x = \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x};$$

folglich wird

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} = \lim \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3.$$

7) $\lim\limits_{x=a} \frac{x^n - a^n}{\mathrm{l}(x^n) - \mathrm{l}(a^n)} = \lim \frac{nx^{n-1}}{\frac{n}{x}} = \lim x^n = a^n$.

8) $\lim\limits_{x=0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{1} = 1$.

Die Aufgabe 8 findet folgende geometrische Anwendung. In der Integral-Rechnung erhält man für die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation der Ellipse um die *grosse* Axe entsteht, den Ausdruck

(1.) $$F = 2b^2\pi + \frac{2a^2 b\pi}{e} \arcsin\left(\frac{e}{a}\right),$$

oder, wenn man $\frac{e}{a} = x$ setzt,

(1a.) $$F = 2b^2\pi + 2ab\pi \cdot \frac{\arcsin x}{x}.$$

Wenn nun die Ellipse in einen Kreis übergeht, wenn also

$$a = b, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 0, \quad x = 0$$

wird, so geht das *Rotations-Ellipsoid* in eine Kugel über, und das zweite Glied in dem Ausdruck für F erhält die Form $\frac{0}{0}$.

Benutzt man aber das soeben gefundene Resultat, so ergiebt sich für die Oberfläche der Kugel aus Gleichung (1a.) der bekannte Ausdruck

$$F = 4a^2\pi.$$

9) $$\lim_{x=0} \frac{l(1+x) - l(1-x)}{x} = \lim \frac{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}}{1} = 2.$$

Auch dieses Resultat findet eine geometrische Anwendung. In der Integral-Rechnung erhält man für die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation der Ellipse um die *kleine* Axe entsteht, und welcher *Sphäroid* genannt wird, den Ausdruck

(2.) $$F = 2a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{e}\, l\left(\frac{a+e}{a-e}\right) = 2a^2\pi + b^2\pi\, \frac{l(1+x) - l(1-x)}{x},$$

wenn man wieder $\frac{e}{a}$ mit x bezeichnet. Geht nun die Ellipse in einen Kreis über, wird also

$$a = b, \quad e = 0, \quad x = 0,$$

so geht das *Sphäroid* in eine Kugel über, und das zweite Glied in dem Ausdrucke für F erhält die Form $\frac{0}{0}$. Benutzt man aber das soeben gefundene Resultat, so ergiebt sich für die Oberfläche der Kugel aus Gleichung (2.) der bekannte Ausdruck

$$F = 4a^2\pi.$$

10) $$\lim_{x=1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim \frac{nx^{n-1}}{1} = n.$$

11) $$\lim_{x=1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} = \lim \frac{nx^{n-1} - n}{2(x-1)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die beiden letzten Aufgaben 10 und 11 finden Anwendung in der Rentenrechnung. Bezeichnet man nämlich mit R_y den Baarwerth einer Leibrente, die den Betrag 1 hat und einer Person im Alter von y Jahren am Anfange eines jeden Jahres ausgezahlt wird, und mit $R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)}$ den Baarwerth einer Leibrente von gleichem Betrage, die einer Person gleichen Alters in n Quoten am Anfange eines jeden n^{tel} des Jahres ausgezahlt wird, so ist

$$(3.)\quad R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{r^{n-1}}}\left(\frac{r-1}{\sqrt[n]{r}-1}\right)^2 R_y - \frac{\sqrt[n]{r}}{n^2} \cdot \frac{r - n\sqrt[n]{r} + n - 1}{(\sqrt[n]{r}-1)^2},$$

wobei der *Zinsfactor* r durch die Gleichung

$$(4.)\qquad 100r = 100 + \textit{Procente}$$

erklärt wird. Der in Gleichung (3.) gegebene Ausdruck für $R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)}$ ist für die numerischen Berechnungen sehr unbequem; deshalb benutzt man gewöhnlich einen Näherungswerth, den man erhält, indem man den Zinsfactor r, welcher so wie so von 1 wenig verschieden ist, gleich 1 werden lässt. Setzt man dann noch

$$(5.)\qquad r = x^n, \quad \text{also} \quad \sqrt[n]{r} = x,$$

so wird

$$\lim_{x=1} R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \lim_{x=1} \frac{1}{n^2 x^{n-1}}\left(\frac{x^n - 1}{x-1}\right)^2 R_y - \lim_{x=1} \frac{x}{n^2} \cdot \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2};$$

oder mit Rücksicht auf die in den Aufgaben 10 und 11 gefundenen Resultate

$$(6.)\qquad \lim R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = R_y - \frac{n-1}{2n}.$$

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass dieser Näherungswerth von dem wahren Werthe sehr wenig verschieden ist.

12) $$\lim_{x=1} \frac{x^x - x}{1 - x + \mathrm{l}x} = \lim \frac{(1+\mathrm{l}x)x^x - 1}{-1 + x^{-1}} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{(1+\mathrm{l}x)x^x - 1}{-1 + x^{-1}} = \lim \frac{(1+\mathrm{l}x)^2 x^x + x^{x-1}}{-x^{-2}} = -2.$$

$$13)\ \lim_{x=a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

$$= \lim\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x(x+a)}}{2x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2a^2}}{2a\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

In diesem Beispiele werden $\varphi'(a)$ und $f'(a)$ beide unendlich gross; es ist aber in § 58 ausdrücklich nachgewiesen worden, dass die angegebene Regel auch in diesem Falle noch richtig bleibt.

$$14)\ \lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x} = \lim\frac{\sin x}{-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x} = \frac{0}{0}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\sin x}{-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{-\sin^2 x+2\cos^2 x},$$

folglich wird

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$

§ 60.

Ausdrücke von der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 81.)

Werden die Functionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ beide für x gleich a unendlich gross, so wird

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Um den Grenzwerth zu ermitteln, dem sich in diesem Falle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nähert, setze man

$$(1.)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)},\quad \text{also}\quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)},$$

$$(2.)\qquad f(x) = \frac{1}{f_1(x)},\quad \text{also}\quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)};$$

dann folgt aus $\lim_{x=a}\varphi(x) = \infty$ und $\lim_{x=a} f(x) = \infty$

$$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0, \tag{3.}$$

und man erhält

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{0}{0}, \tag{4.}$$

d. h. man hat diese Aufgabe auf die in § 58 behandelte Aufgabe zurückgeführt. Unter der Voraussetzung, dass sich $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ für $x = a$ einem bestimmten, endlichen (oder unendlich grossen) Grenzwerthe A nähert, ergiebt sich nach der damals gefundenen Regel

$$A = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f'_1(x)}{\varphi'_1(x)}. \tag{5.}$$

Nun ist aber

$$f'_1(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}, \quad \varphi'_1(x) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2},$$

folglich wird

$$A = \lim \frac{f'(x)}{f(x)^2} \cdot \frac{\varphi(x)^2}{\varphi'(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \lim \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]^2, \tag{6.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (5.)

$$A = A^2 \cdot \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{6a.}$$

Unter der Voraussetzung, dass A von 0 verschieden ist, kann man beide Seiten dieser Gleichung durch A^2 dividiren und erhält dadurch

$$\frac{1}{A} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{7.}$$

oder

$$A = \lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{8.}$$

Es gilt hier also dieselbe Regel wie bei den Ausdrücken, welche an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, d. h. man findet den Werth von $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$, indem man Zähler und Nenner einzeln differentiirt und in den Quotienten der Ableitungen x gleich a einsetzt.

Diese Regel bleibt auch dann noch richtig, wenn A den Werth 0 hat. Denn, wenn man in diesem Falle den Ausdruck

$$1 + \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)} \tag{9.}$$

betrachtet, so erkennt man, dass er für x gleich a wohl die Form $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, aber den von 0 verschiedenen Werth 1 hat. Man darf daher die eben ausgesprochene Regel anwenden und erhält

$$\lim_{x=a} \frac{f(x) + \varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{f'(x) + \varphi'(x)}{f'(x)}, \tag{10.}$$

oder

$$1 + \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 1 + \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

folglich ist auch in diesem Falle

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}. \tag{11.}$$

Werden $\lim\limits_{x=a} f'(x)$ und $\lim\limits_{x=a} \varphi'(x)$ beide gleich 0, oder werden sie beide unendlich gross, so findet man durch nochmalige Anwendung derselben Regel

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \lim \frac{\varphi''(x)}{f''(x)} \tag{12.}$$

und kann so fortfahren, bis sich ein bestimmter Werth ergiebt.

Auch hier darf die Grösse a unendlich gross werden, wie man durch die in § 58 ausgeführte Untersuchung zeigen kann.

§ 61.
Uebungs-Beispiele.

1) $$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg} x} = \lim \frac{\frac{5}{\cos^2(5x)}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim \frac{5\cos^2 x}{\cos^2(5x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{5\cos^2 x}{\cos^2(5x)} = \lim \frac{-10\cos x \sin x}{-10\cos(5x)\sin(5x)} = \lim \frac{\sin(2x)}{\sin(10x)} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{\sin(2x)}{\sin(10x)} = \lim \frac{2\cos(2x)}{10\cos(10x)} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}.$$

2) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x}{e^x} = \lim \frac{1}{e^x} = 0.$

3) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim \frac{2x}{e^x} = \lim \frac{2.1}{e^x} = 0.$

4) $\lim\limits_{x=\infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}.$

Zunächst möge vorausgesetzt werden, dass n eine *positive ganze* Zahl ist. Dann wird

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

wenn $n > 1$ ist;

$$\lim \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}.$$

Dieser Ausdruck wird entweder gleich

$$\frac{n(n-1)}{\infty} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

jenachdem n gleich 2 oder grösser als 2 ist. Um die Aufgabe allgemein zu lösen, muss man Zähler und Nenner n Mal differentiiren und erhält dadurch

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, wenn n eine *positive gebrochene* Zahl ist; denn in diesem Falle liegt n zwischen zwei ganzen Zahlen $k-1$ und k, so dass

$$k - 1 < n < k$$

wird, folglich ist

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{x^{k+n-k}}{e^x} = \lim \frac{x^k \cdot x^{n-k}}{e^x},$$

oder

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = \lim \frac{x^k}{e^x} \cdot \frac{1}{x^{k-n}} = \lim \frac{x^k}{e^x} \cdot \lim \frac{1}{x^{k-n}}.$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$\lim \frac{x^k}{e^x} = 0$$

und, da $k - n$ positiv ist,

$$\lim \frac{1}{x^{k-n}} = 0,$$

folglich ist auch

$$\lim \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Der Sinn dieses Resultates ist der, dass für hinreichend grosse Werthe von x die Exponential-Function e^x noch grösser wird als jede beliebig hohe Potenz von x.

$$5)\quad \lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{l}x}{x^n} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim \frac{1}{nx^n} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

dabei ist nur vorausgesetzt, dass n positiv ist, im Uebrigen darf n beliebig klein sein. Der Sinn dieses Resultates ist dann der, dass $\mathrm{l}x$ für hinreichend grosse Werthe von x zwar selbst beliebig gross wird, aber doch noch kleiner bleibt als jede beliebig niedrige Potenz von x.

Setzt man $n = \frac{1}{m}$, so nimmt für positive Werthe von m das soeben gefundene Resultat die Form an

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{l}x}{\sqrt[m]{x}} = 0.$$

$$6)\quad \lim_{x=0} \frac{\mathrm{l}(\operatorname{tg} x)}{\mathrm{l}[\operatorname{tg}(3x)]} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{\frac{3}{\sin(3x)\cos(3x)}}$$

$$= \lim \frac{\sin(3x)\cos(3x)}{3\sin x \cos x} = \lim \frac{\sin(6x)}{3\sin(2x)} = \frac{0}{0};$$

$$\lim \frac{\sin(6x)}{3\sin(2x)} = \lim \frac{6\cos(6x)}{6\cos(2x)} = \frac{6}{6} = 1.$$

Die Lösung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn man

$$y = \frac{a}{2^x}$$

als Veränderliche einführt. Dadurch wird

$$2^x = \frac{a}{y} \quad \text{und} \quad \lim_{x=\infty} y = 0,$$

also

$$\lim_{x=\infty} 2^x \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2^x}\right) = \lim_{y=0} \frac{a}{y} \operatorname{tg} y = \lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \lim \frac{a}{\cos^2 y} = a.$$

5) $\lim\limits_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \lim\limits_{t=0} \dfrac{r^t - 1}{t} = \dfrac{0}{0}$, wo $t = \dfrac{1}{x}$ gesetzt ist,

$$\lim_{t=0} \frac{r^t - 1}{t} = \lim \frac{r^t \, \mathrm{l} r}{1} = \mathrm{l} r.$$

Von diesem Resultate kann man wieder eine Anwendung machen. Nach Gleichung (3.) in § 59 war

$$(1.) \quad R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{r^{n-1}}} \left(\frac{r-1}{\sqrt[n]{r} - 1}\right)^2 R_y - \frac{\sqrt[n]{r}}{n^2} \cdot \frac{r - n\sqrt[n]{r} + n - 1}{(\sqrt[n]{r} - 1)^2},$$

oder, wenn man n mit x vertauscht,

$$(1a.) \quad R_y^{\left(\frac{x}{x}\right)} = \frac{\sqrt[x]{r}(r-1)^2 R_y}{r[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2} - \frac{\sqrt[x]{r}[r - 1 - x(\sqrt[x]{r} - 1)]}{[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2}.$$

Wird nun die Zahl x immer grösser und schliesslich unendlich gross, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$$\lim_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \mathrm{l} r$$

wird,

$$(2.) \quad R_y^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{\mathrm{l} r}\right)^2 R_y - \frac{r - 1 - \mathrm{l} r}{(\mathrm{l} r)^2}.$$

§ 64.

Ausdrücke von der Form $\infty - \infty$.

Wird

$$(1.) \quad \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty,$$

so nimmt der Ausdruck

$$\varphi(x) - f(x)$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Den wahren Werth dieses Ausdruckes kann man wieder dadurch ermitteln, dass man

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}, \quad \text{also} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \tag{2.}$$

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)}, \quad \text{also} \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{3.}$$

setzt. Dann wird

$$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0, \tag{4.}$$

und man erhält

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x) \cdot f_1(x)}. \tag{5.}$$

Dies ist aber ein Bruch, welcher für $\lim x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und nach der in § 58 angegebenen Regel bestimmt werden kann.

Mitunter gestaltet sich die Umformung noch etwas einfacher, wie es die folgenden Beispiele zeigen werden.

§ 65.

Uebungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$,

$$\lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \lim \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x=1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\mathrm{l}x}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x\,\mathrm{l}x - x + 1}{(x-1)\,\mathrm{l}x} = \frac{0}{0}$,

$$\lim \frac{x\,\mathrm{l}x - x + 1}{(x-1)\,\mathrm{l}x} = \lim \frac{\mathrm{l}x + 1 - 1}{\mathrm{l}x + 1 - x^{-1}} = \lim \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}x + 1 - x^{-1}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = \lim \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Die Lösung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn man

$$y = \frac{a}{2^x}$$

als Veränderliche einführt. Dadurch wird

$$2^x = \frac{a}{y} \quad \text{und} \quad \lim_{x=\infty} y = 0,$$

also

$$\lim_{x=\infty} 2^x \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2^x}\right) = \lim_{y=0} \frac{a}{y} \operatorname{tg} y = \lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \frac{0}{0},$$

$$\lim \frac{a \operatorname{tg} y}{y} = \lim \frac{a}{\cos^2 y} = a.$$

5) $\lim\limits_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \lim\limits_{t=0} \frac{r^t - 1}{t} = \frac{0}{0}$, wo $t = \frac{1}{x}$ gesetzt ist,

$$\lim_{t=0} \frac{r^t - 1}{t} = \lim \frac{r^t \operatorname{l} r}{1} = \operatorname{l} r.$$

Von diesem Resultate kann man wieder eine Anwendung machen. Nach Gleichung (3.) in § 59 war

$$(1.) \quad R_y^{\left(\frac{n}{n}\right)} = \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{r^{n-1}}} \left(\frac{r-1}{\sqrt[n]{r} - 1}\right)^2 R_y - \frac{\sqrt[n]{r}}{n^2} \cdot \frac{r - n\sqrt[n]{r} + n - 1}{(\sqrt[n]{r} - 1)^2},$$

oder, wenn man n mit x vertauscht,

$$(1a.) \quad R_y^{\left(\frac{x}{x}\right)} = \frac{\sqrt[x]{r}(r-1)^2 R_y}{r[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2} - \frac{\sqrt[x]{r}\,[r - 1 - x(\sqrt[x]{r} - 1)]}{[x(\sqrt[x]{r} - 1)]^2}.$$

Wird nun die Zahl x immer grösser und schliesslich unendlich gross, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$$\lim_{x=\infty} x(\sqrt[x]{r} - 1) = \operatorname{l} r$$

wird,

$$(2.) \quad R_y^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{\operatorname{l} r}\right)^2 R_y - \frac{r - 1 - \operatorname{l} r}{(\operatorname{l} r)^2}.$$

§ 64.

Ausdrücke von der Form $\infty - \infty$.

Wird

$$(1.) \quad \lim_{x=a} \varphi(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x=a} f(x) = \infty,$$

so nimmt der Ausdruck

$$\varphi(x) - f(x)$$

für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an. Den wahren Werth dieses Ausdruckes kann man wieder dadurch ermitteln, dass man

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)}, \quad \text{also} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{\varphi(x)}, \tag{2.}$$

$$f(x) = \frac{1}{f_1(x)}, \quad \text{also} \quad f_1(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{3.}$$

setzt. Dann wird

$$\lim_{x=a} \varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f_1(x) = 0, \tag{4.}$$

und man erhält

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\varphi_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - \varphi_1(x)}{\varphi_1(x) \cdot f_1(x)}. \tag{5.}$$

Dies ist aber ein Bruch, welcher für $\lim x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und nach der in § 58 angegebenen Regel bestimmt werden kann.

Mitunter gestaltet sich die Umformung noch etwas einfacher, wie es die folgenden Beispiele zeigen werden.

§ 65.

Uebungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0},$

$$\lim \frac{-x+1}{x^2-1} = \lim \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

2) $\lim\limits_{x=1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\mathrm{l}x}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x\mathrm{l}x - x + 1}{(x-1)\mathrm{l}x} = \frac{0}{0},$

$$\lim \frac{x\mathrm{l}x - x + 1}{(x-1)\mathrm{l}x} = \lim \frac{\mathrm{l}x + 1 - 1}{\mathrm{l}x + 1 - x^{-1}} = \lim \frac{\mathrm{l}x}{\mathrm{l}x + 1 - x^{-1}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{x^{-1}}{x^{-1} + x^{-2}} = \lim \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

3) $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{0}{0},$

$$\lim \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

4) $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \infty - \infty = \lim \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{0}{0},$

$$\lim \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} = \frac{0}{0},$$

oder, wenn man $2x$ gleich y setzt,

$$\lim_{x=0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{y=0} \frac{4y - 4 \sin y}{2y(1 - \cos y) + y^2 \sin y}$$

$$= \lim \frac{4(1 - \cos y)}{2(1 - \cos y) + 4y \sin y + y^2 \cos y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{4 \sin y}{6 \sin y + 6y \cos y - y^2 \sin y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{4 \cos y}{12 \cos y - 8y \sin y - y^2 \cos y} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Häufig wird man bei Behandlung der Ausdrücke, welche für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, oder $\infty - \infty$ annehmen, am schnellsten zum Ziele kommen, indem man sie so umformt, dass sie für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ erhalten, dann Zähler und Nenner mit Hülfe der *Taylor*'schen Reihe nach steigenden Potenzen von $x - a$ entwickelt und durch eine möglichst hohe Potenz von $x - a$ dividirt.

Für die letzte Aufgabe erhält man z. B.

$$x^2 - \sin^2 x = (x - \sin x)(x + \sin x)$$

$$= \left(x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + - \cdots\right)\left(x + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)$$

$$= x^4\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots\right)\left(2 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right),$$

$$x^2\sin^2 x = x^2\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)^2 = x^4\left(1 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2.$$

Dies giebt

$$\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + - \cdots\right)\left(2 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2},$$

also

$$\lim_{x=0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}.$$

§ 66.

Ausdrücke von der Form 0^0, ∞^0, 1^∞.

Nimmt der Ausdruck $[\varphi(x)]^{f(x)}$ für x gleich a eine der Formen

$$0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

an, so setze man

$$[\varphi(x)]^{f(x)} = u, \tag{1.}$$

dann wird

$$\mathrm{l}u = f(x)\,.\,\mathrm{l}\varphi(x), \tag{2.}$$

also

$$u = e^{f(x)\,.\,\mathrm{l}\varphi(x)}. \tag{3.}$$

Ist nun

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a}\varphi(x) = 0,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x)\,.\,\mathrm{l}\varphi(x) = 0\,.\,(-\infty);$$

ist

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a}\varphi(x) = \infty,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x)\,.\,\mathrm{l}\varphi(x) = 0\,.\,\infty;$$

ist endlich

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a}\varphi(x) = 1,$$

so wird

$$\lim_{x=a} f(x)\,.\,\mathrm{l}\varphi(x) = \infty\,.\,0.$$

Um den Werth von $\lim u$ zu ermitteln, braucht man nur den Werth von $\lim(\mathrm{l}u)$ zu berechnen, der zunächst die unbestimmte Form $0.(\pm\infty)$ hat und sich deshalb nach den Angaben der vorhergehenden Paragraphen behandeln lässt.

§ 67.

Uebungs-Beispiele.

1) $\lim\limits_{x=0}(x^x) = 0^0.$

$$\lim \mathrm{l}u = \lim \mathrm{l}(x^x) = \lim(x\,\mathrm{l}x) = \lim \frac{\mathrm{l}x}{x^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim \frac{x}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(x^x) = e^0 = 1.$$

2) $\lim\limits_{x=0}(x^{\sin x}) = 0^0.$

$$\lim \mathrm{l}u = \lim \mathrm{l}(x^{\sin x}) = \lim(\sin x\,\mathrm{l}x) = \lim \frac{\mathrm{l}x}{(\sin x)^{-1}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= -\lim \frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = \frac{0}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(x^{\sin x}) = e^0 = 1.$$

3) $\lim\limits_{x=0}\left(x^{\frac{3}{4+2\,\mathrm{l}x}}\right) = 0^0.$

$$\lim \mathrm{l}u = \lim\left(\frac{3}{4+2\,\mathrm{l}x}\cdot \mathrm{l}x\right) = \lim \frac{3\,\mathrm{l}x}{4+2\,\mathrm{l}x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$= \lim \frac{\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}} = \lim \frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim u = \lim\left(x^{\frac{3}{4+2\,\mathrm{l}x}}\right) = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}.$$

4) $\lim\limits_{x=\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = \infty^0.$

$$\lim 1u = \lim\left(\frac{1}{x}\,1x\right) = \lim\frac{1x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\frac{1}{x} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^0 = 1.$$

5) $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim n^{-\frac{2}{n}} = \infty^0.$

$$\lim 1u = -2\lim\frac{1n}{n} = -2\lim\frac{1}{n} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = e^0 = 1.$$

Die Bestimmung dieses Ausdruckes war in § 46 (Seite 208) erforderlich.

6) $\lim\limits_{x=0}[(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}] = \infty^0.$

$$\lim 1u = \lim[\sin x\,1(\operatorname{ctg}x)] = \lim\frac{1(\cos x) - 1(\sin x)}{(\sin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim\frac{-\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{-(\sin x)^{-2}\cos x} = \lim\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim[(\operatorname{ctg}x)^{\sin x}] = e^0 = 1.$$

7) $\lim\limits_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty.$

$$\lim 1u = \lim\frac{1}{x}\,1(1+x) = \lim\frac{1(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

8) $\lim\limits_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty$.

Diese Aufgabe wird auf die vorhergehende zurückgeführt, indem man x mit $\frac{1}{x}$ vertauscht.

Man beachte, dass in § 11 (Formel Nr. 13 der Tabelle) die Zahl e durch die Gleichung

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

erklärt worden ist.

9) $\lim\limits_{x=a}\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}\right] = 1^\infty$.

$$\lim \mathrm{l}u = \lim \operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)\mathrm{l}\left(\frac{2a-x}{a}\right) = \lim \frac{\mathrm{l}(2a-x)-\mathrm{l}a}{\operatorname{ctg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{2a-x}}{\frac{-\pi}{2a\sin^2\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}} = \frac{2a}{\pi}\lim\frac{\sin^2\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}{2a-x} = \frac{2}{\pi},$$

folglich ist

$$\lim u = \lim\left[\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{x\pi}{2a}\right)}\right] = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

Bemerkungen.

1. In vielen Fällen kann man Grenz-Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ dadurch ermitteln, dass man Zähler und Nenner des Bruches, bevor man den Grenzwerth von x einsetzt, durch einen passenden Factor dividirt. So ist z. B.

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)},$$

folglich wird

$$\lim_{x=0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}.$$

2. Zu demselben Resultate hätte man auch, wie schon oben hervorgehoben ist, durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von x gelangen können. Nach den Formeln Nr. 54 und 55 der Tabelle ist nämlich

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + - \cdots = x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + - \cdots\right),$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + - \cdots\right)^2 = x^2\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2;$$

dies giebt

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + - \cdots}{\left(\frac{1}{1!} - \frac{x^2}{3!} + - \cdots\right)^2},$$

folglich ist

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$

§ 68.

Zusammentreffen unbestimmter Formen.

Die Grenz-Ausdrücke, welche eine unbestimmte Form haben, sind durch die behandelten Fälle noch nicht erschöpft; die angegebenen Regeln reichen aber zur Erledigung der noch übrigen Fälle aus, die im Wesentlichen nur Combinationen der bereits besprochenen Grenz-Ausdrücke sind, wie die noch folgenden Beispiele zeigen sollen.

1) $\lim\limits_{x=0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}.$

Nun ist aber

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim \frac{\cos x}{1} = 1,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 1^{\infty}$$

und

$$\lim \mathrm{l}u = \lim \frac{\mathrm{l}\sin x - \mathrm{l}x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{\operatorname{ctg} x - x^{-1}}{2x} = \lim \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} = \lim \frac{-\sin x}{4\sin x + 2x\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim \frac{-\cos x}{6\cos x - 2x\sin x} = -\frac{1}{6};$$

dies giebt

$$\lim u = \lim \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}.$$

2) $\lim\limits_{x=\infty} \left[\frac{\mathrm{l}(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^0.$

Hier ist

$$\lim \frac{\mathrm{l}(ax)}{x} = \lim \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

folglich ist

$$\lim u = \lim \left[\frac{\mathrm{l}(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = 0^0,$$

$$\lim \mathrm{l}u = \lim \frac{\mathrm{l}[\mathrm{l}(ax)] - \mathrm{l}x}{x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{\mathrm{l}(ax)} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim \frac{1 - \mathrm{l}(ax)}{x\,\mathrm{l}(ax)} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{-\frac{1}{x}}{1 + \mathrm{l}(ax)} = \frac{-1}{x[1 + \mathrm{l}(ax)]} = \frac{-1}{\infty} = 0;$$

dies giebt

$$\lim u = \lim \left[\frac{\mathrm{l}(ax)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

3) $\lim\limits_{x=0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{1^{\infty} - e}{0}.$

Nun ist aber nach Aufgabe 7 in § 67

$$\lim_{x=0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

folglich ist

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{0}{0} = \lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x}{1+x} - l(1+x)\right] : x^2}{1}$$

$$= \lim (1+x)^{\frac{1}{x}} \,.\, \lim \frac{\frac{x}{1+x} - l(1+x)}{x^2} = e \cdot \frac{0}{0}$$

$$= e . \lim \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = e . \lim \frac{-x}{2x(1+x)^2}$$

$$= e . \lim \frac{-1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2} \cdot$$

(7.) durch Elimination von x eine Gleichung zwischen u und
nämlich

$$f(u, v) = 0 \tag{8.}$$

herleiten, man kann aber trotzdem die Ausdrücke $\frac{\partial z}{\partial u}$ und
bilden, genau so, wie sie durch die Gleichungen (5.) und
erklärt sind, und für das Folgende verwenden.

Vermehrt man x um Δx, so gehen die Grössen u, v, z bez
über in

$$(9.)\quad \begin{cases} u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \quad v + \Delta v = \psi(x + \Delta x), \\ z + \Delta z = F(u + \Delta u, v + \Delta v); \end{cases}$$

daraus folgt

$$(10.)\quad \begin{cases} \Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta v = \psi(x + \Delta x) - \psi(x), \\ \Delta z = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v) \\ \quad = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u, v + \Delta v) \\ \qquad + F(u, v + \Delta v) - F(u, v), \end{cases}$$

oder, wenn man $v + \Delta v$ mit v_1 bezeichnet,

$$(10a.)\quad \Delta z = F(u + \Delta u, v_1) - F(u, v_1) + F(u, v + \Delta v) - F(u,$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u, v_1) - F(u, v_1)}{\Delta x} + \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta x},$$

oder

$$(11.)\quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(u + \Delta u, v_1) - F(u, v_1)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Geht man jetzt zur Grenze über, indem man Δx verschwi
dend klein werden lässt, so werden auch, wenn $\varphi(x)$ und ψ
stetige Functionen sind, nach den Gleichungen (9.) die Gröss
Δu und Δv verschwindend klein, und man erhält

$$(12.)\quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx},$$

$$(13.)\quad \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx},$$

und da $\lim v_1 = v$ ist,

$$(14.)\quad \lim_{\Delta x=0} \frac{F(u+\Delta u, v_1)-F(u, v_1)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u=0,\; v_1=v} \frac{F(u+\Delta u, v_1)-F(u, v_1)}{\Delta u} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$(15.)\quad \lim_{\Delta x=0} \frac{F(u, v+\Delta v)-F(u, v)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v=0} \frac{F(u, v+\Delta v)-F(u, v)}{\Delta v} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (11.)

$$(16.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

oder auch, wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit dx multiplicirt,

$$(16a.)\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

In Gleichung (16.) sind mehrere Formeln, die schon früher hergeleitet worden sind, als besondere Fälle enthalten.

Beispiele.

1) Es sei

$$(17.)\quad z = u \pm v,$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \pm 1,$$

folglich ist in Uebereinstimmung mit den Formeln Nr. 19 und 20 der Tabelle

$$(18.)\quad \frac{dz}{dx} = \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

2) Es sei

$$(19.)\quad z = uv,$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u,$$

folglich ist in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 28 der Tabelle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}. \tag{20.}$$

3) Es sei

$$z = \frac{u}{v}, \tag{21.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

folglich ist in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 33 der Tabelle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{22.}$$

4) Es sei

$$z = \mathrm{l}(uv) = \mathrm{l}u + \mathrm{l}v, \tag{23.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{v},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\mathrm{l}(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}. \tag{24.}$$

5) Es sei

$$z = \mathrm{l}\left(\frac{u}{v}\right) = \mathrm{l}u - \mathrm{l}v, \tag{25.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{1}{v},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\mathrm{l}\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}. \tag{26.}$$

6) Es sei

$$z = u^v, \tag{27.}$$

dann wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^v . \mathrm{l}u,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v . \mathrm{l}u\frac{dv}{dx}. \tag{28.}$$

Von dieser letzten Formel mögen noch einige Anwendungen gegeben werden.

7) Es sei

$$z = x^x,$$

also

$$u = x, \quad v = x, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = 1.$$

$$\frac{dz}{dx} = x \,.\, x^{x-1} + x^x \,.\, \mathrm{l}x = x^x(1 + \mathrm{l}x).$$

Dasselbe Resultat ergab sich auf anderem Wege in § 25, Aufgabe 54.

8) Es sei

$$z = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}},$$

also

$$u = x, \quad v = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot x^{-1+\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \cdot \mathrm{l}x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - \mathrm{l}x).$$

Auch dieses Resultat ergab sich auf anderem Wege in § 25, Aufgabe 56.

9) $$z = (\mathrm{l}x)^{\mathrm{tg}x},$$

also

$$u = \mathrm{l}x, \quad v = \mathrm{tg}x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{tg}x \,.\, (\mathrm{l}x)^{-1+\mathrm{tg}x} \cdot \frac{1}{x} + (\mathrm{l}x)^{\mathrm{tg}x} \,.\, \mathrm{l}(\mathrm{l}x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= (\mathrm{l}x)^{\mathrm{tg}x}\left[\frac{\mathrm{tg}x}{x\,\mathrm{l}x} + \frac{\mathrm{l}(\mathrm{l}x)}{\cos^2 x}\right].$$

§ 70.
Herleitung der allgemeinen Regel für die Differentiation der nicht entwickelten Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 87 und 88.)

Es sei wieder

(1.) $$z = F(u, v),$$

und es seien u und v beide Functionen von x, die eine Ableitung besitzen, dann wird nach Formel Nr. 83 der Tabelle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{2.}$$

oder

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{2a.}$$

Hierbei ist u eine beliebige Function von x, folglich darf u auch *gleich* x sein. Dann geht Gleichung (2.) über in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{3.}$$

Vertauscht man jetzt v mit y, so wird

$$z = F(x, y), \tag{4.}$$

wobei y noch eine Function von x, also

$$y = f(x) \tag{5.}$$

ist, und man erhält

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{6.}$$

oder

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{6a.}$$

In diesem Falle ist also z erstens *unmittelbar* abhängig von x und ausserdem auch noch *mittelbar* abhängig von x, indem z auch eine Function von y, und y wieder eine Function von x ist.

Aus den Gleichungen (6.) und (6a.) ersieht man auch, wie nothwendig es ist, die *partielle* Ableitung $\frac{\partial z}{\partial x}$ von der totalen Ableitung $\frac{dz}{dx}$ zu unterscheiden, dadurch, dass man das eine Mal ein (rundes) ∂, das andere Mal ein (gerades) d schreibt.

Beispiele.

1) $z = x^{lx} = x^y$, wo $y = lx$.

Hier wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y lx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

folglich ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(x^{\mathrm{l}x})}{dx} = yx^{y-1} + x^y \mathrm{l}x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \mathrm{l}x \,.\, x^{\mathrm{l}x-1} + x^{\mathrm{l}x-1} \,.\, \mathrm{l}x = 2x^{\mathrm{l}x-1} \,.\, \mathrm{l}x.$$

2) $z = (\mathrm{tg}\,x)^x = y^x$, wo $y = \mathrm{tg}\,x$.

Hier wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \mathrm{l}y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

folglich ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d[(\mathrm{tg}\,x)^x]}{dx} = y^x \mathrm{l}y + \frac{x}{\cos^2 x} y^{x-1} = (\mathrm{tg}\,x)^x \mathrm{l}(\mathrm{tg}\,x) + \frac{x(\mathrm{tg}\,x)^{x-1}}{\cos^2 x}.$$

Der Kürze wegen bezeichnet man die partielle Ableitung von $F(x, y)$ nach der ersten Veränderlichen, also $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$, mit $F_1(x, y)$ und die partielle Ableitung von $F(x, y)$ nach der zweiten Veränderlichen, also $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$, mit $F_2(x, y)$.

Dadurch erhält die Gleichung (6a.) die Form

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y) \frac{dy}{dx}. \tag{7.}$$

Diese Formel kann man jetzt auch benutzen zur Differentiation von *nicht entwickelten* Functionen. Ist z. B. y als Function von x durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{8.}$$

gegeben, so kann man sich vorstellen, diese Gleichung sei nach y aufgelöst und dadurch auf die Form

$$y = f(x) \tag{9.}$$

gebracht. Man erhält daher nach Gleichung (7.)

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y) \frac{dy}{dx}. \tag{10.}$$

Setzt man den Werth von y, welchen die Gleichung (9.) liefert, in die Function $F(x, y)$ ein, so muss nach Voraussetzung

$$F(x, y) = 0$$

werden; deshalb wird erst recht

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = 0,$$

so dass aus Gleichung (10.) folgt

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{11.}$$

oder

$$F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy = 0. \tag{11a.}$$

Aus Gleichung (11.) findet man jetzt unmittelbar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}. \tag{12.}$$

§ 71.
Uebungs-Beispiele.

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$

Hier ist

$$F(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y) = 2b^2x, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y) = 2a^2y,$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

2) $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

Setzt man hierbei noch fest, dass a_{21} gleich a_{12} ist, so wird

$$F_1(x, y) = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}), \quad F_2(x, y) = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}),$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}.$$

3) $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$

$$F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad F_2(x, y) = 3y^2 - 3ax,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

4) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$

$F_1(x, y) = 2(x^2 + y^2) \,.\, 2x - 2a^2x,$

$F_2(x, y) = 2(x^2 + y^2) \,.\, 2y + 2a^2y,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{2(x^2 + y^2) - a^2}{2(x^2 + y^2) + a^2}.$$

5) $F(x, y) = x^2y^3 + \cos x - \sin x \operatorname{tg} y - \sin y = 0,$

$F_1(x, y) = 2xy^3 - \sin x - \cos x \operatorname{tg} y,$

$F_2(x, y) = 3x^2y^2 - \frac{\sin x}{\cos^2 y} - \cos y,$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + \sin x + \cos x \operatorname{tg} y}{3x^2y^2 - \frac{\sin x}{\cos^2 y} - \cos y}$$

$$= \frac{(-2xy^3 + \sin x)\cos^2 y + \cos x \sin y \cos y}{3x^2y^2\cos^2 y - \sin x - \cos^3 y}.$$

6) $F(x, y) = x^2y^4 + \sin y = 0,$

$F_1(x, y) = 2xy^4, \quad F_2(x, y) = 4x^2y^3 + \cos y,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^4}{4x^2y^3 + \cos y}.$$

7) $F(x, y) = \sin x \sin y + \sin x \cos y - y = 0,$

$F_1(x, y) = \cos x(\sin y + \cos y),$

$F_2(x, y) = \sin x(\cos y - \sin y) - 1,$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x(\cos y + \sin y)}{\sin x(\cos y - \sin y) - 1}.$$

In ähnlicher Weise findet man die Lösungen der folgenden Aufgaben.

8) $e^y - e^x + xy = 0;$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$

9) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0;$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y[\cos(xy) - e^{xy} - 2x]}{x[x + e^{xy} - \cos(xy)]}.$

10) $x^2 + y^2 - a^2 = 0;$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$

§ 72.
Ableitungen höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 89 und 90.)

Der Kürze wegen setzt man häufig

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = q,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{dq}{dx} = r.$$

Aus der Gleichung

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} \tag{1.}$$

folgt dann, dass p wieder eine Function von x und y ist, die man ebenso differentiiren kann wie in § 70 die Function z; man erhält daher, indem man in Formel Nr. 87 der Tabelle, nämlich in

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

z mit p vertauscht,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{2.}$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}p. \tag{2a.}$$

In derselben Weise findet man aus q auch die dritte Ableitung von y nach x, denn es ist wieder nach Formel Nr. 87 der Tabelle, indem man z mit q vertauscht,

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{3.}$$

oder

$$\frac{d^3y}{dx^3} = r = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}p. \tag{3a.}$$

Dies kann man beliebig fortsetzen.

§ 73.
Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Ableitungen p und q bestimmen, wenn gegeben ist

$$x^2 - xy + y^2 = a^2. \tag{1.}$$

Hier ist

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 - a^2, \tag{2.}$$

$$F_1(x, y) = 2x - y, \quad F_2(x, y) = -x + 2y, \tag{3.}$$

also

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}. \tag{4.}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-3y}{(x - 2y)^2}, \tag{5.}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{3x}{(x - 2y)^2}, \tag{6.}$$

$$q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p = \frac{-3y}{(x-2y)^2} + \frac{3x}{(x-2y)^2} \cdot \frac{2x - y}{x - 2y},$$

oder

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3}. \tag{7.}$$

Berücksichtigt man noch Gleichung (1.), so erhält man

$$q = \frac{6a^2}{(x - 2y)^3}. \tag{8.}$$

Aufgabe 2. Es ist gegeben

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - a^2 = 0, \tag{9.}$$

man soll die Werthe von p und q ermitteln.

Auflösung 1. Hier ist

$$F(x, y) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - a^2, \tag{10.}$$

$$F_1(x, y) = 2(x - \xi), \quad F_2(x, y) = 2(y - \eta), \tag{11.}$$

also

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{x - \xi}{y - \eta}. \tag{12.}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{y - \eta}, \tag{13.}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = +\frac{x - \xi}{(y - \eta)^2}, \tag{14.}$$

$$(15.)\quad q = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p = -\frac{1}{y-\eta} - \frac{x-\xi}{(y-\eta)^2} \cdot \frac{x-\xi}{y-\eta},$$

oder

$$(16.)\quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(y-\eta)^3} = -\frac{a^2}{(y-\eta)^3}.$$

Auflösung 2. Dasselbe Resultat kann man hier auch durch Auflösung der Gleichung (9.) nach y finden. Es wird nämlich

$$(17.)\quad y = \eta \pm \sqrt{a^2 - (x-\xi)^2},$$

also

$$(18.)\quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \frac{-(x-\xi)}{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2}} = \mp \frac{x-\xi}{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2}},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2} - (x-\xi)\frac{-(x-\xi)}{\sqrt{a^2-(x-\xi)^2}}}{a^2-(x-\xi)^2}$$

$$= \mp \frac{a^2}{[a^2-(x-\xi)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$(19.)\quad q = -\frac{a^2}{(y-\eta)^3},$$

ein Resultat, dass mit Gleichung (16.) übereinstimmt.

Aufgabe 3. Man soll p, q und r bestimmen, wenn gegeben ist

$$(20.)\quad F(x, y) = y^2 - 2ax = 0.$$

Auflösung. Hier ist

$$F_1(x, y) = -2a, \quad F_2(x, y) = 2y,$$

$$(21.)\quad p = \frac{a}{y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{a}{y^2},$$

$$(22.)\quad q = -\frac{a^2}{y^3}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = +\frac{3a^2}{y^4},$$

$$(23.)\quad r = \frac{3a^3}{y^5}.$$

Aufgabe 4. Man soll p, q und r bestimmen, wenn gegeben ist

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{24.}$$

Auflösung. Hier ist

$$p = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \tag{25.}$$

$$q = -\frac{b^2}{a^2y} + \frac{b^2x}{a^2y^2}\cdot\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)$$

$$= -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{a^2b^4}{a^4y^3},$$

oder

$$q = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = +\frac{3b^4}{a^2y^4}. \tag{26.}$$

Daraus folgt

$$r = \frac{3b^4}{a^2y^4}\cdot\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right) = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}. \tag{27.}$$

§ 74.

Anwendung auf die Theorie der Maxima und Minima von nicht entwickelten Functionen einer Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 91.)

Es sei y als Function von x gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0; \tag{1.}$$

es sollen die Werthe von x bestimmt werden, für welche y ein Maximum oder Minimum wird.

Beachtet man, dass man die Gleichung (1.) auf die Form

$$y = f(x) \tag{2.}$$

bringen kann, indem man sie sich nach y aufgelöst denkt, so erkennt man, dass hier dieselben Regeln anwendbar sind, welche im VI. Abschnitt für die Aufsuchung der Maxima und Minima von *entwickelten* Functionen gegeben worden sind; d. h. man bestimmt diejenigen Werthe von x, für welche

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

verschwindet. Wird dann $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ für einen solchen Werth von x *negativ*, so tritt ein *Maximum* ein; und wird $f''(x)$ für einen solchen Werth von x *positiv*, so tritt ein *Minimum* ein.

Dabei ist es aber in dem vorliegenden Falle gar nicht nöthig die Gleichung (2.) wirklich zu bilden, denn nach Formel Nr. 88 der Tabelle wird

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = p. \tag{3.}$$

Schliesst man den Fall aus, wo $F_2(x, y)$ unendlich gross wird, so kann $f'(x)$ nur dann verschwinden, wenn

$$F_1(x, y) = 0 \tag{4.}$$

ist. Aus den beiden Gleichungen (1.) und (4.) findet man dann die Werthe von x und y, für welche y *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum wird.

Um zu entscheiden, ob für einen der gefundenen Werthe von x wirklich ein Maximum oder Minimum eintritt, bilde man nach Formel Nr. 89 der Tabelle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{5.}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1(x, y) = F_1, \quad F_2(x, y) = F_2,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = F_{11}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = F_{12}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = F_{21}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = F_{22}, \tag{6.}$$

so wird

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{F_2F_{11} - F_1F_{21}}{F_2^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{F_2F_{12} - F_1F_{22}}{F_2^2}, \tag{7.}$$

also

$$q = -\frac{F_2F_{11} - F_1F_{21}}{F_2^2} + \frac{F_2F_{12} - F_1F_{22}}{F_2^2} \cdot \frac{F_1}{F_2}. \tag{8.}$$

Dieser allgemein gültige Ausdruck vereinfacht sich in dem vorliegenden Falle, wo nur solche Werthe von x und y in Betracht kommen, für welche

$$F_1(x, y) = F_1 = 0$$

ist. Deshalb wird hier

(8a.) $$y = f''(x) = -\frac{F_{11}}{F_2}.$$

Haben also F_{11} und F_2 für das betrachtete Werthepaar x, y *gleiches* Zeichen, so ist $f''(x)$ *negativ*, und y wird ein *Maximum*. Haben dagegen F_{11} und F_2 *entgegengesetztes* Zeichen, so ist $f''(x)$ *positiv*, und y wird ein *Minimum*. Dies giebt die Regel:

Sind x und y so bestimmt, dass

$$F(x, y) = 0 \quad und \quad F_1(x, y) = 0$$

werden, so ist y ein Maximum oder Minimum, jenachdem F_2 und F_{11} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.

Der Fall, wo die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig gelten, möge hier ausgeschlossen werden, da er in § 119 ausführlich behandelt werden soll.

Indem man x und y, und dem entsprechend die Indices 1 und 2 mit einander vertauscht, findet man hieraus auch die folgende Regel:

Sind x und y so bestimmt, dass

$$F(x, y) = 0 \quad und \quad F_2(x, y) = 0$$

werden, so ist x ein Maximum oder Minimum, jenachdem F_1 und F_{22} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.

§ 75.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll auf der Curve (Fig. 66)

(1.) $$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

einen **Punkt** P bestimmen, der höher liegt als die benachbarten Punkte.

Auflösung. Hier ist

(2.) $$F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay = 0 \quad \text{für} \quad y = \frac{x^2}{a}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1.) ein, so wird

(3.) $$x^3 + \frac{x^6}{a^3} - 3x^3 = 0, \text{ oder } x^6 - 2a^3x^3 = x^3(x^3 - 2a^3) = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst befriedigt für $x = 0$; dann ist aber, wie später gezeigt werden soll, der zugehörige Werth

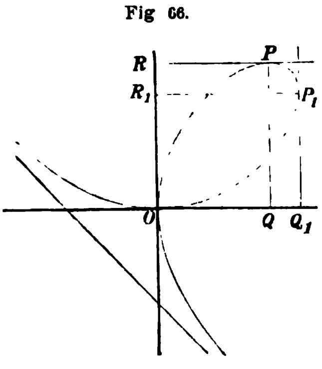


Fig. 66.

von y ein *Minimum*. Ein *Maximum* kann also nur eintreten, wenn

$$(4.)\qquad x^3 - 2a^3 = 0,$$

oder

$$x = a\sqrt[3]{2}, \qquad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Es wird nämlich für diese Werthe

$$(5.)\quad \begin{cases} F_2(x, y) = 3(y^2 - ax) \\ \qquad\qquad = 3a^2\sqrt[3]{2} > 0, \\ F_{11}(x, y) = 6x = 6a\sqrt[3]{2} > 0; \end{cases}$$

da F_2 und F_{11} *gleiches* Vorzeichen haben, so ist $y = a\sqrt[3]{4}$ ein *Maximum*.

Das Maximum von x, dem ein *äusserster* Punkt P_1 der Curve entspricht, findet man in ähnlicher Weise, und zwar sind die Coordinaten dieses Punktes

$$(6.)\qquad x_1 = a\sqrt[3]{4}, \qquad y_1 = a\sqrt[3]{2}.$$

Die hier behandelte Curve hat den Namen „*Folium Cartesii*".

Aufgabe 2. Man soll den höchsten, bezw. den tiefsten Punkt der Ellipse (Fig. 67)

$$(7.)\qquad F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

bestimmen.

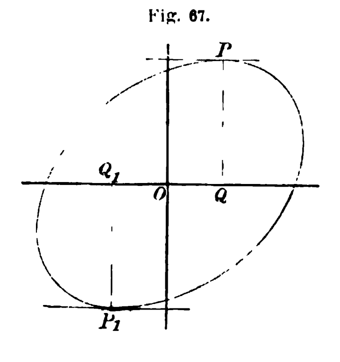


Fig. 67.

Auflösung. Hier ist

$$(8.)\quad F_1(x, y) = 2(a_{11}x + a_{12}y) = 0$$

für

$$(9.)\qquad y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (7.)

$$(10.)\ a_{11}(a_{11}a_{22} - a^2_{12})x^2 = -a^2_{12}a_{33},$$

oder

$$x = \pm \frac{a_{12}}{a_{11}} W, \quad \text{wobei} \quad W = \sqrt{\frac{-a_{11}a_{33}}{a_{11}a_{22} - a^2_{12}}} \tag{11.}$$

ist. Die Grösse W wird sicher reell, denn Gleichung (7.) stellt bekanntlich nur dann eine reelle Ellipse dar, wenn

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12} > 0 \quad \text{und} \quad a_{11}a_{33} < 0$$

ist. Aus den Gleichungen (9.) und (11.) folgt dann

$$y = \mp W. \tag{12.}$$

Ferner ist

$$F_{11} = 2a_{11}, \quad F_2 = 2(a_{12}x + a_{22}y) = \mp \frac{2(a_{11}a_{22} - a^2_{12}) W}{a_{11}}, \tag{13.}$$

also

$$F_{11}F_2 = \mp 4(a_{11}a_{22} - a^2_{12}) W. \tag{14.}$$

Für das *obere* Vorzeichen wird daher y ein *Minimum*, weil dann F_{11} und F_2 *ungleiches* Vorzeichen haben; für das *untere* Vorzeichen dagegen wird y ein *Maximum*, weil dann F_{11} und F_2 *gleiches* Vorzeichen haben.

Dieses Resultat wird durch Figur 67 bestätigt.

IX. Abschnitt.

Vertauschung der Abhängigkeit der veränderlichen Grössen.

§ 76.

Bildung der Grössen p und q, wenn x und y Functionen von t sind.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 92.)

Ist y eine (entwickelte oder nicht entwickelte) Function von x, so ist es häufig von Vortheil, x als eine Function einer dritten Veränderlichen t auszudrücken. Dann wird nämlich auch y eine Function von t.

Beim Kreise ist z. B.

(1.) $$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzt man nun

(2.) $$x = a\cos t, \quad \text{so wird} \quad y = a\sin t.$$

Bei der Ellipse ist

(3.) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

setzt man hier wieder

(4.) $$x = a\cos t, \quad \text{so wird} \quad y = b\sin t.$$

In beiden Beispielen wird der Punkt P mit den Coordinaten x und y die ganze Curve durchlaufen, wenn die Veränderliche t alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft.

Sind die Gleichungen

(5.) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

gegeben, so kann man umgekehrt durch Elimination von t eine Gleichung zwischen x und y herleiten, aus der man erkennt,

dass man auch in diesem Falle y als eine Function von x betrachten darf.

Es seien z. B. die Gleichungen der *Cykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{6.}$$

gegeben; dann wird

$$a\cos t = a - y, \quad a\sin t = \sqrt{2ay - y^2}, \tag{7.}$$

$$t = \arccos\left(\frac{a - y}{a}\right). \tag{8.}$$

folglich ist

$$x = a\arccos\left(\frac{a - y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}. \tag{9.}$$

Es ist nun die Frage, in welcher Weise man die Grössen p und q bilden kann, wenn die Abhängigkeit zwischen x und y durch die Gleichungen (5.) gegeben ist.

Hier wird

$$\varDelta x = \varphi(t + \varDelta t) - \varphi(t), \quad \varDelta y = \psi(t + \varDelta t) - \psi(t), \tag{10.}$$

also

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\psi(t + \varDelta t) - \psi(t)}{\varphi(t + \varDelta t) - \varphi(t)} = \frac{\dfrac{\psi(t + \varDelta t) - \psi(t)}{\varDelta t}}{\dfrac{\varphi(t + \varDelta t) - \varphi(t)}{\varDelta t}},$$

oder, wenn $\varDelta t$ und deshalb auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ unendlich klein werden,

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}. \tag{11.}$$

Dieses Resultat hätte man auch aus Formel Nr. 35 der Tabelle finden können, nach welcher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

wird, wenn y eine Function von u, und u eine Function von x ist. Man braucht für den vorliegenden Fall nur u mit t zu vertauschen und erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

In derselben Weise kann man jetzt auch

$$q = \frac{dp}{dx}$$

finden, denn es ist, wenn man in Gleichung (11.) y mit p vertauscht,

$$(12.)\qquad q = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx}.$$

Im Allgemeinen wird diese Formel für die Bildung von q am meisten geeignet sein; man kann aber auch q durch die Ableitungen von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ausdrücken, denn es ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t),$$

folglich wird

$$(12a.)\qquad q = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Diesen Ausdruck schreibt man noch bequemer in der Form

$$(12b.)\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

wobei man sich aber bewusst bleiben muss, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung x und y als Functionen von t zu betrachten sind, dass also

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad d^2x = \varphi''(t)dt^2,$$
$$dy = \psi'(t)dt, \quad d^2y = \psi''(t)dt^2$$

ist.

Dieses Verfahren kann man noch fortsetzen, um die höheren Ableitungen von y nach x zu ermitteln. So ist z. B.

$$(13.)\qquad r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dq}{dx} = \frac{\frac{dq}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dq}{dt}\,\frac{dt}{dx}.$$

U. s. w.

§ 77.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. Man soll die Grössen p und q bilden, wenn gegeben ist

$$x = 7 + t^2, \quad y = 3 + t^2 - 3t^4. \tag{1.}$$

Auflösung. Aus den Gleichungen (1.) folgt

$$dx = 2t\,dt, \quad dy = (2t - 12t^3)dt, \tag{2.}$$

$$d^2x = 2dt^2, \quad d^2y = (2 - 36t^2)dt^2; \tag{3.}$$

deshalb wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{2t(1 - 6t^2)}{2t} = 1 - 6t^2, \tag{4.}$$

$$q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{-48t^3dt^3}{8t^3dt^3} = -6. \tag{5.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Grössen p und q bilden, wenn gegeben ist

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \tag{6.}$$

Auflösung. Aus den Gleichungen (6.) folgt

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t\,dt, \tag{7.}$$

$$d^2x = a\sin t\,dt^2, \quad d^2y = a\cos t\,dt^2; \tag{8.}$$

deshalb wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \tag{9.}$$

oder

$$p = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{9a.}$$

Ferner ist

$$q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} = \frac{a^2(\cos t - 1)dt^3}{a^3(1 - \cos t)^3dt^3},$$

oder

$$q = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}. \tag{10.}$$

Dieses Resultat hätte man auch durch Differentiation von Gleichung (9a.) finden können. Es ist nämlich

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)}{dt} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

und nach Gleichung (7.)

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a(1-\cos t)} = \frac{1}{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

folglich ist

$$q = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Grössen p und q bilden, wenn gegeben ist

$$(11.)\qquad x = \operatorname{ctg} t,\quad y = \sin^3 t.$$

Auflösung. Aus den Gleichungen (11.) folgt

$$(12.)\qquad dx = -\frac{dt}{\sin^2 t},\quad dy = 3\sin^2 t\cos t\,dt,$$

also

$$(13.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = -3\sin^4 t\cos t.$$

Ferner ist

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx}$$
$$= (-12\sin^3 t\cos^2 t + 3\sin^5 t)(-\sin^2 t),$$

oder

$$(14.)\qquad q = 3\sin^5 t(4\cos^2 t - \sin^2 t) = 3\sin^5 t(4 - 5\sin^2 t).$$

Aufgabe 4. Man soll die Grössen p und q bilden, wenn gegeben ist

$$(15.)\qquad x = a[m\cos t - \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)].$$

Auflösung. Aus den Gleichungen (15.) folgt

(16.) $dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt, \quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt,$

oder, wenn man

(17.) $$m - 1 = n; \quad m + 1 = l$$

setzt,

(16a.) $$\begin{cases} dx = 2ma \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \\ dy = 2ma \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \end{cases}$$

also

(18.) $$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right).$$

Ferner ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{l}{2\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad \frac{dx}{dt} = 2ma \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right),$$

(19.) $$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{l}{4ma \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

Aufgabe 5. Man soll die Grössen p und q bilden, wenn gegeben ist

(20.) $$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Auflösung. Hier wird

(21.) $$dx = at\cos t\,dt, \quad dy = at\sin t\,dt,$$

(22.) $$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t,$$

(23.) $$dp = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{at\cos^3 t}.$$

Aufgabe 6. In der Gleichung

(24.) $$x\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

ist x die unabhängige Veränderliche. Im Verlaufe einer analytischen Untersuchung wird es nothwendig, durch die Gleichung

(25.) $$x = e^t$$

die Grösse t als unabhängige Veränderliche einzuführen. Welche Form nimmt dadurch die Gleichung (24.) an?

Auflösung. Zunächst ist

$$\frac{dx}{dt} = e^t \text{ und } \frac{dt}{dx} = e^{-t},$$

folglich wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}, \tag{26.}$$

so dass Gleichung (24.) übergeht in

$$e^t \frac{dy}{dt} e^{-t} - ay = 0,$$

oder

$$\frac{dy}{dt} - ay = 0. \tag{27.}$$

Aufgabe 7. In der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \tag{28.}$$

wird die Grösse t als unabhängige Veränderliche eingeführt durch die Gleichung

$$x = \operatorname{arc\,tg} t. \tag{29.}$$

Welche Form nimmt dadurch die Gleichung (28.) an?

Auflösung. Aus Gleichung (29.) folgt

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + t^2, \tag{30.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \frac{dt}{dx} = 1 + t^2, \tag{31.}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(1 + t^2), \tag{32.}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx} = \left[\frac{d^2y}{dt^2}(1 + t^2) + \frac{dy}{dt} \cdot 2t\right](1 + t^2). \tag{33.}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (28.) ein, so erhält man

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}(1+t^2)+\frac{dy}{dt}\cdot 2t\right](1+t^2)+\operatorname{arctg}t\,.\,y\frac{dy}{dt}(1+t^2)+(1+t^2)=0,$$

oder, wenn man die Gleichung durch $1+t^2$ dividirt,

$$(34.)\qquad (1+t^2)\frac{d^2y}{dt^2}+(2t+y\operatorname{arctg}t)\frac{dy}{dt}+1=0.$$

§ 78.

Behandlung des Falles, in welchem y die unabhängige Veränderliche wird.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 93 und 94.)

Ein besonderer Fall in der Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen x mit einer anderen t ist der, wo t gleich y wird, d. h. wo die Grösse y zur unabhängigen Veränderlichen gemacht wird.

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn man bei Curven die Ordinate y als unabhängige Veränderliche ansehen will.

Nach Formel Nr. 92 der Tabelle ist

$$(1.)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\quad\text{und}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Diese Gleichungen bleiben auch noch richtig, wenn man

$$(2.)\qquad t=y$$

setzt; dann wird aber

$$(3.)\qquad \frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dy},\quad\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{dy^2},\quad\frac{dy}{dt}=1,\quad\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Die Gleichungen (1.) gehen daher über in

$$(4.)\qquad p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\quad\text{und}\quad q=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Dem entsprechend findet man durch Vertauschung von x mit y

$$(5.)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = -\frac{q}{p^3}.$$

Aus dem Werthe von q kann man durch Differentiation auch den Werth von r finden. Es ist nämlich

$$(6.)\qquad r = \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dq}{dy} = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^4}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

folglich wird

$$(7.)\qquad r = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

und dem entsprechend

$$(8.)\qquad \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{pr - 3q^2}{p^5}.$$

In dieser Weise kann man mit der Bildung der höheren Ableitungen fortfahren.

§ 79.

Uebungs-Beispiele.

Aufgabe 1. In der Gleichung

$$(1.)\qquad (x + a)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 1 = 0$$

ist x die unabhängige Veränderliche; man soll die Gleichung so umformen, dass y die unabhängige Veränderliche wird.

Auflösung. Setzt man in die Gleichung (1.) die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ nach den Gleichungen (4.) des vorhergehenden Paragraphen ein, so erhält man

$$(x + a)\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \cdot \frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} + x \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} - 1 = 0,$$

oder

$$(2.)\qquad -(x + a)\frac{d^2x}{dy^2} + x\frac{dx}{dy} - \left(\frac{dx}{dy}\right)^4 = 0.$$

Aufgabe 2. In der Gleichung

$$(3.)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$$

ist x die unabhängige Veränderliche; man soll die Gleichung so umformen, dass y die unabhängige Veränderliche wird.

Auflösung. Setzt man wieder für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ihre Werthe ein, so erhält man

$$-x\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} + \frac{2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} - y = 0,$$

oder

$$(4.)\qquad x\frac{d^2x}{dy^2} - 2\frac{dx}{dy} + y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll die ersten drei Ableitungen von $x = \arcsin y$ bilden.

Auflösung. Hier ist

$$(5.)\qquad y = \sin x,\quad p = \cos x,\quad q = -\sin x,\quad r = -\cos x,$$

folglich wird nach den Formeln Nr. 94 der Tabelle

$$(6.)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x},\quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\sin x}{\cos^3 x},\quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^5 x}.$$

X. Abschnitt.

Untersuchung von Curven, die auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogen sind.

§ 80.

Tangenten und Normalen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 95—101.)

Es sei

(1.) $$y = f(x)$$

die Gleichung einer Curve (Fig. 68), auf welcher der beliebige Punkt P mit den Coordinaten x und y liegen möge.

Fig. 68.

Legt man in diesem Punkte die Tangente TP an die Curve und bezeichnet den Winkel, welchen diese Tangente mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, wieder mit α, so ist nach Formel Nr. 16 der Tabelle

(2.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Ist nun die Gleichung der Tangente

(3.) $$y' = mx' + \mu,$$

so ist bekanntlich

(4.) $$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Die laufenden Coordinaten sind mit x' und y' bezeichnet, weil x und y die Coordinaten des Berührungspunktes P sein sollen. Da die Tangente durch den Punkt P gehen muss, so ist auch

$$y = mx + \mu,$$

folglich wird

$$(5.) \qquad y' - y = m(x' - x).$$

Ausserdem ist, wie schon in Gleichung (2.) und (4.) gezeigt wurde,

$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx},$$

deshalb geht Gleichung (5.) über in

$$(6.) \qquad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Die gerade Linie PN, welche im Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, heisst „*Normale*". Deshalb ist die Gleichung der Normalen

$$(7.) \qquad y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

Die Abschnitte der Tangente und der Normalen, welche zwischen der Abscissen-Axe und dem Berührungspunkte P liegen, also die Strecken TP und PN, heissen auch kurzweg „*Tangente*", beziehungsweise „*Normale*". Man bezeichnet sie durch T und N. Die rechtwinkligen Projectionen TQ und QN dieser Abschnitte auf die Abscissen-Axe nennt man „*Subtangente*" und „*Subnormale*" und bezeichnet sie durch St und Sn.

Es ist daher

$$(8.) \qquad \begin{cases} T = TP, & N = PN, \\ St = TQ, & Sn = QN. \end{cases}$$

Hieraus findet man ohne Weiteres

$$(9.) \qquad Sn = y\operatorname{tg}\alpha = y\frac{dy}{dx},$$

$$(10.) \qquad St = y\operatorname{ctg}\alpha = y\frac{dx}{dy},$$

$$(11.) \qquad N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$(12.) \qquad T = \frac{y}{\sin\alpha} = y\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Die beiden letzten Gleichungen kann man noch etwas einfacher schreiben. Haben die benachbarten Curvenpunkte P und P_1 (vergl. Fig. 19 auf Seite 79) bezw. die Coordinaten x, y und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RP_1}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

oder, wenn die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, und wenn man die unendlich kleine Sehne PP_1 durch ds bezeichnet,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{13.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2. \tag{13a.}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (11.) und (12.) ein, so erhält man

$$N = y\frac{ds}{dx}, \quad T = y\frac{ds}{dy}. \tag{14.}$$

§ 81.

Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Die Gleichung einer Parabel (Fig. 69) sei

$$y^2 = 9x; \tag{1.}$$

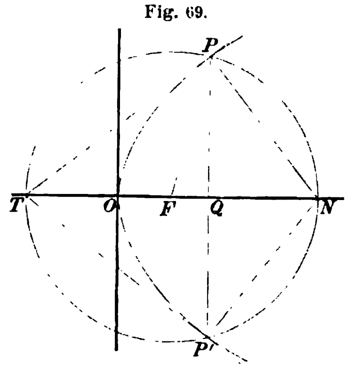


Fig. 69.

man soll für den Punkt P, der die Abscisse

$$x = 4$$

hat, die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$2ydy = 9dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2y}. \tag{2.}$$

Für x gleich 4 erhält man also, wenn man nur den oberen Theil der Curve berücksichtigt,

(3.) $$y^2 = 36, \quad y = 6, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4},$$

(4.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{5}{4}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{5}{3},$$

folglich wird

(5.) $$Sn = QN = y\frac{dy}{dx} = \frac{9}{2}, \qquad St = TQ = y\frac{dx}{dy} = 8,$$

(6.) $$N = PN = y\frac{ds}{dx} = \frac{15}{2}, \qquad T = TP = y\frac{ds}{dy} = 10.$$

Aufgabe 2. Ein Kreis (Fig. 70) ist durch die Gleichung

(7.) $$x^2 + y^2 = 25$$

gegeben; man soll für den Punkt P mit der Abscisse

$$x = -3$$

die Grössen Sn, St, N und T berechnen.

Fig. 70.

Auflösung. Aus Gleichung (7.) folgt

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

oder

(8.) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Für x gleich -3 erhält man also, da die Ordinate von P positiv ist,

(9.) $$y^2 = 25 - 9 = 16, \quad y = 4, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4},$$

(10.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{5}{4}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{5}{3};$$

folglich wird

(11.) $$Sn = y\frac{dy}{dx} = 3, \qquad St = y\frac{dx}{dy} = \frac{16}{3},$$

(12.) $$N = y\frac{ds}{dx} = 5, \qquad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{20}{3}.$$

Die Normale muss, wie auch aus $Sn = QN = 3$ folgt, durch den Mittelpunkt O des Kreises hindurchgehen, d. h. der Punkt N fällt mit O zusammen.

Aufgabe 3. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Parabel*

$$y^2 = 2ax \tag{13.}$$

berechnen. (Vergl. Fig. 69.)

Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

$$2y\,dy = 2a\,dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \tag{14.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{y^2} = \frac{a^2 + y^2}{y^2},$$

also

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{y}\sqrt{a^2 + y^2}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + y^2}. \tag{15.}$$

Dies giebt

$$\begin{cases} Sn = QN = y\dfrac{dy}{dx} = a, \\ St = TQ = y\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^2}{a} = \dfrac{2ax}{a} = 2x, \end{cases} \tag{16.}$$

$$\begin{cases} N = PN = y\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{a^2 + y^2}, \\ T = TP = y\dfrac{ds}{dy} = \dfrac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}. \end{cases} \tag{17.}$$

In den Gleichungen (16.) sind die folgenden Sätze ausgesprochen:

Satz 1. *Die Subnormale ist bei der Parabel constant.*

Satz 2. *Die Subtangente ist bei der Parabel doppelt so gross wie die zugehörige Abscisse.*

Diese beiden Sätze führen zu einer sehr einfachen Construction beliebig vieler Punkte der Parabel. Beschreibt man nämlich um den Brennpunkt F (vergl. Fig. 69) einen Kreis mit dem

beliebigen Halbmesser $TF = FN = x + \frac{a}{2}$ und macht $OQ = TO$, so schneidet die Gerade, welche durch Q parallel zur Y-Axe gezogen wird, den Kreis in zwei Punkten P und P' der Parabel. Dabei sind TP und TP' die Tangenten und PN und $P'N$ die Normalen in den Punkten P und P'.

Auch die Gleichungen von Tangente und Normale lassen sich jetzt ohne Weiteres angeben. Allgemein ist die Gleichung der Tangente

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

also hier

$$y' - y = \frac{a}{y}(x' - x),$$

oder

$$yy' - y^2 = a(x' - x). \tag{18.}$$

Berücksichtigt man noch, dass nach Gleichung (13.) y^2 gleich $2ax$ ist, so geht Gleichung (18.) über in

$$yy' = a(x' + x). \tag{18a.}$$

Die Gleichung der Normale ist allgemein

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x),$$

also hier

$$y' - y = -\frac{y}{a}(x' - x),$$

oder

$$y(x' - x) + a(y' - y) = 0. \tag{19.}$$

Aufgabe 4. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Ellipse*

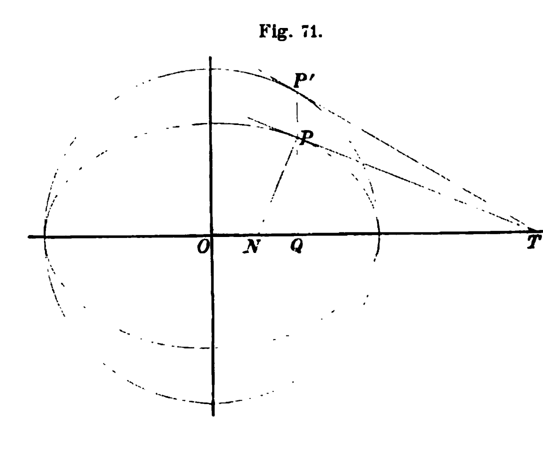
$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{20.}$$

berechnen. (Vergl. Fig. 71.)

Auflösung. Aus Gleichung (20.) folgt durch Differentiation

$$2b^2xdx + 2a^2ydy = 0,$$

Fig. 71.



oder

$$(21.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Löst man noch die Gleichung (20.) nach y auf, so erhält man

$$(22.)\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

folglich wird, wenn man nur das obere Vorzeichen berücksichtigt.

$$(23.)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)} = \frac{a^4 - e^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

wobei die Excentricität der Ellipse, nämlich die Grösse $\sqrt{a^2 - b^2}$ mit e bezeichnet worden ist. Dies giebt

$$(24.)\quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{bx},$$

folglich ist

$$(25.)\quad Sn = QN = y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2},\quad St = TQ = y\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

In der letzten Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Bei allen Ellipsen mit derselben grossen Axe $2a$ gehören zu gleichen Abscissen gleiche Subtangenten.

Diesen Satz kann man anwenden, um in dem Punkte P einer Ellipse, auch wenn dieselbe *nicht* gezeichnet vorliegt, wenn nur die grosse Axe bekannt ist, die Tangente zu construiren.

Auflösung. Man beschreibe über der grossen Axe als Durchmesser einen Kreis, welcher von der Ordinate des Punktes P in einem Punkte P' getroffen wird. Legt man nun im Punkte P' an den Kreis eine Tangente, welche die grosse Axe im Punkte T schneiden möge, dann ist TP die gesuchte Tangente.

weil der Kreis und die Ellipse für die Punkte P' und P dieselbe Subtangente TQ haben müssen.

Ferner ist

$$(26.)\quad \begin{cases} N = PN = y\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{b\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a^2}, \\ T = TP = y\dfrac{ds}{dy} = -\dfrac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente wird mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

$$y' - y = -\frac{b^2x}{a^2y}(x' - x),$$

oder

$$a^2yy' - a^2y^2 + b^2xx' - b^2x^2 = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (20.)

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

daher erhält man durch Addition der beiden letzten Gleichungen

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2,$$

oder

$$(27.)\quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1.$$

Fig. 72.

Die Gleichung der Normalen wird

$$y' - y = \frac{a^2y}{b^2x}(x' - x),$$

oder

$$b^2xy' - b^2xy - a^2yx' + a^2xy = 0,$$

oder

$$(28.)\quad a^2yx' - b^2xy' - e^2xy = 0.$$

In ähnlicher Weise findet man für die *Hyperbel* (Fig. 72.)

$$(29.)\quad Sn = QN = \frac{b^2x}{a^2}, \quad St = TQ = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

$$(30.)\quad \begin{cases} N = PN = \dfrac{b}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4}, \\ T = TP = \dfrac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente ist bei der Hyperbel

$$(31.)\quad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

und die Gleichung der Normalen

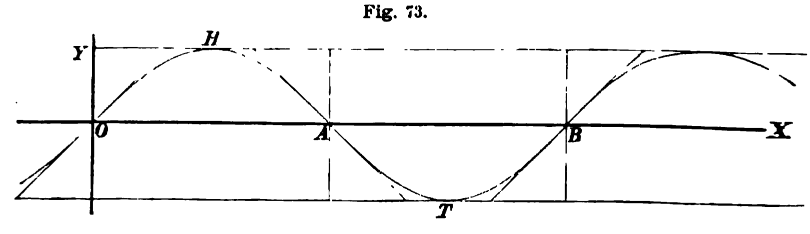
$$(32.)\quad a^2yx' + b^2xy' - e^2xy = 0.$$

Aufgabe 5. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Sinuslinie*

$$(33.)\quad y = \sin x$$

berechnen. (Vergl. Fig. 73.)

Fig. 73.



Auflösung. Aus Gleichung (33.) folgt

$$(34.)\quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Dies giebt

$$(35.)\quad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \cos^2 x, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \cos^2 x},$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\cos x}\sqrt{1 + \cos^2 x};$$

deshalb wird

$$(36.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x, \qquad St = y\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} x,$$

$$(37.)\quad N = y\frac{ds}{dx} = \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}, \quad T = y\frac{ds}{dy} = \operatorname{tg} x\sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

Aufgabe 6. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Exponentiallinie*

$$y = e^x \tag{38.}$$

berechnen. (Vergl. Fig. 74.)

Fig. 74.

Auflösung. Aus Gleichung (38.) folgt

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + e^{2x}} = \sqrt{1 + y^2}, \tag{39.}$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{e^x}\sqrt{1 + e^{2x}} = \frac{1}{y}\sqrt{1 + y^2};$$

dies giebt

$$Sn = y\frac{dy}{dx} = e^{2x} = y^2, \quad St = y\frac{dx}{dy} = 1, \tag{40.}$$

$$\left\{\begin{aligned} N &= y\frac{ds}{dx} = e^x\sqrt{1 + e^{2x}} = y\sqrt{1 + y^2}, \\ T &= y\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + e^{2x}} = \sqrt{1 + y^2}. \end{aligned}\right. \tag{41.}$$

Aus den Gleichungen (40.) folgt der Satz:

Die Subtangente ist bei der Exponentiallinie constant.

Aufgabe 7. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *gemeine Kettenlinie*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{42.}$$

berechnen. (Vergl. Fig. 75.)

Auflösung. Man kann zunächst die Gleichung der gemeinen Kettenlinie noch auf eine andere Form bringen. Es ist nämlich

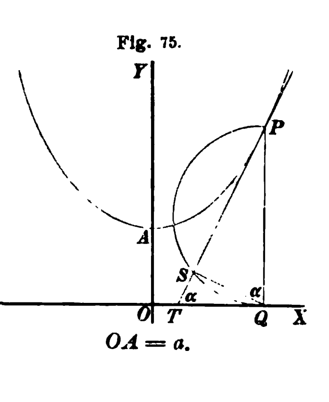


Fig. 75.

$OA = a.$

$$\begin{aligned} y^2 - a^2 &= \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) - a^2 \\ &= \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) \\ &= \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$(43.)\qquad \pm\sqrt{y^2-a^2}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Durch Addition der Gleichungen (42.) und (43.) erhält ma[n]

$$y\pm\sqrt{y^2-a^2}=ae^{\frac{x}{a}},$$

oder

$$(44.)\qquad x=a\,l\left(\frac{y\pm\sqrt{y^2-a^2}}{a}\right).$$

Hierbei gilt das obere oder das untere Zeichen, jenachde[m] x positiv oder negativ ist.

Der Kürze wegen möge in dem Folgenden vorausgesetz[t] werden, dass x positiv ist, dann findet man aus Gleichung (42.) durch Differentiation

$$(45.)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{1}{a}\sqrt{y^2-a^2}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2,$$

also

$$(46.)\qquad \frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=\frac{y}{a},\quad \frac{ds}{dy}=\frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Dies giebt

$$(47.)\qquad \begin{cases} Sn=QN=y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{a}\sqrt{y^2-a^2}, \\[2ex] St=TQ=y\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{ay}{\sqrt{y^2-a^2}}, \end{cases}$$

$$(48.)\qquad N=PN=y\frac{ds}{dx}=\frac{y^2}{a},\quad T=TP=y\frac{ds}{dy}=\frac{y^2}{\sqrt{y^2-a^2}}.$$

Aus Gleichung (45.) ergiebt sich die Construction der Tangente in einem Curvenpunkte P, auch wenn die Curve nicht gezeichnet vorliegt, in folgender Weise.

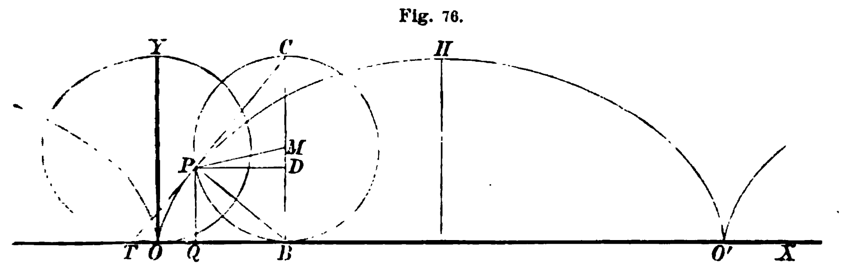
Man beschreibe über QP als Durchmesser einen Kreis (Fig. 75) und trage von Q aus die Sehne QS gleich a ab, dann ist die Gerade PS, welche die X-Axe im Punkte T schneiden möge, die Tangente im Punkte P, denn es wird

$$\operatorname{tg} QTP = \operatorname{tg} SQP = \frac{SP}{SQ} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Aufgabe 8. Man soll die Gleichungen der gemeinen *Cykloide* aufstellen. (Vergl. Fig. 76.)

Auflösung. Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt der Peripherie dieses Kreises eine gemeine Cykloide.

Fig. 76.



Um die Gleichungen dieser Curve zu bestimmen, mache man die Gerade OX (Fig. 76), auf welcher der Kreis rollt, zur X-Axe und lege die Y-Axe durch denjenigen Punkt O, in welchen der die Cykloide erzeugende Punkt fällt, wenn der rollende Kreis in diesem Punkte die X-Axe berührt.

Rollt der Kreis, von dieser Anfangslage ausgehend, fort, bis sein Mittelpunkt nach M und der erzeugende Punkt nach P gelangt, so ist P ein Punkt der Cykloide mit den Coordinaten

$$(49.) \qquad OQ = x \quad \text{und} \quad QP = y.$$

Ist ferner B der Berührungspunkt des Kreises um M, so nennt man den Centriwinkel PMB den „*Wälzungswinkel*"; er wird gemessen durch die Länge t des Kreisbogens, der in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 demselben Centriwinkel entspricht. Wenn man also den Halbmesser des rollenden Kreises a nennt, so ist der Bogen

(50.) $$\widehat{PB} = at.$$

Dieser Bogen muss aber der Strecke OB gleich sein, auf welcher der Kreis fortgerollt ist, um aus der Anfangslage in die neue Lage zu kommen. Es ist also auch

(51.) $$OB = at;$$

ferner ist

$$QB = PD = a\sin t,$$

und deshalb

(52.) $$x = OQ = OB - QB = a(t - \sin t).$$

Da ausserdem

$$BM = a \quad \text{und} \quad DM = a\cos t$$

ist, so wird

(53.) $$y = QP = BD = BM - DM = a(1 - \cos t).$$

Aus den Gleichungen (52.) und (53.) kann man noch die Grösse t eliminiren. Man erhält dadurch, wie in § 76, Gleichung (9.) gezeigt wurde,

(54.) $$x = a\arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Bei der Untersuchung der Cykloide ist es aber bequemer, von den beiden Gleichungen

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

auszugehen.

Aufgabe 9. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Cykloide*

(55.) $$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

berechnen. (Vergl. Fig. 76.)

Auflösung. Aus den Gleichungen (55.) folgt durch Differentiation

(56.) $$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t\,dt,$$

und daraus durch Division

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{tg}\alpha, \tag{57.}$$

wo α der Winkel ist, welchen die Tangente im Punkte P mit der positiven Richtung der X-Axe bildet.

Aus Gleichung (57.) ergiebt sich zunächst, dass

$$\alpha = 90^0 - \frac{t}{2} \tag{58.}$$

ist. Nun ist der Winkel PCB (Fig. 76) als Peripheriewinkel halb so gross wie der Centriwinkel PMB, folglich ist

$$\sphericalangle PCB = \frac{t}{2}$$

und

$$\sphericalangle PTB = 90^0 - PCB = 90^0 - \frac{t}{2} = \alpha.$$

Verbindet man also den höchsten Punkt C des Kreises um M mit dem erzeugenden Punkte P, so erhält man die Tangente der Cykloide im Punkte P.

Ferner ist

$$Sn = y\frac{dy}{dx} = a(1 - \cos t)\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= 2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

oder

$$Sn = a\sin t = PD = QB. \tag{59.}$$

Die Normale geht also durch den Punkt B, in dem der Kreis um M die X-Axe berührt.

Dieses Resultat ist schon eine Folge des vorhergehenden, weil der Winkel CPB als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter ist, und die Normale auf der Tangente im Berührungspunkte senkrecht steht.

$$St = y\frac{dx}{dy} = a(1 - \cos t)\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \tag{60.}$$

$$= 2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right).$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

also

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)};$$

dabei ist die Wurzel aus $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ mit positivem Vorzeichen genommen, weil der Bogen s mit x zugleich zunimmt und deshalb dx und ds gleiches Vorzeichen haben. Dies giebt

$$(61.) \qquad N = PB = y\frac{ds}{dx} = \frac{a(1 - \cos t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

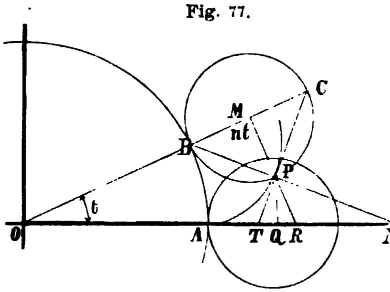
$$(62.) \qquad T = TP = y\frac{ds}{dy} = \frac{a(1 - \cos t)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Aufgabe 10. Man soll die Gleichungen der gemeinen *Epicykloiden* und *Hypocykloiden* herleiten.

Auflösung. Wenn ein Kreis mit dem Halbmesser a auf einem festen Kreise mit dem Halbmesser na rollt, ohne zu gleiten, so beschreibt jeder Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises eine gemeine Epicykloide oder Hypocykloide, jenachdem die Berührung von Aussen oder von Innen stattfindet.

Findet die Berührung zunächst von Aussen statt (Fig. 77), so mache man den Mittelpunkt O des festen Kreises zum Nullpunkte und lege die X-Axe durch denjenigen Punkt A, in welchem der die Curve erzeugende Punkt der Berührungspunkt der beiden Kreise wird. Liegt dann beim Weiterrollen des beweglichen Kreises um M der Berührungspunkt in B, so nennt man Winkel

Fig. 77.



$$AOB = t$$

den „*Wälzungswinkel* des festen" und PMB den „*Wälzungswinkel* des rollenden Kreises", wobei P ein Punkt der Curve ist. Dann wird

$$\widehat{AB} = \widehat{PB},$$

oder, weil $\widehat{AB}$ zum Centriwinkel t und zum Halbmesser na gehört,

$$\widehat{PB} = \widehat{AB} = na\,.\,t = a\,.\,nt.$$

Daraus folgt, dass Winkel

$$PMB = nt \quad \text{und} \quad PCB = \frac{nt}{2}$$

ist. Trifft die Gerade MP die X-Axe im Punkte R, so wird Winkel

$$NRM = (n + 1)t$$

als Aussenwinkel des Dreiecks OMR. Bezeichnet man noch die Coordinaten des Punktes M mit x_1, y_1 und setzt

$$n + 1 = m, \tag{63.}$$

so wird

$$OQ = x = x_1 - a\cos(mt), \tag{64.}$$

$$QP = y = y_1 - a\sin(mt); \tag{65.}$$

da

$$x_1 = OM\cos t = ma\cos t, \quad y_1 = OM\sin t = ma\sin t$$

ist, so gehen die Gleichungen (64.) und (65.) über in

$$x = a[m\cos t - \cos(mt)], \tag{64a.}$$

$$y = a[m\sin t - \sin(mt)]. \tag{65a.}$$

Dies sind die Gleichungen der *Epicykloiden.*

In ähnlicher Weise findet man die Gleichungen der *Hypocykloiden.* Wendet man nämlich in Fig. 78 die entsprechenden Bezeichnungen an wie in Fig. 77 und nennt den Wälzungswinkel AOB des festen Kreises t, so wird in dem vorliegenden Falle wieder

$$\widehat{AB} = \widehat{PB},$$

oder

$$\overset{\frown}{PB} = na\,.\,t = a\,.\,nt.$$

Der Wälzungswinkel PMB des rollenden Kreises ist daher nt, so dass man erhält

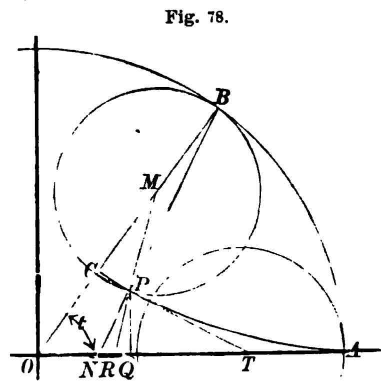


Fig. 78.

$$\sphericalangle\, OMR = \pi - nt,$$
$$\sphericalangle\, TRM = \pi - nt + t.$$

Bezeichnet man wieder die Coordinaten des Punktes M mit x_1, y_1 und setzt in diesem Falle

(66.) $\quad n - 1 = m,$

so wird

(67.) $OQ = x = x_1 - a\cos(\pi - mt),$

(68.) $QP = y = y_1 - a\sin(\pi - mt);$

da aber

$$x_1 = OM\cos t = ma\cos t, \quad y_1 = OM\sin t = ma\sin t$$

ist, so gehen die Gleichungen (67.) und (68.) über in

(67a.) $$x = a[m\cos t + \cos(mt)],$$

(68a.) $$y = a[m\sin t - \sin(mt)].$$

Dies sind die Gleichungen der *Hypocykloiden*.

Ein besonderer Fall der *Epicykloiden* ist die *Cardioide* (vergl. Fig. 79), deren Gleichungen man aus den Gleichungen (64a.) und (65a.) erhält, indem man $n = 1$, also $m = 2$ setzt.

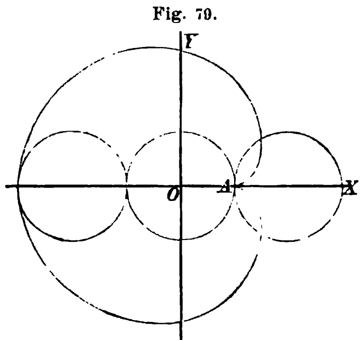


Fig. 79.

Dies giebt

(69.) $x = a[2\cos t - \cos(2t)],$

(70.) $y = a[2\sin t - \sin(2t)].$

Der feste und der rollende Kreis haben in diesem Falle denselben Halbmesser a.

Ein besonderer Fall der *Hypocykloiden* ist die *Astroide* (vergl. Fig. 80), deren Gleichungen man

aus den Gleichungen (67a.) und (68a.) erhält, indem man $n = 4$, also $m = 3$ setzt. Dies giebt

Fig. 80.

(71.) $x = a[3\cos t + \cos(3t)]$,

(72.) $y = a[3\sin t - \sin(3t)]$.

Da bekantlich

$\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$,

$\sin(3t) = 3\sin t - 4\sin^3 t$

ist, so gehen die Gleichungen (71.) und (72.) über in

(71a.) $x = 4a\cos^3 t$,

(72a.) $y = 4a\sin^3 t$.

Aufgabe 11. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Epicykloide*

(73.) $x = a[m\cos t - \cos(mt)]$, $y = a[m\sin t - \sin(mt)]$

berechnen. (Vergl. Fig. 77.)

Auflösung. Aus den Gleichungen (73.) erhält man durch Differentiation, wenn man $m + 1 = n + 2$ mit l bezeichnet,

(74.) $dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt$,

(75.) $dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt$,

und daraus durch Division

(76.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{nt}{2} + t\right),$$

oder, wenn man mit h eine noch passend zu wählende ganze Zahl bezeichnet,

(76a.) $$\alpha = \frac{nt}{2} + t \pm h\pi.$$

Daraus folgt, dass die Gerade PC, welche die X-Axe im Punkte T schneiden möge, *Tangente* der Curve im Punkte P ist, denn Winkel NTC ist als Aussenwinkel des Dreiecks TCO gleich Winkel

$$COT + TCO = \frac{nt}{2} + t,$$

also gleich α. Da der Winkel CPB als Winkel im Halbkreis ein rechter ist, so muss PB die *Normale* im Punkte P sein. Dies giebt den Satz:

Die Tangente im Curvenpunkte P schneidet den rollenden Kreis zum zweiten Male in einem Punkte C, welcher mit dem Berührungspunkte B auf einem Durchmesser liegt; oder *die Normale des Punktes P geht durch den Punkt B, in welchem der rollende Kreis den festen Kreis berührt.*

$$(77.)\quad Sn = y\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}\left(\frac{lt}{2}\right),\quad St = y\frac{dx}{dy} = y\,\mathrm{ctg}\left(\frac{lt}{2}\right);$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{lt}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

also, da für kleine Werthe von t der Bogen s mit x gleichzeitig wächst,

$$(78.)\quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)};\quad \frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

folglich wird

$$(79.)\quad N = y\frac{ds}{dx} = \frac{y}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)},\qquad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

Aufgabe 12. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Hypocykloide*

$$(80.)\quad x = a[m\cos t + \cos(mt)],\quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

berechnen. (Vergl. Fig. 78.)

Auflösung. Aus den Gleichungen (80.) erhält man durch Differentiation, wenn man hier $m - 1 = n - 2$ mit l bezeichnet,

$$(81.)\quad dx = ma[-\sin t - \sin(mt)]dt = -2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

$$(82.)\quad dy = ma[\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt,$$

und daraus durch Division

$$(83.)\quad \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,\alpha = -\,\mathrm{tg}\left(\frac{lt}{2}\right) = -\,\mathrm{tg}\left(\frac{nt}{2} - t\right),$$

oder, abgesehen von einem Vielfachen von π,

(83a.) $$\alpha = \pi - \frac{nt}{2} + t, \quad \text{oder} \quad \frac{nt}{2} - t = \pi - \alpha.$$

Daraus folgt, dass die Gerade PC, welche die X-Axe im Punkte T schneiden möge, *Tangente* der Curve im Punkte P ist, denn der Dreieckswinkel CTO ist gleich dem Aussenwinkel $TCB \left(\text{oder } \frac{nt}{2}\right)$, weniger dem anderen Dreieckswinkel COT (oder t), also

$$CTO = \frac{nt}{2} - t = \pi - \alpha.$$

Da der Winkel CPB als Winkel im Halbkreise ein rechter ist, so muss PB die *Normale* im Punkte P sein.

Man erhält daher hier denselben Satz wie bei der Epicykloide.

(84.) $$Sn = y\frac{dy}{dx} = -y\operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right), \quad St = y\frac{dx}{dy} = -y\operatorname{ctg}\left(\frac{lt}{2}\right);$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{lt}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

also

(85.) $$\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad \frac{ds}{dy} = +\frac{1}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

wobei das Vorzeichen dadurch bestimmt ist, dass s für kleine Werthe von t zunimmt, während x abnimmt, dass also dx und ds entgegengesetztes Zeichen haben. Dies giebt

(86.) $$N = y\frac{ds}{dx} = -\frac{y}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}, \quad T = y\frac{ds}{dy} = \frac{y}{\sin\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

Für die *Astroide* wird

$$n = 4, \quad m = 3, \quad l = 2,$$

also

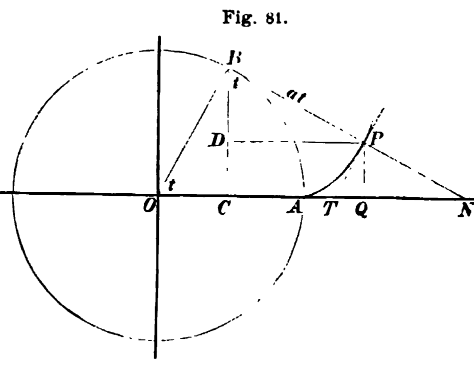
$$x = a[3\cos t + \cos(3t)] = 4a\cos^3 t, \quad y = a[3\sin t - \sin(3t)] = 4a\sin^3 t.$$

$$(87.)\quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t, \quad Sn = -y \operatorname{tg} t, \quad St = -y \operatorname{ctg} t, \\ N = -\frac{y}{\cos t} = -4a \sin^2 t \operatorname{tg} t, \quad T = \frac{y}{\sin t} = 4a \sin^2 t. \end{cases}$$

Aufgabe 13. Man soll die Gleichungen der *Kreisevolvente* herleiten. (Vergl. Fig. 81.)

Auflösung. Die Kreisevolvente entsteht durch Abwickelung eines Fadens von einem Kreise, wobei der Endpunkt des gespannten Fadens die Curve durchläuft. Es sei B der Punkt, in welchem der Faden den Kreis verlässt, dann ist der gespannte Faden BP die Tangente des Kreises im Punkte B, und es wird die Gerade

Fig. 81.



$$BP = \widehat{BA} = at,$$

wenn A der Endpunkt des aufgewickelten Fadens, a der Halbmesser des Kreises und t der Winkel AOB ist. Diesen Winkel nennt man auch hier den „*Wälzungswinkel*".

Macht man den Mittelpunkt O des Kreises zum Anfangspunkt der Coordinaten, legt die X-Axe durch den Punkt A und zieht durch B die Gerade BC parallel zur Y-Axe und durch P die Gerade PD parallel zur X-Axe, so wird

$$OQ = x = OC + CQ = OC + DP,$$
$$QP = y = CD = CB - DB,$$

oder, weil auch Winkel DBP gleich t ist,

$$(88.)\quad x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

Aufgabe 14. Man soll die Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *Kreisevolvente* berechnen. (Vergl. Fig. 81.)

Auflösung. Aus den Gleichungen der Kreisevolvente, nämlich aus den Gleichungen (88.), folgt

(89.) $$dx = at\cos t\,dt, \quad dy = at\sin t\,dt,$$

und daraus durch Division

(90.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}t.$$

Dies giebt den Satz: *Die Tangente TP im Curvenpunkte P ist dem entsprechenden Kreishalbmesser OB parallel, und der den Kreis im Punkte B berührende Faden BP ist Normale der Kreisevolvente.* Ferner wird

(91.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos t},$$

(92.) $$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t},$$

(93.) $$Sn = QN = y\operatorname{tg}t, \quad St = TQ = y\operatorname{ctg}t,$$

(94.) $$N = PN = \frac{y}{\cos t}, \quad T = TP = \frac{y}{\sin t}.$$

§ 82.

Asymptoten einer Curve.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 102.)

Erklärung. Eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich fern liegt, heisst eine „*Asymptote*“ der Curve.

In diesem Falle ist die Formel Nr. 95 der Tabelle, welche die Gleichung der Tangente angiebt, nämlich

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

nicht mehr anwendbar, weil die Differentiation dann nicht mehr ausgeführt werden kann, denn x und y (oder wenigstens die eine von diesen beiden Grössen) werden unendlich gross. Dagegen führen die folgenden algebraischen Untersuchungen zum Ziele.

Es sei

(1.) $$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

wobei zunächst vorausgesetzt werden möge, dass a von Null verschieden sei; dann wird in der Algebra gezeigt, dass es einen

(reellen oder complexen*)) Werth von x geben muss — er heisse x_1 —, für welchen $f(x) = 0$ wird, wobei man x_1 eine „*Wurzel* der Gleichung $f(x) = 0$“ nennt. Es gilt also

Satz 1. *Jede algebraische Gleichung besitzt eine Wurzel.*

Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so wird

$$(2.)\quad f(x_1) = ax_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0.$$

Subtrahirt man die Gleichungen (1.) und (2.) von einander, so erhält man

$$(3.)\quad f(x) - f(x_1) = f(x) = a(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1),$$

oder nach Formel Nr. 12 der Tabelle

$$(3a.)\quad f(x) = (x - x_1)\big[a(x^{n-1} + x_1x^{n-2} + x_1^2x^{n-3} + \cdots + x_1^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + x_1x^{n-3} + x_1^2x^{n-4} + \cdots + x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}(x + x_1) + a_{n-1}\big].$$

Bezeichnet man die ganze rationale Function $(n-1)^{ten}$ Grades in der eckigen Klammer mit $f_1(x)$, so wird daher

$$(4.)\quad f(x) = (x - x_1)f_1(x) = (x - x_1)(ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}),$$

wobei

$$b_1 = ax_1 + a_1, \quad b_2 = ax_1^2 + a_1x_1 + a_2, \cdots.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ durch den Factor $x - x_1$ ohne Rest theilbar.*

Nach Satz 1 hat jetzt auch die Gleichung $(n-1)^{ten}$ Grades $f_1(x) = 0$ eine Wurzel, die x_2 heissen möge; dann ist nach Satz 2

$$(5.)\quad f_1(x) = (x - x_2)f_2(x),$$

wobei

$$f_2(x) = ax^{n-2} + c_1x^{n-3} + c_2x^{n-4} + \cdots + c_{n-2}$$

eine ganze rationale Function $(n-2)^{ten}$ Grades ist. Ebenso findet man die Gleichungen

*) Unter einer complexen Grösse versteht man eine Zahl von der Form $a + b\sqrt{-1}$; vergl. § 131.

(6.) $f_2(x) = (x - x_3) f_3(x) = (x - x_3)(ax^{n-3} + d_1 x^{n-4} + \cdots + d_{n-3})$,
(7.) $f_3(x) = (x - x_4) f_4(x) = (x - x_4)(ax^{n-4} + e_1 x^{n-5} + \cdots + e_{n-4})$,

. . . .

(8.) $f_{n-2}(x) = (x - x_{n-1}) f_{n-1}(x) = (x - x_{n-1})(ax + k)$,

(9.) $f_{n-1}(x) = a(x - x_n)$, wobei $x_n = -\dfrac{k}{a}$

ist. Multiplicirt man die Gleichungen (4.) bis (9.) mit einander und hebt die Factoren

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x), \ldots f_{n-1}(x)$$

auf beiden Seiten fort, so erhält man

(10.) $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

Daraus folgen die Sätze:

Satz 3. *Jede ganze rationale Function n^{ten} Grades lässt sich in n lineare Factoren* (d. h. Factoren ersten Grades) *zerlegen.*

Satz 4. *Jede Gleichung n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln.*

Aus Gleichung (10.) ersieht man nämlich, dass $f(x) = 0$ wird für die n Werthe

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad x = x_3, \ldots \quad x = x_n,$$

und dass $f(x)$ für keinen anderen Werth von x verschwinden kann. Denn wäre $f(x) = 0$ für $x = x_{n+1}$, wobei x_{n+1} von x_1, x_2, $x_3, \ldots x_n$ verschieden sein soll, so würde aus Gleichung (10.) folgen

(11.) $$a(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)(x_{n+1} - x_3) \ldots (x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach Voraussetzung sind sämmtliche Factoren dieses Productes von 0 verschieden.

Lässt man die Voraussetzung $a \gtrless 0$ fort, so folgt aus der Gleichung (11.), dass $a = 0$ sein muss, und dass sich $f(x)$ auf eine rationale ganze Function $(n-1)^{ten}$ Grades

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

reducirt, welche für mehr als $n-1$ Werthe von x verschwindet. Daraus würde man wieder schliessen, dass auch $a_1 = 0$ sein muss. Indem man diesen Schluss wiederholt, findet man

Satz 5. *Verschwindet die ganze rationale Function n^{ten} Grades*

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

für mehr als n verschiedene Werthe von x, so müssen sämmtliche Coefficienten a, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n *gleich* 0 *sein.*

Daraus ergiebt sich auch der

Satz 5a. *Sind zwei ganze rationale Functionen*

$$F(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

und

$$G(x) = Bx^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_{n-1}x + B_n$$

für mehr als n Werthe von x einander gleich, so müssen die gleichstelligen Coefficienten einander gleich sein, d. h. es muss

$$A = B, \quad A_1 = B_1, \ldots A_{n-1} = B_{n-1}, \quad A_n = B_n$$

sein. Der Beweis folgt aus Satz 5, indem man

$$F(x) - G(x) = f(x),$$

also

$$A - B = a, \ A_1 - B_1 = a_1, \ldots A_{n-1} - B_{n-1} = a_{n-1}, \ A_n - B_n = a_n$$

setzt.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass unter den n Wurzeln x_1, x_2, ... x_n einer Gleichung n^{ten} Grades auch etliche einander gleich sind. Ist z. B. $x_2 = x_1$, so wird nach dem Vorstehenden

$$f(x) = (x - x_1)^2 f_2(x), \tag{12.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - x_1)f_2(x) + (x - x_1)^2 f'_2(x) \\ &= (x - x_1)[2f_2(x) + (x - x_1)f'_2(x)], \end{aligned} \tag{13.}$$

oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

$$f'(x) = (x - x_1)\varphi(x), \tag{13a.}$$

d. h. x_1 ist dann auch eine Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0.$$

Dieses Resultat kann man noch verallgemeinern. Ist x_1 eine α-fache Wurzel von $f(x) = 0$, ist also

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_\alpha,$$

so wird nach dem Vorstehenden

(14.) $f(x) = (x - x_1)^\alpha f_\alpha(x),$

(15.) $f'(x) = \alpha(x - x_1)^{\alpha-1} f_\alpha(x) + (x - x_1)^\alpha f'_\alpha(x)$
$$= (x - x_1)^{\alpha-1}[\alpha f_\alpha(x) + (x - x_1) f'_\alpha(x)],$$
oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer wieder mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

(15a.) $$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1}\varphi(x).$$

Dies giebt

Satz 6. *Ist x_1 eine α-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist x_1 eine $(\alpha - 1)$-fache Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, eine $(\alpha - 2)$-fache Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0, \ldots$ und eine einfache Wurzel der Gleichung $f^{(\alpha-1)}(x) = 0$.*

Ein besonderer Fall hiervon ist der, dass
$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_{n-2} = 0, \ldots a_{n-\alpha+1} = 0$$
wird; dann reducirt sich die Gleichung des n^{ten} Grades auf

(16.) $$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-\alpha} x^\alpha = 0$$
und hat die α-fache Wurzel $x = 0$.

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so geht die Gleichung $f(x) = 0$ über in
$$\frac{a}{t^n} + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{t} + a_n = 0,$$
oder, wenn man die ganze Gleichung mit t^n multiplicirt, in

(17.) $$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a = 0.$$

Jeder Wurzel t_α dieser Gleichung entspricht eine Wurzel $x_\alpha = \frac{1}{t_\alpha}$ der Gleichung $f(x) = 0$. Wenn nun
$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \cdots a_{\alpha-1} = 0$$
ist, so reducirt sich Gleichung (17.) au

(17a.) $$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_\alpha t^\alpha = 0$$
und hat die α-fache Wurzel $t = 0$, folglich werden in diesem Falle α Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ *unendlich gross.*

Die Bestimmung der Asymptoten einer Curve mit der Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{18.}$$

möge nun auf den Fall beschränkt werden, wo $F(x, y)$ eine *ganze rationale* Function n^{ten} Grades ist, obgleich die meisten Schlüsse und Ergebnisse der hier folgenden Untersuchung auch dann noch richtig bleiben, wenn diese Beschränkung aufgehoben wird.

Zunächst beachte man, dass die Asymptote eine gerade Linie ist, deren Gleichung die Form

$$Ax' + By' + C = 0 \tag{19.}$$

haben muss. Ist $B \gtrless 0$, so erhält man hieraus

$$y' = mx' + \mu, \tag{19a.}$$

und ist $A \gtrless 0$, so erhält man

$$x' = ly' + \lambda, \tag{19b.}$$

wobei

$$m = -\frac{A}{B}, \quad l = -\frac{B}{A} = \frac{1}{m} \tag{20.}$$

ist. Wird $B = 0$, so ist die Gerade parallel zur Y-Axe und hat die Gleichung

$$x' = \lambda,$$

während die Gleichung (19a.) nicht benutzt werden kann. Wird $A = 0$, so ist die Gerade parallel zur X-Axe und hat die Gleichung

$$y' = \mu,$$

während die Gleichung (19b.) nicht benutzt werden kann.

Damit die Gerade (19a.) oder (19b.) durch den Curvenpunkt P mit den Coordinaten x und y hindurchgeht, muss

$$y = mx + \mu \quad \text{und} \quad x = ly + \lambda,$$

oder

$$m = \frac{y}{x} - \frac{\mu}{x} \quad \text{und} \quad l = \frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y} \tag{21.}$$

sein, wobei zunächst angenommen ist, dass der Punkt P im Endlichen liegt. Rückt aber P in's Unendliche, so wird

$$(21\text{a.})\qquad m = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x} - \frac{\mu}{x}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$(21\text{b.})\qquad l = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y}\right) = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Um nun die Grössen $\lim\left(\frac{y}{x}\right)$ bezw. $\lim\left(\frac{x}{y}\right)$ zu berechnen, beachte man, dass x und y die Coordinaten eines *Curven*punktes sind, dass man also die Werthe von $\frac{y}{x}$ und $\frac{x}{y}$ aus der Gleichung der Curve, nämlich aus

$$F(x, y) = 0$$

berechnen muss. Zu diesem Zwecke ordne man $F(x, y)$ so, dass

$$(22.)\qquad F(x, y) = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1 + U_0 = 0$$

wird, wobei

$$U_n = ay^n + a_1 xy^{n-1} + a_2 x^2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} y + a_n x^n$$

alle Glieder der n^{ten} Dimension,

$$U_{n-1} = by^{n-1} + b_1 xy^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$$

alle Glieder der $(n-1)^{ten}$ Dimension,

. . . .

$$U_1 = ky + k_1 x$$

die Glieder der ersten Dimension enthält, und U_0 eine Constante ist.

Dividirt man jetzt beide Seiten der Gleichung (22.) durch x^n, so wird

$$(23.)\qquad \frac{U_n}{x^n} = a\left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + a_n$$

nur noch von $\frac{y}{x}$ abhängig sein. Dagegen wird

$$(24.)\qquad \frac{U_{n-1}}{x^n} = \frac{1}{x}\left[b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + b_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + \cdots + b_{n-1}\right].$$

Lässt man jetzt x unendlich gross werden, so ist

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = m,$$

und wenn m eine endliche Grösse ist,

$$\lim \frac{U_{n-1}}{x^n} = 0.$$

Ebenso werden die Grössen $\lim \frac{U_{n-2}}{x^n}, \ldots \lim \frac{U_1}{x^n}, \lim \frac{U_0}{x^n}$ gleich 0, so dass sich die Gleichung (22.) bei der Ausführung der angegebenen Operationen auf

$$(25.)\quad \lim \frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

reducirt.

Die n Wurzeln dieser Gleichung entsprechen n Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte der Curve liegen.

Eine Curve n^{ten} Grades hat daher n unendlich ferne Punkte und deshalb auch n Asymptoten, von denen aber einige imaginär sein können, dem Umstande entsprechend, dass die Gleichung (25.) *imaginäre Wurzeln haben kann.*

Wenn in Gleichung (25.) der Coefficient von m^n, nämlich a, gleich 0 wird, so reducirt sich der Grad der Gleichung (25.) und somit auch die Anzahl ihrer Wurzeln, nicht aber die Anzahl der Asymptoten. Es wurde ja schon vorher darauf hingewiesen, dass die Gleichungsform

$$y' = mx' + \mu$$

für die Asymptote nicht immer verwendbar sei. Dieser Fall tritt ein, wenn a gleich 0 ist.

Dividirt man nämlich die Gleichung (22.) durch y^n, lässt dann y unendlich gross werden und beachtet, dass $\lim\left(\frac{x}{y}\right) = l$ ist, so erhält man

$$(26.)\quad \lim_{y=\infty} \frac{U_n}{y^n} = a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + a_{n-2} l^{n-2} + \cdots + a_1 l + a = 0.$$

Wird jetzt a gleich 0, so hat diese Gleichung die Wurzel

$$l = \frac{1}{m} = 0,$$

und die entsprechende Asymptote steht auf der X-Axe senkrecht. Ist auch a_1 gleich 0, so lässt sich in Gleichung (26.) auf der linken Seite der Factor l^2 abtrennen, d. h. die Gleichung hat die Wurzel

$$l = 0$$

zwei Mal, so dass zwei Asymptoten auf der X-Axe senkrecht stehen. U. s. w.

Nachdem man aus der Gleichung (25.) einen Werth von m (oder aus der Gleichung (26.) einen Werth von l) bestimmt hat, kennt man erst die *Richtung* der Asymptote

$$y' = mx' + \mu;$$

um ihre Lage vollständig zu erhalten, muss man noch den zugehörigen Werth von μ (bezw. λ) aufsuchen.

Zu diesem Zwecke bestimme man die Punkte, in denen die Curve von der Geraden geschnitten wird. Für die Coordinaten eines solchen Punktes gelten die Gleichungen

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad y = mx + \mu$$

gemeinschaftlich, also auch die Gleichung

$$F(x, mx + \mu) = 0. \tag{27.}$$

Diese Gleichung enthält nur noch die *eine* Unbekannte x und lässt sich, da sie höchstens vom n^{ten} Grade ist, auf die Form

$$F(x, mx + \mu) = Vx^n + V_1x^{n-1} + V_2x^{n-2} + \cdots \\ + V_{n-1}x + V_n = 0 \tag{27a.}$$

bringen. Wie die Coefficienten V, V_1, V_2, ... gebildet sind, ergiebt sich aus der Betrachtung der Ausdrücke

$$U_n(x, mx + \mu), \quad U_{n-1}(x, mx + \mu), \quad U_{n-2}(x, mx + \mu), \cdots,$$

in welche die Grössen U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, ... übergehen, wenn man y gleich $mx + \mu$ einsetzt. Es ist nämlich

$$U_n(x, mx + \mu) =$$

$$a(mx + \mu)^n + a_1x(mx + \mu)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}(mx + \mu) + a_nx^n$$

$$= (am^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n)x^n$$

$$+ \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1m^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}m + a_{n-1}]x^{n-1}$$

$$+ \cdot \; ,$$

$$U_{n-1}(x, mx + \mu) =$$

$$b(mx + \mu)^{n-1} + b_1x(mx + \mu)^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}(mx + \mu) \\ + b_{n-1}x^{n-1}$$

$$= (bm^{n-1} + b_1m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots.$$

Daraus folgt

$$(28.)\quad V = am^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n,$$

$$(29.)\quad V_1 = \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}] + (bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + \cdots + b_{n-2} m + b_{n-1}),$$

. . . .

Da nun der Werth von m bereits so bestimmt ist, dass Gleichung (25.) befriedigt wird, so ist schon deshalb

$$V = 0,$$

d. h. die Gleichung (27 a.), nämlich die Gleichung

$$Vx^n + V_1 x^{n-1} + V_2 x^{n-2} + \cdots + V_{n-1} x + V_n = 0,$$

hat bereits eine Wurzel

$$x = \infty,$$

oder mit anderen Worten, die Gerade

$$y' = mx' + \mu$$

geht bereits durch einen unendlich fernen Punkt der Curve, welchen Werth auch μ haben mag.

Damit sie aber die Curve in diesem Punkte berührt, muss man μ so bestimmen, dass auch noch eine zweite Wurzel der Gleichung (27a.) unendlich gross wird. Dies geschieht, wenn man

$$(30.)\quad V_1 = 0$$

macht, indem man

$$(31.)\quad \mu = -\frac{bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + \cdots + b_{n-2} m + b_{n-1}}{nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}$$

setzt.

Die Regel, welche sich aus dieser Untersuchung für die Behandlung von Beispielen ergiebt, ist daher folgende:

Man dividirt U_n durch x^n und erhält dadurch, dass man $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ gleich m setzt, die Gleichung (25.), nämlich

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0.$$

Ist m eine Wurzel dieser Gleichung, so setzt man $y = mx + \mu$ in die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

ein, von der man aber nur die Glieder $U_n + U_{n-1}$ braucht,

dividirt durch x^{n-1} und lässt dann x unendlich gross werden. Dies giebt eine Gleichung ersten Grades für die Bestimmung von μ.

Man hätte auch x mit y und in Folge dessen m mit l und μ mit λ vertauschen können, um die Gleichung der Asymptoten in der Form

$$x' = ly' + \lambda$$

zu erhalten. Diese Vertauschung ist sogar nothwendig, wenn eine oder mehrere Asymptoten der Y-Axe parallel sind, d. h. wenn

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \ldots .$$

Eine Modification der gegebenen Regel tritt nur ein, wenn die Gleichung (25.), nämlich

$$f(m) = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0,$$

gleiche Wurzeln hat, d. h. wenn unter den Asymptoten etliche *zu einander parallel* sind; dann wird nach den vorstehenden Sätzen aus der Algebra auch

$$f'(m) = nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + (n-2)a_2 m^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

Der Werth von μ ist deshalb entweder nach Gleichung (31.) *unendlich*, d. h. die zugehörigen Asymptoten rücken in's Unendliche, oder es wird auch

$$bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + b_2 m^{n-3} + \cdots + b_{n-2} m + b_{n-1} = 0.$$

In diesem Falle wird V_1 gleich 0 für jeden beliebigen Werth von μ, so dass man den Werth (oder vielmehr die beiden Werthe) von μ erhält, indem man

$$V_2 = 0$$

setzt. Ist auch V_2 für jeden Werth von μ gleich 0, und gilt dasselbe für $V_3, \ldots V_{\alpha-1}$ (nicht aber für V_α), beginnt also die Entwickelung von $F(x, mx + \mu)$ nach fallenden Potenzen von x mit $V_\alpha x^{n-\alpha}$, so bestimme man μ so, dass auch

$$V_\alpha = 0$$

wird. Dies ist dann eine Gleichung α^{ten} Grades von μ, dem Umstande entsprechend, dass α Werthe von m einander gleich sind, die aber zu α verschiedenen (zu einander parallelen) Asymptoten gehören.

Am besten wird der Anfänger diese Angaben durch die Ausführung an einigen hier folgenden Beispielen verstehen.

§ 83.

Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Man soll die Asymptoten der *Hyperbel*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 82.)

Auflösung. Hier ist n gleich 2 und

$$\frac{U_2}{x^2} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2} = b^2 - a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2, \tag{2.}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = b^2 - a^2m^2 = 0, \tag{2a.}$$

Fig. 82.

also

$$m = \pm \frac{b}{a}. \tag{3.}$$

Die Gleichung der einen Asymptote ist daher

$$y' = \frac{b}{a}x' + \mu. \tag{4.}$$

Um auch noch den Werth von μ zu bestimmen, setze man y gleich $\frac{b}{a}x + \mu$ in die Gleichung (1.) ein. Dadurch erhält man

$$b^2x^2 - b^2x^2 - 2ab\mu x - a^2\mu^2 - a^2b^2 = 0,$$

und wenn man durch x dividirt,

$$-2ab\mu - \frac{a^2\mu^2 + a^2b^2}{x} = 0. \tag{5.}$$

Lässt man jetzt x unendlich gross werden, so folgt hieraus

$$-2ab\mu = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0. \tag{6.}$$

Die Gleichung der ersten Asymptote ist daher

$$y' = \frac{b}{a}x'; \tag{7.}$$

ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

$$y' = -\frac{b}{a}x'. \tag{8.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Asymptoten der *Parabel*

$$y^2 - 2px = 0 \tag{9.}$$

bestimmen.

Auflösung. Hier ist wieder $n = 2$ und

$$\frac{U_2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = m^2 = 0, \tag{10.}$$

also

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0. \tag{11.}$$

Für beide Asymptoten findet man eine Gleichung von der Form

$$y' = \mu. \tag{12.}$$

Um die zugehörigen Werthe von μ zu bestimmen, setzt man $y = \mu$ in die Gleichung (9.) ein und erhält

$$\mu^2 = 2px, \quad \mu_1 = +\sqrt{2px}, \quad \mu_2 = -\sqrt{2px}. \tag{13.}$$

Lässt man jetzt x in's Unbegrenzte wachsen, so wachsen auch μ_1 und μ_2 in's Unbegrenzte, d. h. die beiden Asymptoten rücken in's Unendliche.

Aufgabe 3. Man soll die Asymptoten der Curve

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{14.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 83.)

Auflösung. Bei dieser Curve, welche man „*Folium Cartesii*" nennt, ist n gleich 3 und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3, \tag{15.}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_3}{x^3} = 1 + m^3 = (1 + m)(1 - m + m^2) = 0, \tag{15a.}$$

also

$$m_1 = -1, \quad m_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad m_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Die beiden imaginären Werthe von m brauchen nicht berücksichtigt zu werden; die einzige reelle Asymptote erhält man, wenn man m gleich -1 setzt. Dadurch wird

$$y = -x + \mu,$$

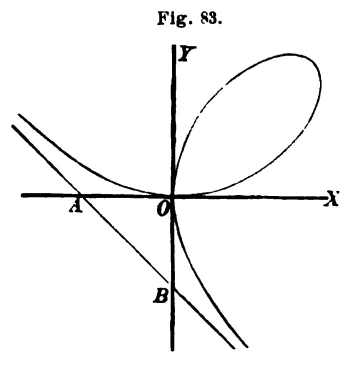
und Gleichung (14.) geht für diesen Werth von y über in

(16.) $$3\mu x^2 - 3\mu^2 x + \mu^3 + 3ax^2 - 3a\mu x = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch x^2 dividirt, findet man

$$3\mu + 3a - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{3a\mu}{x} + \frac{\mu^3}{x^2} = 0.$$

Fig. 83.



Wenn jetzt x unendlich gross wird, so erhält man

(17.) $$3\mu + 3a = 0,$$

oder

$$\mu = -a.$$

Die Gleichung der reellen Asymptote ist daher

(18.) $$y' = -x' - a,$$

oder

(18a.) $$x' + y' + a = 0.$$

Aufgabe 4. Man soll die Asymptoten der Curve

(19.) $$x^3 - 3xy^2 - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 84.)

Auflösung. Hier ist n gleich 3 und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^3} = 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

also

(20.) $$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 = 0, \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da m die Tangente des Winkels α ist, den die Gerade

$$y = mx + \mu$$

mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, und da

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist, so bilden die beiden Asymptoten, welche den gefundenen Werthen von m entsprechen, bezw. die Winkel $+30^0$ und -30^0 mit der positiven Richtung der X-Axe.

Setzt man nun

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x + \mu$$

in die Gleichung (19.) ein, so findet man

(21.) $$x^3 - x^3 - 2x^2\mu\sqrt{3} - 3x\mu^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$-2\mu\sqrt{3} - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{a^3}{x^2} = 0.$$

Wenn jetzt x unendlich gross wird, so folgt hieraus

(22.) $$-2\mu\sqrt{3} = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0.$$

Die erste Asymptote hat daher die Gleichung

(23.) $$y'\sqrt{3} = x'.$$

Ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

(24.) $$y'\sqrt{3} = -x'.$$

Um noch die dritte Asymptote zu erhalten, bilde man

$$\frac{U_3}{y^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dies giebt

(25.) $$\lim \frac{U_3}{y^3} = l^3 - 3l = 0.$$

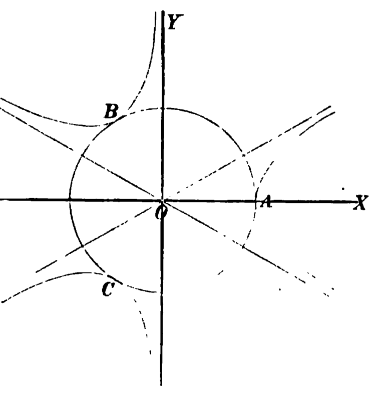


Fig. 84.

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind

(26.) $l = +\sqrt{3}$, $l = -\sqrt{3}$, $l = 0$.

Wie man ohne Weiteres erkennt, führen die beiden ersten Werthe auf die schon bekannten Asymptoten; dagegen liefert $l = 0$ eine dritte Asymptote. Man muss daher

$$x = \lambda$$

in die Gleichung (19.) einsetzen und erhält dadurch

$$\lambda^3 - 3\lambda y^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$\frac{\lambda^3}{y^2} - 3\lambda - \frac{a^3}{y^2} = 0.$$

Lässt man jetzt y unendlich gross werden, so folgt hieraus, dass

(27.) $$\lambda = 0$$

wird, und dass die dritte Asymptote die Gleichung

(28.) $$x' = 0$$

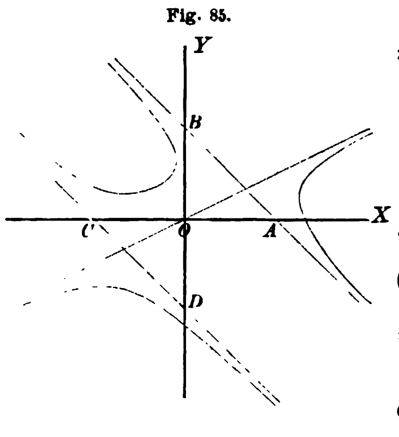
hat. Dies ist aber die Gleichung der Y-Axe.

Aufgabe 5. Man soll die Asymptoten der Curve

(29.) $$x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) - 3xy^2 - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 85.)

Fig. 85.



Auflösung. Hier ist wieder n gleich 3 und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 2y^3 - 3xy^2}{x^3}$$

$$= 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3,$$

also

(30.) $$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 - 2m^3$$

$$= (1 + m)(1 + m)(1 - 2m) = 0.$$

Die 3 Wurzeln dieser Gleichung sind daher

(31.) $$m_1 = -1, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = +\frac{1}{2}.$$

Bei dieser Curve findet man zwei *parallele* Asymptoten, weil zwei Werthe von m einander gleich sind. Um die zugehörigen Werthe von μ zu finden, setze man

$$y = -x + \mu$$

in die Gleichung (29.) ein. Dadurch erhält man

$$x(x^2-a^2)+2(x-\mu)(x^2-2\mu x+\mu^2-a^2)-3x(x^2-2\mu x+\mu^2)-a^3=0,$$

oder

(32.) $$(-3a^2 + 3\mu^2)x - 2\mu^3 + 2a^2\mu - a^3 = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch x dividirt und x dann unendlich gross werden lässt, findet man

(33.) $$-3a^2 + 3\mu^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = \pm a.$$

Die beiden entsprechenden Asymptoten haben daher die Gleichungen

(34.) $$y' = -x' + a \quad \text{und} \quad y' = -x' - a.$$

Für die dritte Asymptote hat man

$$y = \frac{1}{2}x + \mu$$

in die Gleichung (29.) einzusetzen. Dadurch erhält man

(35.) $$-\frac{9}{2}\mu x^2 - 6\mu^2 x - 2\mu^3 + 2a^2\mu - a^3 = 0.$$

Indem man diese Gleichung durch x^2 dividirt und dann x unendlich gross werden lässt, findet man

(36.) $$\mu = 0,$$

so dass die dritte Asymptote die Gleichung

(37.) $$2y' = x'$$

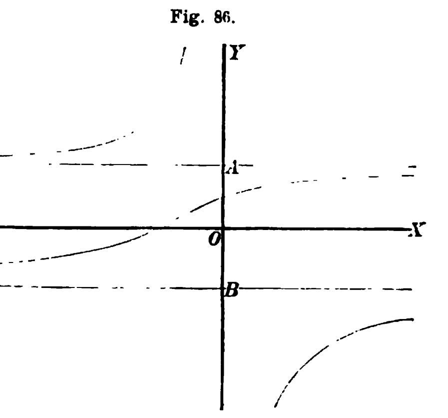
besitzt.

Aufgabe 6. Man soll die Asymptoten der Curve

(38.) $$xy^2 - x + 2y - 1 = 0$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 86.)

Fig. 86.



Auflösung. Hier ist wieder $n = 3$ und

$$\frac{U_3}{x^3} = \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = m^2 = 0, \quad m_1 = 0,$$

$$m_2 = 0, \quad m_3 = \infty.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten haben daher die Form

(39.) $$y' = \mu_1, \quad y' = \mu_2, \quad x' = \lambda.$$

Dabei findet man μ_1 und μ_2, indem man $y = \mu$ in die Gleichung (38.) einsetzt. Dies giebt

$$x\mu^2 - x + 2\mu - 1 = 0,$$

oder

$$\mu^2 - 1 + \frac{2\mu - 1}{x} = 0,$$

und für $\lim x = \infty$

(40.) $$\mu^2 = 1,$$

(41.) $$\mu_1 = +1, \quad \mu_2 = -1.$$

Ebenso findet man λ, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung der Curve einsetzt. Dadurch erhält man

(42.) $$\lambda y^2 - \lambda + 2y - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda + \frac{2}{y} - \frac{\lambda + 1}{y^2} = 0,$$

und für $\lim y = \infty$

(43.) $$\lambda = 0.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten sind daher

(44.) $$y' = +1, \quad y' = -1, \quad x' = 0.$$

Aufgabe 7. Man soll die Asymptoten der Curve

(45.) $$xy^2 + x^2y - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 87.)

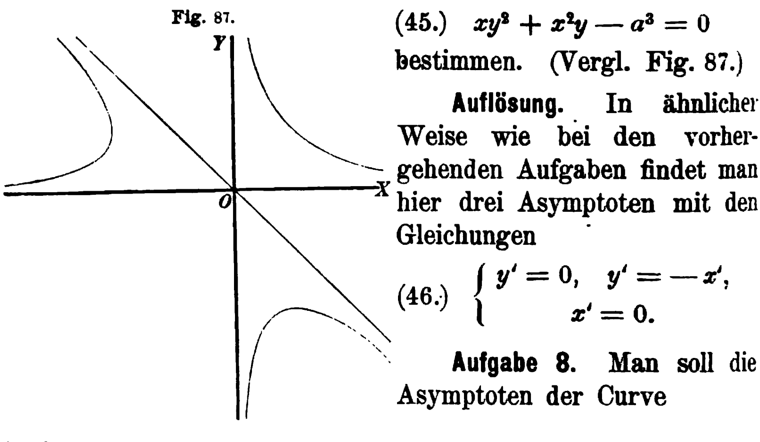


Fig. 87.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Aufgaben findet man hier drei Asymptoten mit den Gleichungen

(46.) $$\begin{cases} y' = 0, \quad y' = -x', \\ x' = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 8. Man soll die Asymptoten der Curve

(47.) $$x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 88.)

Auflösung. Hier werden zwei Asymptoten imaginär, weil aus der Gleichung

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = \lim\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0$$

folgt, dass

$$m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty$$

wird. Die dritte Asymptote ist reell und steht auf der X-Axe senkrecht. Dabei findet man aus Gleichung (47.), indem man $x = \lambda$ setzt,

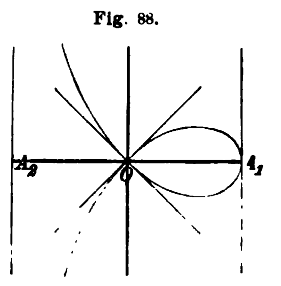


Fig. 88.

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - a\lambda^2 + ay^2 = 0,$$

oder

$$\lambda + a + \frac{\lambda^3 - a\lambda^2}{y^2} = 0.$$

Dies giebt für $\lim y = \infty$

(48.) $$\lambda = -a;$$

die einzige reelle Asymptote hat daher die Gleichung

(49.) $$x' + a = 0.$$

Die Gleichung (47.) kann man auf die Form

(50.) $$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x}$$

bringen, woraus man erkennt, dass die X-Axe eine Symmetrie-Axe der Curve ist, und dass die Curve zwischen der Asymptote $x' = -a$ und der Geraden $x' = +a$ liegt. Aus

(51.) $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 - ax - x^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{tg}\alpha$$

folgt, indem man $x = 0$ setzt, dass die beiden Tangenten im Nullpunkte die Winkel $+45^0$ und -45^0 mit der positiven Richtung der X-Axe bilden. (Vergl. Fig. 88.)

Aufgabe 9. Man soll die Gleichung der *Cissoide* des *Diokles* bestimmen. (Vergl. Fig. 89.)

Auflösung. Die Cissoide des Diokles entsteht, indem man an einen Kreis mit dem Halbmesser a zwei parallele Tangenten mit den Berührungspunkten O und A legt, von O aus eine beliebige Secante zieht, welche den Kreis zum zweiten Male im Punkte C und die andere Tangente im Punkte B schneiden möge, und von B aus die Sehne OC rückwärts auf der Secante abträgt, so dass

$$PB = OC$$

wird, dann ist P ein Punkt der Cissoide.

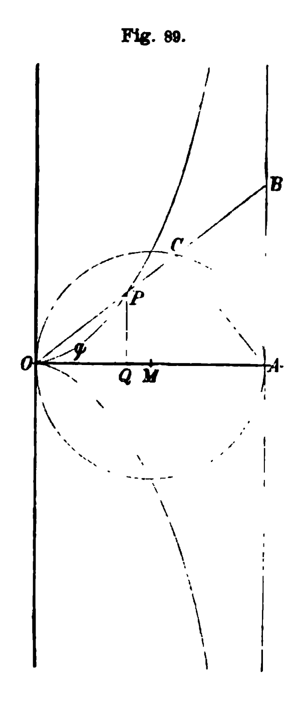


Fig. 89.

Bezeichnet man den Winkel AOP mit φ und die Strecke OP mit r, so findet man aus den rechtwinkligen Dreiecken OAB und OCA

$$(52.)\quad OB = \frac{2a}{\cos\varphi}, \quad OC = 2a\cos\varphi,$$

also

$$(53.)\quad OP = r = OB - OC = \frac{2a}{\cos\varphi}(1 - \cos^2\varphi),$$

oder

$$(53a.)\quad r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

Daraus folgt, da

$$OQ = r\cos\varphi, \quad QP = r\sin\varphi$$

ist,

$$(54.)\quad x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}.$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen φ eliminirt, erhält man

$$(55.)\quad x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0.$$

Aufgabe 10. Man soll die Asymptoten der Cissoide bestimmen.

Auflösung. Schon aus der Entstehung der Cissoide ergiebt sich, dass die Kreis-Tangente AB (vergl. Fig. 89) eine Asymptote der Cissoide sein muss. Dasselbe Resultat findet man auch aus der Rechnung. Es ist nämlich

$$(56.)\quad \lim\frac{U_3}{x^3} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0,$$

also

$$(57.)\quad m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty,$$

d. h. zwei Asymptoten sind imaginär, nur die dritte ist reell und steht auf der X-Axe senkrecht. Dabei findet man, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung (55.) einsetzt,

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - 2ay^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda - 2a + \frac{\lambda^3}{y^2} = 0.$$

Dies giebt für $\lim y = \infty$

(58.) $$\lambda = 2a;$$

folglich hat die reelle Asymptote die Gleichung

(59.) $$x' = 2a.$$

§ 84.
Concavität, Convexität, Wendepunkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 103 und 104.)

Erklärung. Legt man in einem Punkte P an eine Curve die Tangente, so heisst die Curve in diesem Punkte P nach oben *concav*, wenn die dem Berührungspunkte P benachbarten Curvenpunkte *oberhalb* der Tangente liegen. (Vergl. Fig. 90.)

Fig. 90.

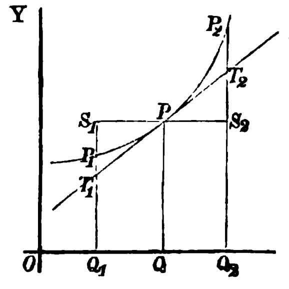
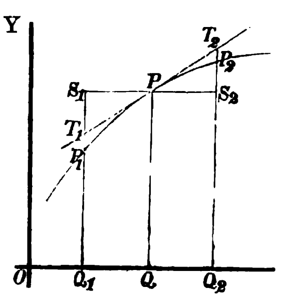


Fig. 91.



Dagegen ist die Curve im Punkte P nach oben *convex* (vergl. Fig. 91), wenn die dem Berührungspunkte P benachbarten Punkte *unterhalb* der Tangente liegen.

Wenn endlich die Curve im Punkte P von der Concavität in die Convexität übergeht (vergl. Fig. 92), oder wenn die Curve

Fig. 92.

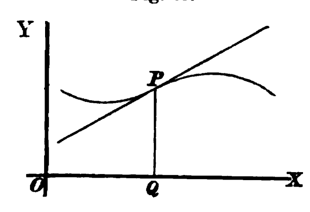
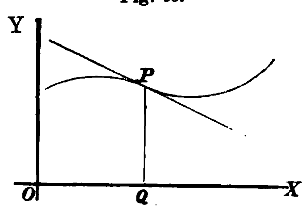


Fig. 93.



m Punkte P aus der Convexität in die Concavität übergeht vergl. Fig. 93), so heisst der Punkt P ein „*Wendepunkt*". Die

Tangente in einem solchen Punkte heisst „*Wendetangente*“. Bei einer Wendetangente muss daher die Curve auf der einen Seite des Berührungspunktes *oberhalb*, auf der anderen Seite des Berührungspunktes *unterhalb* der Tangente liegen, wobei natürlich nur die benachbarten Theile der Curve in Frage kommen.

Die Gleichung einer Curve (Fig. 90) sei

$$y = f(x), \tag{1.}$$

und die Curve sei in der Nähe des Punktes P nach oben *concav*, dann ist nach der vorstehenden Erklärung

$$T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 > 0$$

und auch

$$T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 > 0,$$

wobei P_1 und P_2 die dem Berührungspunkte P benachbarten Curvenpunkte mit den Abscissen $x - a$ und $x + a$ sind, und wo die Schnittpunkte der Ordinaten Q_1P_1 und Q_2P_2 mit der Tangente T_1 und T_2 heissen.

Nun ist nach Formel Nr. 49 der Tabelle

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x+\Theta h)}{2!}h^2, \tag{2.}$$

also für $h = +a$

$$Q_2P_2 = f(x+a) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}a + \frac{f''(x+\Theta a)}{2!}a^2; \tag{2a.}$$

ausserdem wird

$$Q_2T_2 = QP + S_2T_2 = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}a, \tag{3.}$$

weil in dem rechtwinkligen Dreieck PS_2T_2

$$S_2T_2 = PS_2 . \operatorname{tg} S_2PT_2 = a \operatorname{tg} \alpha = af'(x)$$

ist. Durch Subtraction der Gleichungen (2a.) und (3.) von einander erhält man daher

$$T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 = \frac{a^2}{2}f''(x+\Theta a). \tag{4.}$$

In ähnlicher Weise findet man, wenn man in Gleichung (2.) $h = -a$ setzt,

$$(5.)\quad Q_1P_1 = f(x-a) = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}a + \frac{f''(x-\Theta_1 a)}{2!}a^2,$$

$$(6.)\quad Q_1T_1 = QP - T_1S_1 = f(x) - \frac{f'(x)}{1!}a,$$

$$(7.)\quad T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 = \frac{a^2}{2}f''(x-\Theta_1 a).$$

Damit die Curve nach oben *concav* ist, müssen für hinreichend kleine Werthe von a die Strecken T_2P_2 und T_1P_1 *positive* Richtung haben. Das ist nur möglich, wenn $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ beide *positiv* sind.

Unter der Voraussetzung, dass $f''(x)$ für die betrachteten Werthe von x *stetig* ist, muss deshalb auch $f''(x)$ *positiv* sein, und umgekehrt: ist $f''(x)$ positiv, so werden auch $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ für hinreichende kleine Werthe von a positiv sein.

Die Curve ist daher im Punkte P nach oben concav, wenn

$$(8.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0.$$

Die Gleichung einer Curve (Fig. 91) sei wieder

$$y = f(x),$$

die Curve sei jetzt aber in der Nähe des Punktes P nach oben *convex*, dann ist nach der vorstehenden Erklärung

$$P_2T_2 = Q_2T_2 - Q_2P_2 > 0, \quad \text{oder} \quad T_2P_2 = Q_2P_2 - Q_2T_2 < 0$$

und auch

$$P_1T_1 = Q_1T_1 - Q_1P_1 > 0, \quad \text{oder} \quad T_1P_1 = Q_1P_1 - Q_1T_1 < 0,$$

wobei dieselben Bezeichnungen angewendet sind wie in Fig. 90. Daraus ergiebt sich genau ebenso wie vorhin

$$(9.)\quad T_2P_2 = \frac{a^2}{2}f''(x+\Theta a), \quad T_1P_1 = \frac{a^2}{2}f''(x-\Theta_1 a).$$

Damit die Curve nach oben *convex* ist, müssen für hinreichend kleine Werthe von a die Strecken T_2P_2 und T_1P_1 *negative* Richtung haben. Das ist nur möglich, wenn $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ beide *negativ* sind.

Unter der Voraussetzung, dass $f''(x)$ für die betrachteten Werthe von x *stetig* ist, muss deshalb auch $f''(x)$ *negativ* sein,

und umgekehrt: ist $f''(x)$ negativ, so werden auch $f''(x+\Theta a)$ und $f''(x-\Theta_1 a)$ für hinreichend kleine Werthe von a negativ sein.

Die Curve ist daher im Punkte P nach oben convex, wenn

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)<0. \tag{10.}$$

In dem Vorhergehenden sind die Fälle, wo

$$f''(x)=0 \quad \text{oder} \quad f''(x)=\infty$$

wird, ausgeschlossen worden. Beide Fälle können im Allgemeinen nur für *einzelne* Werthe von x eintreten. Ist x ein solcher Werth, so hat man noch die Vorzeichen von $f''(x-a)$ und $f''(x+a)$ für hinreichend kleine Werthe von a zu untersuchen und danach die folgenden 8 Fälle zu unterscheiden:

I. $f''(x)=0,\quad f''(x-a)>0,\quad f''(x+a)<0.$

In diesem Falle geht die Curve im Punkte P (vergl. Fig. 92) von der Concavität zur Convexität über. Dasselbe gilt auch, wenn

II. $f''(x)=\infty,\quad f''(x-a)>0,\quad f''(x+a)<0$ (vergl. Fig. 92).

Wird dagegen

III. $f''(x)=0,\quad f''(x-a)<0,\quad f''(x+a)>0$ (vergl. Fig. 93),

oder

IV. $f''(x)=\infty,\quad f''(x-a)<0,\quad f''(x+a)>0$ (vergl. Fig. 93),

so geht die Curve von der Convexität zur Concavität über.

In allen diesen Fällen heisst der Punkt P ein *Wendepunkt*, weil sich die Curve von der Concavität zur Convexität oder von der Convexität zur Concavität *wendet*.

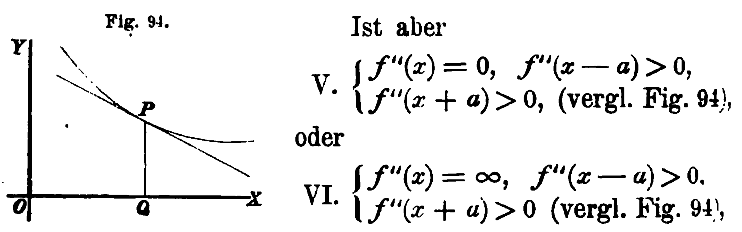


Fig. 94.

Ist aber

V. $\begin{cases} f''(x)=0, & f''(x-a)>0, \\ f''(x+a)>0, & \text{(vergl. Fig. 94)}, \end{cases}$

oder

VI. $\begin{cases} f''(x)=\infty, & f''(x-a)>0, \\ f''(x+a)>0 & \text{(vergl. Fig. 94)}, \end{cases}$

so ist die Curve unmittelbar *vor* dem Punkte P und ebenso unmittelbar *nach* dem Punkte P nach oben concav; sie hat daher im Punkte P *keinen* Wendepunkt.

Ist endlich

VII. $f''(x) = 0, \quad f''(x-a) < 0, \quad f''(x+a) < 0$ (vergl. Fig. 95),

oder

VIII. $f''(x) = \infty, f''(x-a) < 0, \quad f''(x+a) < 0$ (vergl. Fig. 95),

so ist die Curve unmittelbar *vor* dem Punkte P und ebenso unmittelbar *nach* dem Punkte P nach oben convex, so dass auch hier der Punkt P kein Wendepunkt ist.

Fig. 95.

Daraus ergiebt sich jetzt die allgemeine Regel für die Aufsuchung der etwaigen Wendepunkte einer Curve

$$y = f(x).$$

Man ermittele die Werthe von x, für welche $f''(x)$ gleich Null oder unendlich gross wird. Ist x ein solcher Werth, so untersuche man das Vorzeichen von $f''(x-a)$ und von $f''(x+a)$ für hinreichend kleine Werthe von a. Man erhält dann einen Wendepunkt, wenn entweder

$$f''(x-a) > 0, \quad \textit{und} \quad f''(x+a) < 0,$$

oder wenn

$$f''(x-a) < 0 \quad \textit{und} \quad f''(x+a) > 0;$$

und zwar geht die Curve im ersten Falle in diesem Wendepunkte von der Concavität zur Convexität und im zweiten Falle von der Convexität zur Concavität über.

Haben dagegen $f''(x-a)$ und $f''(x+a)$ für hinreichend kleine Werthe von a dasselbe Zeichen, so ist der Punkt *kein* Wendepunkt.

Bemerkung.

Es möge hierbei noch besonders hervorgehoben werden, dass sich die vorstehenden Betrachtungen nur auf Punkte der Curve beziehen, welche im Endlichen liegen.

§ 85.
Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve

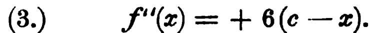
(1.) $$y = b + (c - x)^3 = f(x)$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 96.)

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

Fig. 96.

(2.) $$f'(x) = -3(c - x)^2,$$



(3.) $$f''(x) = +6(c - x).$$

Aus Gleichung (3.) erkennt man, dass es keinen endlichen Werth von x giebt, für den $f''(x) = \infty$ wird. Dagegen wird $f''(x) = 0$ für

(4.) $$x = c.$$

Der Punkt P, dessen Abscisse gleich c ist, kann also möglicher Weise ein Wendepunkt sein. Um darüber zu entscheiden, beachte man, dass

(5.) $$f''(c - a) = +6a > 0, \quad f''(c + a) = -6a < 0$$

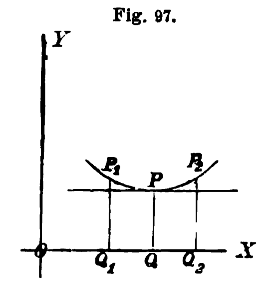
ist. Es findet also im Punkte P ein Uebergang von der Concavität zur Convexität statt; folglich ist P ein Wendepunkt. (Vergl. Fig. 96.)

Aufgabe 2. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve

(6.) $$y = b + (x - c)^4 = f(x)$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 97.)

Fig. 97.



Auflösung. Aus Gleichung (6.) folgt

(7.) $$f'(x) = 4(x - c)^3,$$

(8.) $$f''(x) = 12(x - c)^2.$$

Auch hier giebt es keinen endlichen Werth von x, für welchen $f''(x) = \infty$ wird. Dagegen wird $f''(x) = 0$ für

(9.) $$x = c.$$

Für diesen Werth von x kann man möglicher Weise einen Wendepunkt erhalten. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f''(c-a) = +12a^2 > 0 \quad \text{und} \quad f''(c+a) = +12a^2 > 0, \tag{10.}$$

folglich ist die Curve auf beiden Seiten des betrachteten Punktes P nach oben concav, so dass dieser Punkt *kein* Wendepunkt sein kann. (Vergl. Fig. 97.)

Aufgabe 3. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve

$$y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^2} = f(x) \tag{11.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 98.)

Auflösung. Aus Gleichung (11.) folgt

$$f'(x) = -\frac{2b}{5}(x-c)^{-\frac{3}{5}}, \tag{12.}$$

$$f''(x) = +\frac{6b}{25}(x-c)^{-\frac{8}{5}} = \frac{6b}{25\sqrt[5]{(x-c)^8}}. \tag{13.}$$

Hieraus erkennt man, dass $f''(x)$ für keinen endlichen Werth von x gleich Null wird, dagegen wird

$$f''(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c. \tag{14.}$$

Dieser Werth von x kann also möglicher Weise einen Wendepunkt liefern. Um darüber zu entscheiden, bilde man

$$f''(c-a) = \frac{6b}{25\sqrt[5]{a^8}} > 0 \tag{15.}$$

und

$$f''(c+a) = \frac{6b}{25\sqrt[5]{a^8}} > 0, \tag{15a.}$$

wobei man b als positiv vorausgesetzt hat. Die Curve ist also zu beiden

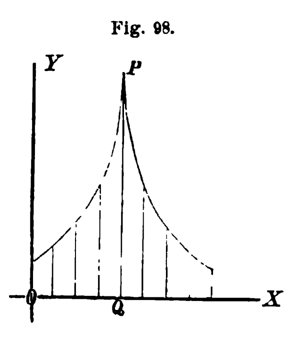
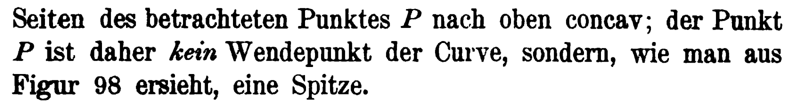


Fig. 98.



Seiten des betrachteten Punktes P nach oben concav; der Punkt P ist daher *kein* Wendepunkt der Curve, sondern, wie man aus Figur 98 ersieht, eine Spitze.

Aufgabe 4. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve

$$y = m - b\sqrt[5]{(x-c)^3} = f(x) \tag{16.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus Gleichung (16.) folgt

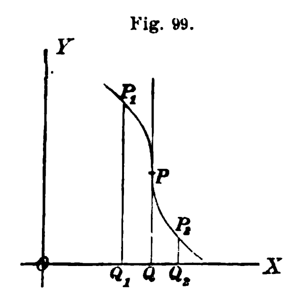
$$f'(x) = -\frac{3b}{5}(x-c)^{-\frac{2}{5}}, \tag{17.}$$

$$f''(x) = +\frac{6b}{25}(x-c)^{-\frac{7}{5}} = \frac{6b}{25\sqrt[5]{(x-c)^7}}. \tag{18.}$$

Auch hier wird $f''(x)$ für keinen endlichen Werth von x gleich Null, dagegen wird

$$f''(x) = \infty \quad \text{für} \quad x = c. \tag{19.}$$

Fig. 99.



Um zu entscheiden, ob dieser Werth von x wirklich einen Wendepunkt liefert, bilde man

$$f''(c-a) = \frac{-6b}{25\sqrt[5]{a^7}} < 0$$

und

$$f''(c+a) = \frac{+6b}{25\sqrt[5]{a^7}} > 0.$$

Daraus erkennt man, dass im Punkte P mit den Coordinaten

$$x = c, \quad y = m \tag{20.}$$

eine Wendung von der Convexität zur Concavität stattfindet, dass also der Punkt P ein Wendepunkt ist. (Vergl. Fig. 99.)

Aufgabe 5. Man soll die etwaigen Wendepunkte der Curve

$$y = \frac{b^2(b-x)}{b^2+x^2} = f(x) \tag{21.}$$

bestimmen.

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (21.)

$$f'(x) = \frac{b^2(x^2-2bx-b^2)}{(x^2+b^2)^2}, \tag{22.}$$

$$f''(x) = \frac{-2b^2(x^3-3bx^2-3b^2x+b^3)}{(x^2+b^2)^3}. \tag{23.}$$

Hier kann $f''(x)$ für keinen endlichen, reellen Werth von x unendlich gross werden. Dagegen wird $f''(x)$ gleich Null, wenn

$$(24.)\quad x^3 - 3bx^2 - 3b^2x + b^3 = (x+b)(x^2 - 4bx + b^2) = 0$$

wird. Die Werthe von x, für welche möglicher Weise ein Wendepunkt eintritt, sind daher

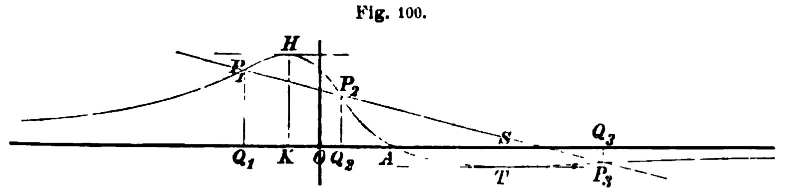
$$(25.)\quad x_1 = -b,\quad x_2 = b(2-\sqrt{3}),\quad x_3 = b(2+\sqrt{3}),$$

welche beziehungsweise den Werthen

$$(26.)\quad y_1 = +b,\quad y_2 = \frac{b}{4}(1+\sqrt{3}),\quad y_3 = \frac{b}{4}(1-\sqrt{3})$$

entsprechen.

Fig. 100.



Da $x^2 + b^2$ für reelle Werthe von x immer positiv ist, so braucht man nur zu untersuchen, ob

$$(27.)\quad (x^2+b^2)^3 f''(x) = -2b^2(x+b)(x^2-4bx+b^2) = F(x)$$

für die angegebenen Werthe von x das Vorzeichen wechselt.

Zunächst ist für hinreichend kleine Werthe von a

$$(28.)\quad \begin{cases} F(-b-a) = +2ab^2(6b^2+6ab+a^2) > 0, \\ F(-b+a) = -2ab^2(6b^2-6ab+a^2) < 0; \end{cases}$$

deshalb ist der Punkt P_1 mit den Coordinaten x_1, y_1 ein Wendepunkt, in welchem die Curve von der Concavität zur Convexität übergeht.

Ferner ist für hinreichend kleine Werthe von a

$$(29.)\quad \begin{cases} F(2b-b\sqrt{3}-a) = -2ab^2(3b-b\sqrt{3}-a)(2b\sqrt{3}+a) < 0, \\ F(2b-b\sqrt{3}+a) = +2ab^2(3b-b\sqrt{3}+a)(2b\sqrt{3}-a) > 0, \end{cases}$$

folglich ist auch der Punkt P_2 mit den Coordinaten x_2, y_2 ein Wendepunkt, in welchem die Curve von der Convexität zur Concavität übergeht.

Endlich ist noch für hinreichend kleine Werthe von a

$$(30.)\quad \begin{cases} F(2b+b\sqrt{3}-a)=+2ab^2(3b+b\sqrt{3}-a)(2b\sqrt{3}-a)>0, \\ F(2b+b\sqrt{3}+a)=-2ab^2(3b+b\sqrt{3}+a)(2b\sqrt{3}+a)<0, \end{cases}$$

folglich ist der Punkt P_3 mit den Coordinaten x_3, y_3 gleichfalls ein Wendepunkt, in welchem die Curve von der Concavität zur Convexität übergeht.

Es ist dabei noch zu beachten, dass die drei Wendepunkte P_1, P_2, P_3 in einer geraden Linie liegen, weil

$$(31.)\qquad x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$$

wird. (Vergl. Fig. 100.)

Aufgabe 6. Man soll untersuchen, in welchen Punkten die *Parabel* nach oben *concav*, und in welchen Punkten sie nach oben *convex* ist.

Fig. 101.

Auflösung. Die Gleichung der Parabel ist

$$(32.)\qquad y^2 = 2px;$$

daraus folgt

$$(33.)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{y^3}.$$

Für positive Werthe von y wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, und für negative Werthe von y wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv. Die obere Hälfte der Curve ist daher nach oben *convex*, und die untere Hälfte ist nach oben *concav*. Einen Wendepunkt besitzt die Curve nicht, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für endliche Werthe von y niemals verschwinden kann.

Aufgabe 7. Man soll untersuchen, in welchen Punkten die *Ellipse* und die *Hyperbel* nach oben *concav*, und in welchen Punkten sie nach oben *convex* sind.

Auflösung. Die Gleichung der Ellipse ist

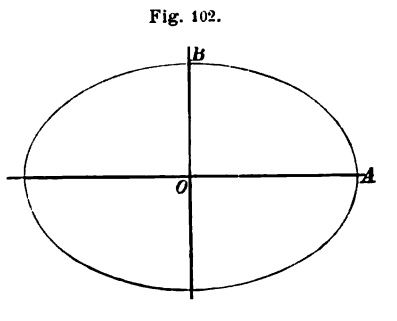
$$(34.)\qquad b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0;$$

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}. \tag{35.}$$

Auch hier wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ für positive Werthe von y und positiv für negative Werthe von y. Die obere Hälfte der Curve ist daher nach oben *convex* und die untere Hälfte der Curve ist nach oben *concav* (Fig. 102). Einen Wendepunkt besitzt die Curve nicht, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für endliche Werthe von x und y niemals verschwinden kann.

Fig. 102.



In ähnlicher Weise erhält man bei der Hyperbel die Gleichungen

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \tag{36.}$$

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3} \tag{37.}$$

und kann daraus dieselben Schlüsse ziehen wie bei der Ellipse.

Aufgabe 8. Man soll die Wendepunkte der *Sinuslinie* bestimmen. (Vergl. Fig. 103.)

Auflösung. Die Sinuslinie hat die Gleichung

$$y = \sin x; \tag{38.}$$

Fig. 103.

daraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x. \tag{39.}$$

Die Curve ist daher nach oben *convex*, wenn $0 < x < \pi$, $2\pi < x < 3\pi, \ldots$ allgemein, wenn

$$2n\pi < x < (2n + 1)\pi$$

ist; und die Curve ist nach oben *concav*, wenn

$$(2n + 1)\pi < x < (2n + 2)\pi$$

ist, wobei n eine positive oder negative *ganze* Zahl bedeuten soll. Ein Wendepunkt tritt ein, wenn

$$x = 0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \ldots$$

ist; die zugehörigen Werthe von y sind sämmtlich gleich 0, d. h. *die Wendepunkte liegen alle in der X-Axe.*

§ 86.

Berührung (oder Osculation) n^{ter} Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 105.)

Erklärung. *Zwei Curven VW und RS* (Fig. 104) *mit den Gleichungen*

(1.) $$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x)$$

haben in dem ihnen gemeinschaftlichen Punkte P eine Berührung (oder Osculation) n^{ter} Ordnung, wenn für den zugehörigen Werth von x nicht nur

(2.) $$f(x) = g(x)$$

ist, sondern ausserdem auch noch

(3.) $$f'(x) = g'(x), \quad f''(x) = g''(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

Fig. 104.

Mit welchem Rechte diese Erklärung aufgestellt worden ist, ersieht man aus dem folgenden Satze:

Zwei Curven

$$y = f(x) \quad \text{und} \quad y = g(x),$$

welche im Punkte P eine Berührung n^{ter} Ordnung haben, schmiegen sich in diesem Punkte enger an einander an als an jede andere Curve, mit der sie im Punkte P keine Berührung von gleich hoher Ordnung haben.

Beweis. Nach Formel Nr. 49 der Tabelle ist

$$(4.)\quad \begin{cases} Q_1P_1 = f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots \\ \qquad + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \end{cases}$$

gleichviel, ob h positiv oder negativ ist. Ebenso wird

$$(5.)\quad Q_1P'_1 = g(x+h) = g(x) + \frac{g'(x)}{1!}h + \frac{g''(x)}{2!}h^2 + \cdots$$
$$+ \frac{g^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{g^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

folglich ist, weil nach Voraussetzung die Gleichungen (2.) und (3.) gelten,

$$(6.)\quad \begin{cases} P_1P'_1 = g(x+h) - f(x+h) \\ \qquad = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[g^{(n+1)}(x+\Theta_1 h) - f^{(n+1)}(x+\Theta h)]. \end{cases}$$

Da h eine beliebig kleine, positive oder negative Grösse ist, so wird $P_1P'_1$ eine beliebig kleine Grösse von der $(n+1)^{ten}$ Ordnung.

Wenn man nun mit diesen beiden Curven noch eine dritte Curve

$$y = \varphi(x)$$

zusammenstellt, welche mit der Curve

$$y = f(x)$$

im Punkte P nur eine Berührung von der m^{ten} Ordnung hat, wobei $m < n$ vorausgesetzt wird, so ist für den betrachteten Werth von x

$$(7.)\quad f(x) = \varphi(x),\quad f'(x) = \varphi'(x), \ldots\quad f^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x),$$

aber

$$(8.)\quad f^{(m+1)}(x) \gtrless \varphi^{(m+1)}(x),$$

so dass für hinreichend kleine Werthe von h auch

$$f^{(m+1)}(x+\Theta_2 h) \gtrless \varphi^{(m+1)}(x+\Theta_3 h)$$

ist. Man findet dann in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi(x+h) - f(x+h) \\ \qquad = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}[\varphi^{(m+1)}(x+\Theta_3 h) - f^{(m+1)}(x+\Theta_2 h)]. \end{cases}$$

Diese Differenz wird nur beliebig klein von der $(m + 1)^{ten}$ Ordnung, weil der Ausdruck in der eckigen Klammer eine endliche (von Null verschiedene) Grösse ist. Deshalb wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$(10.)\quad P_1P'_1 = g(x + h) - f(x + h) < \varphi(x + h) - f(x + h),$$

d. h. die Curven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schmiegen sich im Punkte P enger an einander an als die Curven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$.

§ 87.

Anwendungen auf einzelne Curven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 106 und 107.)

Aufgabe 1. Man soll durch den Punkt P einer Curve mit der Gleichung

$$(1.)\quad y = f(x)$$

eine gerade Linie legen, welche mit der Curve eine Berührung von möglichst hoher Ordnung hat.

Auflösung. Die Gleichung der geraden Linie sei

$$(2.)\quad y' = mx' + \mu,$$

wobei die laufenden Coordinaten mit x' und y' bezeichnet sind, weil die Coordinaten des Berührungspunktes x und y heissen sollen. Damit nun die Gerade durch den Punkt P geht, muss

$$(3.)\quad y = f(x) = mx + \mu$$

sein. In diesem Falle ist also $g(x)$ gleich $mx + \mu$, so dass die Gleichung $f'(x) = g'(x)$ hier die Form hat

$$(4.)\quad \frac{dy}{dx} = m.$$

Man hat hier nur über die beiden Grössen m und μ zu verfügen, und zwar sind diese Grössen schon durch die Gleichungen (3.) und (4.) vollständig bestimmt, denn es wird

$$(5.)\quad m = \frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \mu = y - mx = y - x\frac{dy}{dx},$$

so dass die Gleichung (2.) übergeht in

$$(6.)\quad y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Dies ist aber die Gleichung der *Tangente.*

Die Tangente ist daher diejenige Gerade, welche sich im Punkte P der Curve am engsten anschmiegt. Da ausserdem jede Gerade in allen ihren Punkten dieselbe Richtung hat, so giebt die Tangente in dem betrachteten Punkte die Richtung der Curve an.

Aus dem Vorstehenden erkennt man auch, dass die Tangente mit der Curve im Allgemeinen nur eine Berührung *erster* Ordnung hat. Man kann aber sogleich die Bedingung angeben, unter welcher die Berührung eine Berührung von der *zweiten* Ordnung wird. Es ist hier nämlich

$$g(x) = mx + \mu, \quad g'(x) = m, \quad g''(x) = 0, \tag{7.}$$

folglich muss auch

$$f''(x) = 0 \tag{8.}$$

sein, damit die Berührung höher als von der *ersten* Ordnung ist.

Diese Bedingung ist nur für einzelne Punkte der Curve erfüllt, und zwar sind diese Punkte (nach Formel Nr. 104 der Tabelle) *Wendepunkte*, wenn $f''(x)$ für den betrachteten Werth von x das Vorzeichen wechselt.

Aufgabe 2. Man soll die Gleichung eines Kreises bestimmen, der im Punkte P mit der Curve

$$y = f(x) \tag{9.}$$

eine Berührung von möglichst hoher Ordnung besitzt.

Auflösung. Ein Kreis mit dem Halbmesser ϱ hat, wenn man die laufenden Coordinaten mit x', y' bezeichnet, bekanntlich die Gleichung

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{10.}$$

wobei ξ und η die Coordinaten seines Mittelpunktes sind. Löst man die Gleichung in Bezug auf y' auf und setzt $x' = x$, so erhält man

$$y' = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \xi)^2} = g(x). \tag{10a.}$$

In der Gleichung des Kreises kommen also *drei* willkürliche Constante ξ, η und ϱ vor, über die man so verfügen kann, dass

drei Bedingungen erfüllt sind. Deshalb ist es möglich, die drei Gleichungen

$$f(x) = g(x) = \eta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x-\xi)^2} = y, \tag{11.}$$

$$f'(x) = g'(x) = \mp \frac{x-\xi}{\sqrt{\varrho^2 - (x-\xi)^2}} = -\frac{x-\xi}{y-\eta}, \tag{12.}$$

$$f''(x) = g''(x) = \pm \frac{\varrho^2}{[\varrho^2 - (x-\xi)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\varrho^2}{(y-\eta)^3} \; {}^{*)} \tag{13.}$$

durch passende Bestimmung von ξ, η und ϱ zu befriedigen. Dabei sind x und y die Coordinaten des Berührungspunktes. Aus den Gleichungen (12.) und (10.) findet man

$$x - \xi = -(y-\eta)f'(x), \tag{14.}$$

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (y-\eta)^2[1 + f'(x)^2], \tag{15.}$$

so dass Gleichung (13.) übergeht in

$$f''(x) = -\frac{1 + f'(x)^2}{y-\eta}.$$

Deshalb ist

$$y - \eta = -\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}, \tag{16.}$$

$$x - \xi = -(y-\eta)f'(x) = \frac{[1 + f'(x)^2]f'(x)}{f''(x)}, \tag{17.}$$

$$\varrho^2 = \frac{[1 + f'(x)^2]^3}{f''(x)^2}; \tag{18.}$$

folglich wird

$$\xi = x - \frac{[1 + f'(x)^2]f'(x)}{f''(x)}, \quad \eta = y + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}, \tag{19.}$$

$$\varrho = \pm \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}. \tag{20.}$$

Wenn man

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ statt } f'(x) \quad \text{und} \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ statt } f''(x)$$

---

*) Ueber die Bildung dieser Ableitungen vergleiche man § 73, Aufgabe 2.

schreibt, so erhält man mit Rücksicht auf Formel Nr. 99 der Tabelle

$$
(21.)\quad \begin{cases}
\xi = x - \dfrac{(1+p^2)p}{q} = x - \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 p}{q}, \\[2ex]
\eta = y + \dfrac{1+p^2}{q} = y + \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2}{q}, \\[2ex]
\varrho = \pm \dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \pm \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^3}{q}.
\end{cases}
$$

Hierbei wird man für ϱ das obere oder das untere Vorzeichen wählen, jenachdem q mit $\dfrac{ds}{dx}$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen hat, damit ϱ selbst positiv wird.

Da x und y die Coordinaten des Berührungspunktes sind, so mögen die laufenden Coordinaten des Kreises mit x' und y' bezeichnet werden, so dass er die Gleichung

$$
(22.)\qquad (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 - \varrho^2 = 0
$$

hat. Man nennt diesen Kreis den „*Osculationskreis* oder *Krümmungskreis*“; er hat, wie aus dem Vorhergehenden folgt, im Allgemeinen nur eine Berührung von der *zweiten* Ordnung mit der Curve. In besonderen Punkten der Curve kann aber auch eine Berührung *höherer* Ordnung mit dem Krümmungskreise stattfinden. Die Bedingung dafür ist

$$
(23.)\qquad f'''(x) = g'''(x) = -\frac{3\varrho^2(x-\xi)}{(y-\eta)^5}.
$$

Sind x und y Functionen einer dritten Veränderlichen t, also

$$
(24.)\qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),
$$

so gehen, mit Rücksicht auf die Formeln Nr. 92 der Tabelle, die Gleichungen (21.) über in

$$(25.)\quad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = x - \dfrac{ds^2 dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\[2ex] \eta = y + \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 \dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = y + \dfrac{ds^2 dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}, \\[2ex] \varrho = \pm \dfrac{\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^3}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} = \pm \dfrac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}. \end{cases}$$

Aufgabe 3. Man soll eine Parabel bestimmen, deren Axe zur Y-Axe parallel ist, und welche mit der Curve

$$(26.)\qquad a^2y = x^3$$

im Punkte P mit den Coordinaten $x = a$, $y = a$ eine Berührung von möglichst hoher Ordnung hat.

Auflösung. Hier ist

$$(27.)\qquad y = \frac{x^3}{a^2},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{a^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{6}{a^2}.$$

Die Gleichung einer Parabel, deren Axe zur Y-Axe parallel ist, hat die Form

$$(28.)\qquad Ax^2 + 2By' + 2Cx + D = 0.$$

Man kann hier also über die drei Grössen $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$ passend verfügen, so dass für $x = a$

$$(29.)\qquad y' = y = a,\quad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} = 3,\quad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{a}$$

wird. Dies giebt zunächst

$$(30.)\qquad Aa^2 + 2Ba + 2Ca + D = 0,$$

$$(31.)\qquad A(x^2 - a^2) + 2B(y' - a) + 2C(x - a) = 0,$$

$$(32.)\qquad Ax + B\frac{dy'}{dx} + C = 0,\quad \text{oder}\quad Aa + 3B + C = 0,$$

$$(33.)\quad A + B\frac{d^2y'}{dx^2} = 0, \quad \text{oder} \quad A + \frac{6B}{a} = 0.$$

Daraus folgt

$$(34.)\quad 6B = -Aa, \quad 2C = -Aa,$$

$$(35.)\quad 3(x^2 - a^2) - a(y' - a) - 3a(x - a) = 0,$$

oder

$$(35a.)\quad 3x(x - a) = a(y' - a).$$

Nach Gleichung (6.) in § 86 war

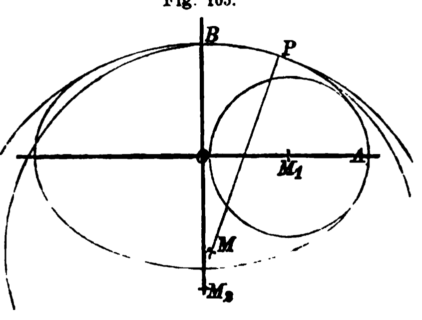
$$P_1P'_1 = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[g^{(n+1)}(x + \Theta_1 h) - f^{(n+1)}(x + \Theta h)].$$

Ist also n *gerade*, so wechselt $P_1P'_1$ mit h sein Zeichen, und ist n *ungerade*, so bleibt das Zeichen von $P_1P'_1$ unverändert, wenn auch h sein Zeichen wechselt; d. h. *die beiden Curven durchsetzen einander, wenn die Ordnung der Berührung gerade ist, und von den beiden Curven verläuft die eine in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes ganz an derselben Seite der anderen, wenn die Ordnung der Berührung ungerade ist.*

Ein Beispiel hierfür liefert bereits die *Tangente* einer Curve. Im Allgemeinen ist die Berührung nur von der ersten Ordnung, dann liegen alle dem Berührungspunkt benachbarten Curvenpunkte auf derselben Seite der Tangente. Ist aber die Berührung von der zweiten Ordnung, so ist der Berührungspunkt ein *Wendepunkt* der Curve und die Tangente ist eine *Wendetangente*, welche die Curve im Berührungspunkte durchsetzt. (Vergl. Fig. 92 und 93 auf Seite 385.)

Ein zweites Beispiel liefert der Osculationskreis oder Krümmungskreis, der sich einer Curve im Punkte P möglichst eng anschliesst. Im Allgemeinen wird die Berührung (nach Aufgabe 2) von der *zweiten* Ordnung sein. Dann wird, wie Figur 105 im Punkte P zeigt, der Kreis die Curve durchsetzen. Nur ausnahmsweise ist die Berüh-

Fig. 105.



rung von der *dritten* Ordnung. So ist z. B. in den Scheiteln der Ellipse, wie später gezeigt werden soll, die Berührung zwischen Krümmungskreis und Curve von der *dritten* Ordnung; deshalb verläuft in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes der Kreis ganz an derselben Seite der Curve.

§ 88.
Krümmung der Curven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 106 und 107.)

Der Kreis hat in allen seinen Punkten dieselbe *Krümmung*, und zwar ist die Krümmung um so grösser, je kleiner der Halbmesser ϱ des Kreises ist. Man setzt daher die Krümmung eines Kreises gleich dem reciproken Werthe des Halbmessers, also gleich $\frac{1}{\varrho}$.

Bei anderen Curven ist die Krümmung in verschiedenen Punkten eine verschiedene. Um sie zu messen, wird man die Curve mit demjenigen Kreise vergleichen, welcher sich in dem betrachteten Punkte unter allen Kreisen am nächsten an die Curve anschmiegt.

Es giebt nämlich für jeden Punkt P einer beliebigen Curve unendlich viele Kreise, welche die Curve im Punkte P berühren. Unter diesen Kreisen giebt es jedoch, wie in § 87 gezeigt wurde, einen, der sich an die Curve näher anschmiegt als alle anderen. Dieser Kreis, der den Halbmesser ϱ haben möge, heisst der „*Krümmungskreis*"; man nennt dann $\frac{1}{\varrho}$ „die *Krümmung* der Curve in dem betrachteten Punkte".

Der Werth von ϱ und ebenso die Werthe der Coordinaten ξ und η des *Krümmungsmittelpunktes* wurden bereits in § 87 berechnet. (Vergl. die Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle.)

Der Krümmungskreis kann aber auch in folgender Weise erklärt werden. Die Gleichung des Kreises

$$(1.)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

enthält drei willkürliche Constante ξ, η, ϱ, welche man so bestimmen kann, dass der Kreis durch drei gegebene Punkte P, P_1, P_2 hindurchgeht. Dies giebt die drei Bedingungsgleichungen

(1a.) $$x^2 - 2\xi x + \xi^2 + y^2 - 2\eta y + \eta^2 - \varrho^2 = 0,$$

(2.) $$x_1^2 - 2\xi x_1 + \xi^2 + y_1^2 - 2\eta y_1 + \eta^2 - \varrho^2 = 0,$$

(3.) $$x_2^2 - 2\xi x_2 + \xi^2 + y_2^2 - 2\eta y_2 + \eta^2 - \varrho^2 = 0.$$

Indem man die Gleichungen (1a.) und (2.) bezw. von den Gleichungen (2.) und (3.) subtrahirt, findet man hieraus

(4.) $$x_1^2 - x^2 - 2\xi(x_1 - x) + y_1^2 - y^2 - 2\eta(y_1 - y) = 0,$$

(5.) $$x_2^2 - x_1^2 - 2\xi(x_2 - x_1) + y_2^2 - y_1^2 - 2\eta(y_2 - y_1) = 0,$$

oder, wenn man Gleichung (4.) durch $x_1 - x$ und Gleichung (5.) durch $x_2 - x_1$ dividirt,

(4a.) $$x_1 + x - 2\xi + (y_1 + y - 2\eta)\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0,$$

(5a.) $$x_2 + x_1 - 2\xi + (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraction

(6.) $$x_2 - x - (y_1 + y - 2\eta)\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0,$$

oder, wenn man

$$(y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{y_1 - y}{x_1 - x} - (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0$$

addirt,

(6a.) $$x_2 - x + (y_2 - y)\frac{y_1 - y}{x_1 - x} + (y_2 + y_1 - 2\eta)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten, wo auch die Punkte P, P_1, P_2 liegen mögen. Nimmt man sie auf der Curve an und setzt

(7.) $$x_1 = x + \Delta x, \quad x_2 = x + 2\Delta x,$$

so gelten die Gleichungen

(8.) $$y = f(x), \quad y_1 = f(x + \Delta x), \quad y_2 = f(x + 2\Delta x),$$

und die Gleichungen (4a.) und (6a.) gehen über in

(9.) $$2x + \Delta x - 2\xi + (y_1 + y - 2\eta)\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0,$$

(10.) $$2\Delta x + [f(x + 2\Delta x) - f(x)]\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$+ (y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x} = 0,$$

oder, wenn man die letzte Gleichung durch $2\Delta x$ dividirt, in

$$(10a.)\quad 1 + \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{2\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1 - 2\eta)\frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = 0.$$

Nun ist aber für $\lim \Delta x = 0$

$$\lim y_2 = \lim y_1 = y;$$

sodann ist nach Formel Nr. 15 der Tabelle

$$\lim \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

und ebenso, wenn man Δx mit $2\Delta x$ vertauscht,

$$\lim \frac{f(x+2\Delta x) - f(x)}{2\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x);$$

endlich ist nach Formel Nr. 44a der Tabelle

$$\lim \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Deshalb erhält man aus den Gleichungen (9.) und (10a.), wenn die Punkte P, P_1 und P_2 einander unendlich nahe rücken, so dass sich Δx dem Grenzwerthe 0 nähert,

$$(11.)\quad (x - \xi) + (y - \eta)f'(x) = 0,$$

$$(12.)\quad 1 + f'(x)^2 + (y - \eta)f''(x) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man wieder in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (16.), (17.) und (18.) in § 87

$$(13.)\quad y - \eta = -\frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)}, \quad x - \xi = \frac{[1 + f'(x)^2]f'(x)}{f''(x)},$$

$$(14.)\quad \varrho = \pm \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Der Krümmungskreis kann also auch erklärt werden als der Kreis, welcher durch drei unendlich nahe Punkte der Curve hindurchgeht.

Dieser Satz ist nur ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, dass zwei Curven $n + 1$ unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben, wenn sie eine Berührung n^{ter} Ordnung besitzen.

§ 89.

Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Man soll den Krümmungskreis für die *Parabel*

$$y^2 = 2ax \tag{1.}$$

bestimmen.*)

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{y^3}, \tag{2.}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = \frac{a^2 + y^2}{y^2}. \tag{3.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle ein, so findet man

$$\xi = x - \frac{a^2 + y^2}{y^2} \cdot \frac{a}{y}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = x + \frac{a^2 + y^2}{a},$$

oder

$$\xi = x + \frac{a^2 + 2ax}{a} = a + 3x, \tag{4.}$$

$$\eta = y + \frac{a^2 + y^2}{y^2}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = y - \frac{(a^2 + y^2)y}{a^2},$$

oder

$$\eta = \frac{a^2y - a^2y - y^3}{a^2} = -\frac{y^3}{a^2}, \tag{5.}$$

$$\varrho = \pm\frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{y^3}\left(-\frac{y^3}{a^2}\right) = \mp\frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}. \tag{6.}$$

Für den Scheitel der Parabel wird y gleich 0, folglich ist in diesem Punkte

$$\varrho = a, \quad \xi = a, \quad \eta = 0. \tag{7.}$$

In dem Scheitel hat auch der Krümmungskreis mit der Parabel eine Berührung von der *dritten* Ordnung. Es wird hier nämlich

---

*) In dieser Aufgabe ist der Parameter der Parabel mit a bezeichnet, während p hier und in den folgenden Aufgaben gleich $\frac{dy}{dx}$ sein soll.

(8.) $$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3a^2}{y^4}\frac{dy}{dx} = \frac{3a^3}{y^5},$$

und nach Gleichung (23.) in § 87

$$g'''(x) = -\frac{3\varrho^2(x-\xi)}{(y-\eta)^5} = \frac{3(a^2+y^2)^3(a^2+y^2) \,.\, a^{10}}{a^4 \,.\, a \,.\, (a^2+y^2)^5 y^5},$$

oder

(9.) $$g'''(x) = \frac{3a^5}{(a^2+y^2)y^5}.$$

Daraus folgt

(10.) $$\frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{3a^3}{y^5} \cdot \frac{(a^2+y^2)y^5}{3a^5} = \frac{a^2+y^2}{a^2};$$

deshalb wird für $\lim x = 0$, $\lim y = 0$

(11.) $$\lim \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = 1, \quad \text{oder} \quad \lim f'''(x) = \lim g'''(x).$$

Die Parabel hat daher im Scheitel mit dem zugehörigen Krümmungskreise eine Berührung von der *dritten* Ordnung.

Aufgabe 2. Man soll den Krümmungskreis für die *Ellipse*

(12.) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

bestimmen.

Auflösung. Aus Gleichung (12.) findet man

(13.) $$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$

(14.) $$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln 106 und 107 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = x - \frac{x(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^4b^2}.$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (12.) ist aber

(15.) $$b^4x^2 + a^4y^2 = b^2(a^4 - e^2x^2) = a^2(b^4 + e^2y^2),$$

folglich wird

$$(16.)\qquad \xi = x - \frac{x(a^4 - e^2x^2)}{a^4} = \frac{e^2x^3}{a^4},$$

$$\eta = y + \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4y^2}\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = y - \frac{y(b^4x^2 + a^4y^2)}{a^2b^4},$$

oder nach Gleichung (15.)

$$(17.)\qquad \eta = y - \frac{y(b^4 + e^2y^2)}{b^4} = -\frac{e^2y^3}{b^4},$$

$$(18.)\qquad \varrho = \pm\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6y^3}\left(-\frac{a^2y^3}{b^4}\right) = \mp\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Ferner ist

$$(19.)\qquad f'''(x) = -\frac{3b^6x}{a^4y^5},$$

$$(20.)\qquad g'''(x) = -\frac{3\varrho^2(x - \xi)}{(y - \eta)^5} = -\frac{3b^{10}x}{a^2y^5(b^4x^2 + a^4y^2)}.$$

Daraus folgt

$$(21.)\qquad \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{3b^6x}{a^4y^5}\cdot\frac{a^2y^5(b^4x^2 + a^4y^2)}{3b^{10}x} = \frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^2b^4},$$

also für $x = \pm a,\ y = 0$ wird

$$(22.)\qquad \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = 1, \quad\text{oder}\quad f'''(x) = g'''(x).$$

Auch für $x = 0,\ y = \pm b$ wird

$$(22a.)\qquad f'''(x) = g'''(x) = 0.$$

In den vier Scheitelpunkten der Ellipse findet daher eine Berührung von der *dritten* Ordnung mit dem zugehörigen Krümmungskreise statt. (Vergl. Fig. 105.)

Dabei wird

$$(23.)\qquad \varrho = \frac{a^2}{b} \quad\text{für}\quad x = 0$$

und

$$(24.)\qquad \varrho = \frac{b^2}{a} \quad\text{für}\quad y = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll den Krümmungskreis für die *Hyperbel*

$$(25.)\qquad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

bestimmen.

Auflösung. Die Rechnungen gestalten sich hier genau ebenso wie in der vorhergehenden Aufgabe, man hat nur $+b^2$ mit $-b^2$ zu vertauschen. Dadurch erhält man wieder

$$\xi = \frac{e^2x^3}{a^4}, \quad \eta = -\frac{e^2y^3}{b^4}, \quad \varrho = \mp\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \tag{26.}$$

genau so wie bei der Ellipse, hier ist aber e^2 gleich $a^2 + b^2$, während bei der Ellipse e^2 gleich $a^2 - b^2$ war.

Aufgabe 4. Man soll den Krümmungskreis für die *Kettenlinie*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{27.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus Gleichung (27.) folgt mit Rücksicht auf die Formeln, welche in § 81, Aufgabe 7 entwickelt worden sind,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{y^2 - a^2}, \tag{28.}$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}, \tag{29.}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}. \tag{30.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{y^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} \cdot \frac{a^2}{y} = x - \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{a}, \tag{31.}$$

$$\eta = y + \frac{y^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{y} = 2y, \tag{32.}$$

$$\varrho = \pm\frac{y^3}{a^3} \cdot \frac{a^2}{y} = \pm\frac{y^2}{a}. \tag{33.}$$

Es war aber auch die Normale

$$N = y\frac{ds}{dx} = \frac{y^2}{a} \tag{34.}$$

(vergl. Gleichung (48.) auf Seite 354), folglich ist der Krümmungshalbmesser bei der Kettenlinie der zugehörigen Normale gleich; er hat aber die entgegengesetzte Richtung, wie man schon aus Gleichung (32.) erkennt.

Aufgabe 5. Man soll den Krümmungskreis für die *Cykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{35.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (35.) folgt durch Differentiation

$$dx = a(1 - \cos t)dt, \quad dy = a\sin t\, dt, \tag{36.}$$

$$d^2x = a\sin t \,.\, dt^2, \quad d^2y = a\cos t \,.\, dt^2, \tag{37.}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos t)dt^2 = 4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^2, \tag{38.}$$

$$ds = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt, \tag{38a.}$$

$$dxd^2y - dyd^2x = -a^2(1 - \cos t)dt^3 = -2a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)dt^3. \tag{39.}$$

Dies giebt nach Formel Nr. 106 und 107 der Tabelle

$$\xi = x - \frac{4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cdot a\sin t}{-2a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = a(t - \sin t) + 2a\sin t,$$

oder

$$\xi = a(t + \sin t); \tag{40.}$$

$$\eta = y + \frac{4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \cdot a(1 - \cos t)}{-2a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t),$$

oder

$$\eta = -a(1 - \cos t) = -y, \tag{41.}$$

$$\varrho = \pm\frac{8a^3\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{-2a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \mp 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \tag{42.}$$

Nun war aber (nach Gleichung (61.) in § 81) die Normale

$$N = y\frac{ds}{dx} = 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right), \tag{43.}$$

folglich *ist der Krümmungshalbmesser doppelt so gross wie die Normale.*

Noch etwas schneller kommt man auf folgende Weise zum Ziele. Aus den Gleichungen (36.) findet man

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

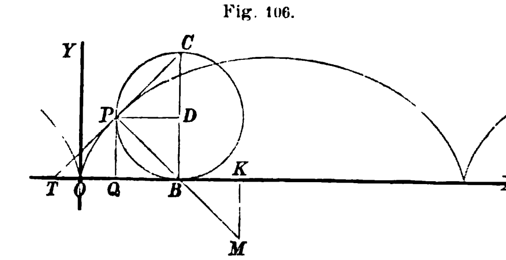
$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1+p^2 = 1+\operatorname{ctg}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

$$\xi = x + \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot 4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = a(t+\sin t),$$

$$\eta = y - \frac{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = -a(1-\cos t),$$

$$\varrho = \pm\frac{-4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)} = \mp 4a\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Fig. 106.



Diese Resultate werden durch Figur 106 bestätigt.

Ist nämlich M der Mittelpunkt des Krümmungskreises für den Punkt P, so wird

$$PM = 2PB,$$

oder

$$PB = BM.$$

Daraus folgt

$$\triangle BKM \cong \triangle BQP,$$

und deshalb

$$\eta = KM = -MK = -QP = -y,$$
$$BK = QB = PD = a\sin t,$$

also

$$\xi = OQ + 2QB = a(t - \sin t) + 2a\sin t$$
$$= a(t + \sin t).$$

Aufgabe 6. Man soll den Krümmungskreis der *Astroide*

$$(44.)\qquad x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

bestimmen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (44.) folgt durch Differentiation

$$(45.)\qquad dx = -3a\cos^2 t\sin t \,.\, dt, \quad dy = 3a\sin^2 t\cos t \,.\, dt,$$

$$(46.)\qquad p = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t,$$

$$(47.)\qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t},$$

$$(48.)\qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + p^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$(48a.)\qquad \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Dies giebt nach den Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle

$$(49.)\quad \xi = x - \frac{1}{\cos^2 t}\left(-\frac{\sin t}{\cos t}\right)3a\cos^4 t\sin t = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t,$$

$$(50.)\quad \eta = y + \frac{1}{\cos^2 t}\cdot 3a\cos^4 t\sin t = 3a\cos^2 t\sin t + a\sin^3 t,$$

$$(51.)\quad \varrho = \pm\frac{-1}{\cos^3 t}\cdot 3a\cos^4 t\sin t = \mp 3a\sin t\cos t.$$

Aufgabe 7. Man soll den Krümmungskreis für die Curve

$$x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3 \tag{52.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (52.) folgt durch Differentiation

$$dx = 6tdt, \quad dy = 3(1 - t^2)dt, \tag{53.}$$

$$d^2x = 6dt^2, \quad d^2y = -6tdt^2, \tag{54.}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 9(1 + 2t^2 + t^4)dt^2 = 9(1 + t^2)^2dt^2, \tag{55.}$$

$$ds = 3(1 + t^2)dt, \tag{55a.}$$

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = -18(1 + t^2)dt^3. \tag{56.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{9(1 + t^2)^2 . 3(1 - t^2)}{-18(1 + t^2)} = 3t^2 + \frac{3}{2}(1 - t^4),$$

oder

$$\xi = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4); \tag{57.}$$

$$\eta = y + \frac{9(1 + t^2)^2 . 6t}{-18(1 + t^2)} = 3t - t^3 - 3t(1 + t^2),$$

oder

$$\eta = -4t^3; \tag{58.}$$

$$\varrho = \pm\frac{27(1 + t^2)^3}{-18(1 + t^2)} = \mp\frac{3}{2}(1 + t^2)^2. \tag{59.}$$

Aufgabe 8. Man soll den Krümmungskreis der *Epicykloide*

$$x = a[m\cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)] \tag{60.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (60.) folgt durch Differentiation, wenn man wieder $m - 1 = n$, $m + 1 = l$ setzt,

$$dx = ma[-\sin t + \sin(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \tag{61.}$$

$$dy = ma[+\cos t - \cos(mt)]dt = 2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \tag{62.}$$

$$(63.)\quad p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right),\quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)},$$

$$(64.)\quad q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{l}{2}\,\frac{1}{\cos^2\left(\frac{lt}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}$$

$$= \frac{l}{4ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 106 und 107 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = x - \frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{lt}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

$$= a[m\cos t - \cos(mt)] + \frac{2ma}{l}[\cos(mt) - \cos t],$$

oder, wenn man

$$(65.)\quad a - \frac{2a}{l} = \frac{na}{l} = a_1$$

setzt,

$$(66.)\quad \xi = a_1[m\cos t + \cos(mt)],$$

$$\eta = y + \frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)$$

$$= a[m\sin t - \sin(mt)] + \frac{2ma}{l}[\sin(mt) - \sin t],$$

oder

$$(67.)\quad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)].$$

Endlich wird

$$(68.)\quad \varrho = \pm\frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Aus Figur 77 auf Seite 358 erkennt man, dass

$$(69.)\quad PB = 2a\sin\left(\frac{nt}{2}\right)$$

wird, folglich ist

$$(70.)\quad \varrho = \frac{2m}{l}\cdot PB = \frac{2n+2}{n+2}\cdot PB.$$

Daraus ergiebt sich eine sehr einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes.

Aufgabe 9. Man soll den Krümmungskreis der *Hypocykloide*

$$x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)] \tag{71.}$$

bestimmen.

Auflösung. Wenn man hier $m + 1$ mit n und $m - 1$ mit l bezeichnet, so wird in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe

$$dx = -2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \tag{72.}$$

$$dy = +2ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{lt}{2}\right)dt, \tag{73.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\left(\frac{lt}{2}\right), \quad \frac{ds}{dx} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{lt}{2}\right)}, \tag{74.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{l}{4ma\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos^3\left(\frac{lt}{2}\right)}; \tag{75.}$$

dies giebt, wenn man $\frac{na}{l}$ mit a_1 bezeichnet,

$$\xi = a_1[m\cos t - \cos(mt)], \tag{76.}$$

$$\eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)], \tag{77.}$$

$$\varrho = \mp\frac{4ma}{l}\sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{2m}{l}\cdot PB. \tag{78.}$$

(Vgl. Fig. 78.)

Aufgabe 10. Man soll den Krümmungskreis der *Kreisevolvente*

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t) \tag{79.}$$

bestimmen.

Auflösung. Durch Differentiation der Gleichungen (79.) erhält man

$$dx = at\cos t\,.\,dt, \quad dy = at\sin t\,.\,dt, \tag{80.}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos t}, \tag{81.}$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{at\cos t} = \frac{1}{at\cos^3 t}. \tag{82.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 106 und 107 der Formel-Tabelle ein, so wird

$$(83.)\quad \xi = x - at\sin t = a(\cos t + t\sin t) - at\sin t = a\cos t,$$

$$(84.)\quad \eta = y + at\cos t = a(\sin t - t\cos t) + at\cos t = a\sin t,$$

$$(85.)\quad \varrho = \pm\, at.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Punkt B, in welchem der abgewickelte Faden den Kreis verlässt (Fig. 81), der Krümmungsmittelpunkt ist.

§ 90.

Die Krümmungsmittelpunkts-Curven oder Evoluten.

Wenn man sich die Krümmungskreise zu sämmtlichen Punkten P, P_1, P_2, ... einer Curve construirt denkt, so wird durch die zugehörigen Krümmungs-Mittelpunkte M, M_1, M_2, ... eine neue Curve bestimmt, welche man die *„Krümmungsmittelpunkts-Curve oder Evolute"* der gegebenen Curve nennt. Durchläuft also ein Punkt die ursprüngliche Curve, so durchläuft sein Krümmungsmittelpunkt die Krümmungsmittelpunkts-Curve. Um die Gleichung derselben zu finden, braucht man nur aus den drei Gleichungen

$$(1.)\quad y = f(x) \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0,$$

$$(2.)\quad \xi = x - \frac{(1 + p^2)p}{q},$$

$$(3.)\quad \eta = y + \frac{1 + p^2}{q}$$

die Grössen x und y zu eliminiren, dann erhält man die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η.

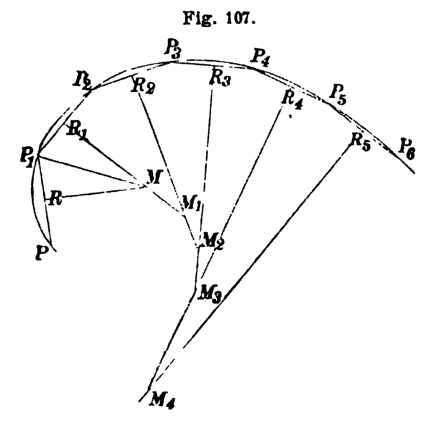
Sind x und y als Functionen einer dritten Veränderlichen t gegeben, so werden auch

$$(4.)\quad \xi = x - \frac{ds^2 dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{ds^2 dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

Functionen von t, so dass die Krümmungsmittelpunkts-Curve schon durch diese beiden Gleichungen in zweckmässiger Form gegeben ist, da man zu jedem Werthe von t die zugehörigen Werthe von ξ und η findet.

Um die Beziehungen leichter zu erkennen, welche zwischen der ursprünglichen Curve und der Krümmungsmittelpunkts-Curve bestehen, ersetze man die Curve zunächst durch ein Polygon $PP_1P_2P_3\ldots$ mit lauter gleichen, beliebig kleinen Seiten (vergl. Fig. 107), dessen Ecken P, P_1, $P_2\ldots$ auf der Curve liegen. Dann kann man die Mittelpunkte M, M_1, $M_2,\ldots$ der Kreise finden, die durch je drei auf einander folgende Punkte P gehen, indem man die Seiten des Polygons halbirt und in den Mittelpunkten R, R_1, $R_2,\ldots$ Lothe RM, R_1M_1, $R_2M_2,\ldots$ auf den Seiten des Polygons errichtet. Dabei möge vorausgesetzt werden, dass für das betrachtete Curvenstück vom Punkte P ab die Krümmungshalbmesser immer grösser werden.

Fig. 107.



Rücken die Punkte P, P_1, $P_2,\ldots$ einander immer näher, so geht das Polygon $PP_1P_2\ldots$ in die ursprüngliche Curve und das Polygon $MM_1M_2\ldots$ in die Krümmungsmittelpunkts-Curve über. Dabei werden die Geraden PP_1, P_1P_2, $P_2P_3,\ldots$ *Tangenten* der ursprünglichen Curve, weil sie zwei unendlich nahe Curvenpunkte mit einander verbinden, und die darauf senkrecht stehenden Geraden RM, R_1M_1, $R_2M_2,\ldots$ werden ***Normalen*** der ursprünglichen Curve. Die Gerade R_1M_1 geht aber auch durch M, die Gerade R_2M_2 geht auch durch M_1, u. s. w. Da nun auch die Punkte M, M_1, $M_2,\ldots$ einander unendlich nahe rücken, so sind die Geraden RM, R_1M_1, $R_2M_2,\ldots$ gleichzeitig *Tangenten* der Krümmungsmittelpunkts-Curve, und man erhält

Satz 1. *Die Normalen der ursprünglichen Curve sind Tangenten der Krümmungsmittelpunkts-Curve.*

Dabei folgt aus der Congruenz der Dreiecke RMP_1 und R_1MP_1, dass

$$RM = R_1 M$$

ist. Ebenso wird

$$R_1 M_1 = R_2 M_1, \quad R_2 M_2 = R_3 M_2, \quad R_3 M_3 = R_4 M_3, \ldots.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} R_1 M_1 - RM = R_1 M_1 - R_1 M = MM_1, \\ R_2 M_2 - R_1 M_1 = R_2 M_2 - R_2 M_1 = M_1 M_2, \\ R_3 M_3 - R_2 M_2 = R_3 M_3 - R_3 M_2 = M_2 M_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ R_\alpha M_\alpha - R_{\alpha-1} M_{\alpha-1} = R_\alpha M_\alpha - R_\alpha M_{\alpha-1} = M_{\alpha-1} M_\alpha. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Addition

$$(6.)\quad R_\alpha M_\alpha - RM = MM_1 + M_1 M_2 + M_2 M_3 + \cdots + M_{\alpha-1} M_\alpha.$$

Rücken die Punkte P, P_1, $P_2, \ldots$ einander unendlich nahe, so gehen RM, R_1M_1, $R_2M_2, \ldots$ in die Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ_1, $\varrho_2, \ldots$, und das Polygon $MM_1M_2M_3\ldots$ geht in den Bogen σ der Krümmungsmittelpunkts-Curve über. Bezeichnet man daher den Unterschied zweier benachbarten Krümmungshalbmesser mit $d\varrho$ und die entsprechende unendlich kleine Seite des Polygons $MM_1M_2M_3\ldots$ mit $d\sigma$, so wird $d\sigma$ der unendlich kleine Zuwachs des Bogens σ, und die Gleichungen (5.) und (6.) erhalten die Form

$$(5a.)\quad d\varrho = d\sigma,$$

$$(6a.)\quad \varrho_\alpha - \varrho = \sigma,$$

wobei σ der Bogen der Krümmungsmittelpunkts-Curve ist, welcher zwischen den beiden Krümmungshalbmessern ϱ und ϱ_α liegt.

Darin sind folgende Sätze ausgesprochen:

Satz 2. *Die unendlich kleine Grösse, um welche sich der Krümmungshalbmesser einer Curve ändert, ist gleich der entsprechenden Aenderung des Bogens der Krümmungsmittelpunkts-Curve.*

Satz 3. *Die Differenz zweier Krümmungshalbmesser ϱ_α und ϱ giebt die Länge des Bogens σ der Krümmungsmittelpunkts-Curve zwischen ϱ und ϱ_α.*

Aus diesen beiden Sätzen folgt, dass die ursprüngliche Curve aus der Krümmungsmittelpunkts-Curve durch Abwickelung (oder Aufwickelung) eines Fadens entsteht. Denkt man sich nämlich

zunächst um das Polygon $MM_1M_2M_3 \ldots M_\alpha$ einen vollkommen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden gelegt, dessen Endpunkt sich in R befindet, so beschreibt der Endpunkt des Fadens zunächst einen Kreisbogen RR_1, weil MR und MR_1 gleich lang sind, und aus der *gebrochenen* Linie M_1MR wird die *gerade* Linie M_1R_1. Dann beschreibt der Endpunkt des Fadens einen Kreisbogen R_1R_2, und aus der *gebrochenen* Linie $M_2M_1R_1$ wird die *gerade* Linie M_2R_2; u. s. w.

Rücken die Punkte P, P_1, $P_2, \ldots$ einander unendlich nahe, so fallen die kleinen Kreisbögen RR_1, $R_1R_2, \ldots$ mit der ursprünglichen Curve zusammen, und man erhält

Satz 4. *Die ursprüngliche Curve entsteht durch Abwickelung (oder Aufwickelung) aus der Krümmungsmittelpunkts-Curve.*

Man nennt deshalb auch die Krümmungsmittelpunkts-Curve gewöhnlich die „*Evolute*“ und die ursprüngliche Curve die „*Evolvente*“.

Da die Länge des Fadens noch beliebig ist, so folgt hieraus, dass bei der Abwickelung des Fadens unendlich viele Curven entstehen. (Vergl. Fig. 108.) Dies giebt

Satz 5. *Jede Curve hat eine einzige Evolute, aber zu jeder als Evolute angenommenen Curve gehören unendlich viele Evolventen.*

Diese Sätze ergeben sich auch durch Rechnung aus den Gleichungen

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1+p^2}{q}. \tag{7.}$$

Da y durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

als Function von x erklärt ist, so sind auch die Grössen

$$p = f'(x), \quad q = f''(x), \quad r = f'''(x),$$

und deshalb auch ξ und η Functionen von x. Durch Differentiation nach x findet man daher aus den Gleichungen (7.)

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - \frac{q^2(1+3p^2) - p(1+p^2)r}{q^2} = \frac{-3p^2q^2 + p(1+p^2)r}{q^2}. \tag{8.}$$

$$(9.)\qquad \frac{d\eta}{dx} = p + \frac{2pq^2 - (1+p^2)r}{q^2} = \frac{3pq^2 - (1+p^2)r}{q^2}.$$

Indem man diese beiden Gleichungen durch einander dividirt, findet man

$$(10.)\qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{p} = -\frac{dx}{dy}.$$

Ist also wie gewöhnlich α der Winkel, den die Tangente TP in irgend einem Punkte P der Curve $y = f(x)$ mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, und β der Winkel, welchen die Tangente MN der Krümmungsmittelpunkts-Curve in dem zugehörigen Punkte M mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, so ist (Fig. 108)

Fig. 108.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\beta$$

und deshalb nach Gleichung (10.)

$$(11.)\qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(90^0 + \alpha),$$

d. h. *die beiden Tangenten TP und MN bilden* (hinreichend verlängert) *einen rechten Winkel mit einander.*

Die Gerade PM steht aber als Krümmungshalbmesser ebenfalls senkrecht auf der Tangente TP, sie muss daher mit MN zusammenfallen, da es durch den Punkt M nur *eine* Gerade giebt, welche auf TP senkrecht steht. Dies giebt wieder

Satz 1. *Die Normalen der ursprünglichen Curve sind zugleich Tangenten der Krümmungsmittelpunkts-Curve.*

Indem man die Gleichungen (8.) und (9.) in's Quadrat erhebt und addirt, findet man

(12.) $$\frac{d\xi^2 + d\eta^2}{dx^2} = \frac{(1+p^2)[3pq^2 - (1+p^2)r]^2}{q^4},$$

und wenn man die Gleichung

$$\varrho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

differentiirt, erhält man

(13.) $$\frac{d\varrho}{dx} = \pm \frac{[3pq^2 - (1+p^2)r]\sqrt{1+p^2}}{q^2}.$$

Setzt man jetzt wieder das Bogenelement der Krümmungs-mittelpunkts-Curve

(14.) $$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\sigma,$$

so findet man aus den Gleichungen (12.) und (13.)

(15.) $$d\sigma = \pm d\varrho.$$

Dies giebt

Satz 2. *Die unendlich kleine Grösse, um welche sich der Krümmungshalbmesser einer Curve ändert, ist gleich der entsprechenden Aenderung des Bogens der Krümmungsmittelpunkts-Curve.*

Aus diesen Sätzen ergeben sich dann ohne Weiteres auch die Sätze 3, 4 und 5 in derselben Weise wie oben.

§ 91.

Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Man soll die Evolute der *Parabel*

(1.) $$y^2 = 2ax$$

aufsuchen.

Auflösung. Nach den Gleichungen (4.) und (5.) in § 89 wird für die Parabel

(2.) $$\xi = a + 3x, \quad \eta = -\frac{y^3}{a^2},$$

folglich ist

$$a^4\eta^2 = y^6 = 8a^3x^3 = \frac{8a^3(\xi - a)^3}{27},$$

oder

$$(3.)\quad 27a\eta^2 = 8(\xi - a)^3, \quad \text{oder} \quad \eta = \pm\frac{2(\xi - a)}{9a}\sqrt{6a(\xi - a)}.$$

Da η nur reelle Werthe haben kann, wenn

$$\xi - a \geqq 0, \quad \text{also} \quad \xi \geqq a$$

ist, so beginnt die Curve in einem Punkte S auf der X-Axe, welcher den Abstand a vom Scheitel hat. Sie erstreckt sich von da in zwei zur X-Axe symmetrisch gelegenen Zweigen bis ins Unendliche. (Vergl. Fig. 109.)

Aus Gleichung (3.) folgt durch Differentiation

$$(4.)\quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{4(\xi - a)^2}{9a\eta} = \pm\frac{1}{3a}\sqrt{6a(\xi - a)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Fig. 109.

Für $\xi = a$ wird also der Winkel α gleich 0, d. h. die beiden Zweige berühren im Punkte S die X-Axe, so dass die Curve im Punkte S eine Spitze hat.

Im Uebrigen hat $\frac{d\eta}{d\xi}$ dasselbe Vorzeichen wie η, der Curvenzweig *über* der X-Axe *steigt* daher und der *unter* der X-Axe *fällt* beständig.

Ferner findet man aus Gleichung (4.) durch nochmalige Differentiation

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{4\left[2\eta(\xi - a) - (\xi - a)^2\frac{d\eta}{d\xi}\right]}{9a\eta^2},$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.) und (4.)

$$(5.)\quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{72a\eta^2(\xi - a) - 16(\xi - a)^4}{81a^2\eta^3} = \frac{2(\xi - a)}{9a\eta}.$$

Also auch $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ hat dasselbe Vorzeichen wie η, d. h. der obere Zweig der Curve ist nach oben *concav*, und der untere Zweig der Curve ist nach oben *convex*.

Für $x = 4a$ wird $y^2 = 8a^2$,
und für $\xi = 4a$ wird $\eta^2 = 8a^2$,
folglich wird die Parabel in den Punkten mit den Coordinaten $x = 4a$, $y = \pm 2a\sqrt{2}$ von ihrer Evolute geschnitten.

Aufgabe 2. Man soll die Evolute der *Ellipse*

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6.}$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 110, 111 und 112.)

Auflösung. Nach den Gleichungen (16.) und (17.) in § 89 wird für die Ellipse

$$\xi = \frac{e^2x^3}{a^4} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{e^2y^3}{b^4}, \tag{7.}$$

oder

$$\frac{x^3}{a^3} = \frac{a\xi}{e^2}, \qquad \frac{y^3}{b^3} = -\frac{b\eta}{e^2},$$

also

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{y}{b} = -\left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (6.) ein, so erhält man

$$\left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{8.}$$

Da die Ellipse die beiden Coordinaten-Axen zu Symmetrie-Axen hat, so gilt dasselbe auch von ihrer Evolute.

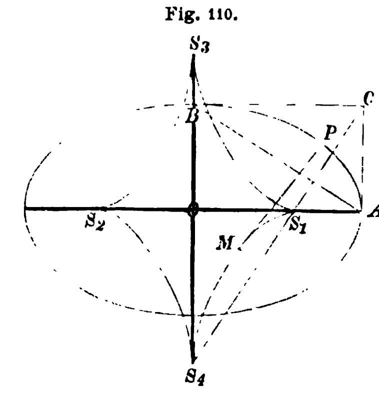


Fig. 110.

Für $\eta = 0$ wird $\xi = \pm \frac{e^2}{a}$,

und für $\xi = 0$ „ $\eta = \pm \frac{e^2}{b}$.

Dadurch erhält man die vier Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Evolute mit den Coordinaten-Axen, und zwar sind diese Punkte wieder Spitzen der Curve, weil

$$\xi^2 \leqq \frac{e^4}{a^2} \quad \text{und} \quad \eta^2 \leqq \frac{e^4}{b^2}$$

sein muss, und weil die Curvenzweige in den angegebenen Punkten die X-Axe, bezw. die Y-Axe berühren.

Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, jenachdem

$$a^2 > 2b^2, \quad a^2 = 2b^2, \quad \text{oder} \quad a^2 < 2b^2$$

ist. In dem ersten Falle wird die Ordinate des Punktes S_3

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} > b,$$

d. h. die Spitzen S_3 und S_4 liegen *ausserhalb* der Ellipse. (Vergl. Fig. 110.)

Es sei z. B.

$$a = 30, \quad b = 18, \quad \text{also} \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 24,$$

dann haben die Punkte S_1 und S_3 bezw. die Coordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 19,2, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 32.$$

In dem zweiten Falle wird die Ordinate des Punktes S_3

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} = b,$$

Fig. 111.

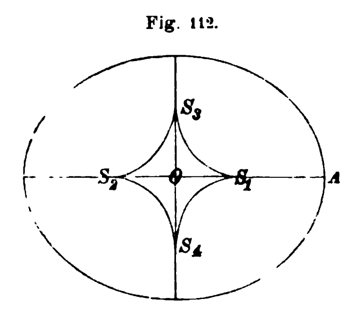


Fig. 112.

d. h. die Spitzen S_3 und S_4 sind zugleich die in der Y-Axe liegenden *Scheitel* der Ellipse. (Vergl. Fig. 111.)

Es sei z. B.

$$b = e = 20, \quad \text{also} \quad a = \sqrt{b^2 + e^2} = \sqrt{800} = 28, 28\ldots,$$

dann haben die Punkte S_1 und S_3 bezw. die Coordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 14, 14\ldots, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 20.$$

In dem dritten Falle wird die Ordinate des Punktes S_3

$$\eta = \frac{e^2}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b} < b,$$

d. h. die Spitzen S_3 und S_4 liegen *innerhalb* der Ellipse. (Vergl. Fig. 112.)

Es sei z. B.

$$a = 30, \quad b = 24, \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = 18,$$

dann haben die Punkte S_1 und S_3 bezw. die Coordinaten

$$\xi_1 = \frac{e^2}{a} = 10,8, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{und} \quad \xi_3 = 0, \; \eta_3 = \frac{e^2}{b} = 13,5.$$

Man kann übrigens diese Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 auch leicht construiren, indem man von dem Punkte C mit den Coordinaten (Fig. 110)

$$x = a, \quad y = b$$

auf die Gerade AB mit der Gleichung

$$\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} = 1,$$

welche durch die beiden Scheitel A und B der Ellipse hindurchgeht, ein Loth fällt. Dieses Loth, welches die Gleichung

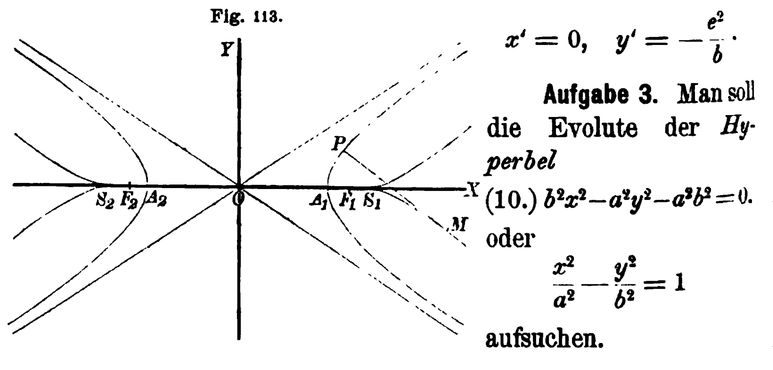
$$b(y' - b) = a(x' - a) \tag{9.}$$

hat, schneidet die X-Axe in einem Punkte S_1 mit den Coordinaten

$$x' = \frac{e^2}{a}, \quad y' = 0$$

und die Y-Axe in einem Punkte S_4 mit den Coordinaten

Fig. 113.



$$x' = 0, \quad y' = -\frac{e^2}{b}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Evolute der *Hyperbel*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{10.}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

aufsuchen.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe findet man hier

$$(11.)\qquad \left(\frac{a\xi}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Man untersuche die Eigenschaften und die Gestalt dieser Curve (Fig. 113).

Aufgabe 4. Man soll die Evolute der *Kettenlinie*

$$(12.)\qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad \text{oder} \quad \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

aufsuchen.

Auflösung. Nach den Gleichungen (31.) und (32.) in § 89 wird für die Kettenlinie

$$(13.)\qquad \xi = x - \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{a}, \quad \eta = 2y,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.)

$$(14.)\qquad \xi = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right), \quad \eta = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Fig. 114.

Somit sind ξ und η als Functionen einer dritten Veränderlichen x dargestellt, so dass man die Curve punktweise construiren und ihre Eigenschaften untersuchen kann. (Vergl. Fig. 114.)

Da man die Gleichung der Kettenlinie auf die Form

$$x = a\,\mathrm{l}\left(\frac{y \pm \sqrt{y^2 - a^2}}{a}\right)$$

bringen kann, so ergiebt sich aus den Gleichungen (13.) auch eine Gleichung zwischen ξ und η, nämlich

$$\xi = a\,\mathrm{l}\left(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{2a}\right) - \frac{\eta\sqrt{\eta^2 - 4a^2}}{4a}.$$

Aufgabe 5. Man soll die Evolute der *Cykloide*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{15.}$$

aufsuchen.

Auflösung. Nach den Gleichungen (40.) und (41.) in § 89 wird für die Cykloide

$$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = -a(1 - \cos t). \tag{16.}$$

Diese Gleichungen, welche zur Construction und Untersuchung der Evolute wohl geeignet sind, haben einige Aehnlichkeit mit den Gleichungen der Cykloide selbst, ja man kann sogar zeigen, dass die Evolute gleichfalls eine Cykloide ist. Dies geschieht, indem man ein neues Coordinaten-System einführt, dessen Abscissen-Axe $O'X'$ parallel ist zur X-Axe, und dessen Ordinaten-Axe $O'Y'$ parallel ist zur Y-Axe (Fig. 115). Dabei soll der neue Anfangspunkt O' eine solche Lage haben, dass

$$\xi' = a\pi + \xi, \quad \eta' = 2a + \eta \tag{17.}$$

wird. Dadurch gehen die Gleichungen (16.) über in

$$\xi' = a(\pi + t + \sin t), \quad \eta' = a(1 + \cos t). \tag{18.}$$

Setzt man jetzt noch

$$t = t' - \pi, \quad \text{also} \quad t' = \pi + t, \tag{19.}$$

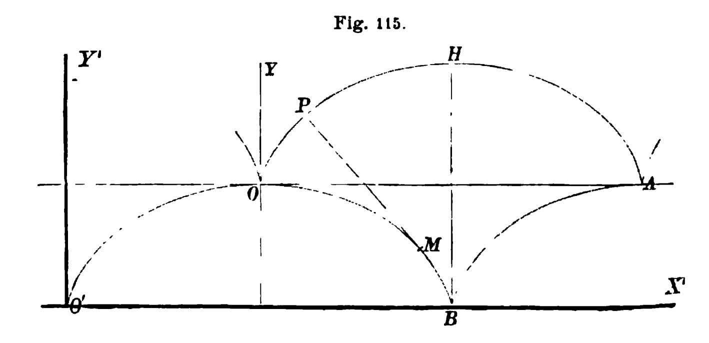
so wird

$$\sin t = -\sin t', \quad \cos t = -\cos t', \tag{20.}$$

und die Gleichungen (18.) gehen über in

$$\xi' = a(t' - \sin t') \quad \eta' = a(1 - \cos t'). \tag{21.}$$

Fig. 115.



Diese Gleichungen stimmen genau überein mit den Gleichungen (15.); es sind nur die Buchstaben x, y, t bezw. vertauscht mit ξ', η', t', d. h. *die gemeine Cykloide ist ihrer Evolute congruent.*

Nach dem Vorstehenden ist also die Cykloide $OPHA$ (Fig. 115) eine Evolvente der beiden halben Cykloidenbögen OB und BA. Befestigt man in B einen biegsamen, aber nicht dehnbaren Faden und legt ihn um den halben Cykloidenbogen BMO, so wird das Ende O die Cykloide $OPHA$ beschreiben, wenn man zunächst den Faden von dem Bogen BMO abwickelt und dann auf den Bogen BA aufwickelt, bis das Ende des Fadens in dem Punkte A anlangt.

Daraus findet man auch leicht die Länge des Cykloidenbogens OB, denn die Länge des Fadens, der auf diesen Bogen aufgewickelt werden kann, ist

$$\widehat{OB} = HB = 4a. \tag{22.}$$

Der Bogen OB ist aber congruent dem Bogen HA, und HA ist die Hälfte des ganzen Cykloidenbogens, folglich ist

$$OPHA = 8a. \tag{23.}$$

Die Länge des ganzen Cykloidenbogens ist daher 8-mal so gross wie der Halbmesser des die Cykloide erzeugenden Kreises.

In der Integral-Rechnung wird die Länge des Cykloidenbogens durch eine andere, allgemein verwendbare Methode ermittelt werden.

Aufgabe 6. Man soll die Evolute der *Astroide*

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t \tag{24.}$$

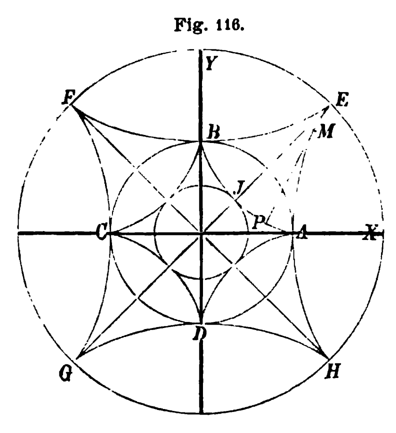
aufsuchen. (Vergl. Fig. 116.)

Auflösung. Nach den Gleichungen (49.) und (50.) in § 89 wird für die Astroide

$$\begin{cases} \xi = a\cos^3 t + 3a\cos t\sin^2 t, \\ \eta = 3a\cos^2 t\sin t + a\sin^3 t. \end{cases} \tag{25.}$$

Diese Gleichungen stellen, wie sogleich gezeigt werden soll, wieder eine Astroide dar, die aus der gegebenen entsteht,

Fig. 116.



indem man a mit $2a$ vertauscht und die Coordinaten-Axen um einen Winkel von 45^0 dreht. Zwischen den neuen und den alten Coordinaten eines Punktes bestehen bei einer solchen Drehung der Axen bekanntlich die Gleichungen

$$(26.)\quad \begin{cases} \xi' = \xi\cos 45^0 + \eta\sin 45^0, \\ \eta' = -\xi\sin 45^0 + \eta\cos 45^0, \end{cases}$$

oder, weil $\cos 45^0$ und $\sin 45^0$ beide gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind,

$$(26\text{a.})\qquad \sqrt{2}\,.\,\xi' = \xi + \eta, \quad \sqrt{2}\,.\,\eta' = -\xi + \eta.$$

In diesem Falle erhält man deshalb

$$(27.)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\,.\,\xi' = a(\cos^3 t + 3\cos^2 t\sin t + 3\cos t\sin^2 t + \sin^3 t) \\ \qquad\quad = a(\cos t + \sin t)^3, \end{cases}$$

$$(28.)\quad \begin{cases} \sqrt{2}\,.\,\eta' = a(\sin^3 t - 3\sin^2 t\cos t + 3\sin t\cos^2 t - \cos^3 t) \\ \qquad\quad = a(\sin t - \cos t)^3. \end{cases}$$

Da aber

$$\cos(t - 45^0) = \cos t\cos 45^0 + \sin t\sin 45^0 = \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}},$$

$$\sin(t - 45^0) = \sin t\cos 45^0 - \cos t\sin 45^0 = \frac{\sin t - \cos t}{\sqrt{2}}$$

ist, so wird

$$(29.)\qquad \begin{cases} (\cos t + \sin t)^3 = 2\sqrt{2}\,.\,\cos^3(t - 45^0), \\ (\sin t - \cos t)^3 = 2\sqrt{2}\,.\,\sin^3(t - 45^0). \end{cases}$$

Bezeichnet man noch $t - 45^0$ mit t', so gehen die Gleichungen (27.) und (28.) über in

$$(30.)\qquad \xi' = 2a\cos^3 t', \quad \eta' = 2a\sin^3 t'.$$

Hieraus erkennt man die Richtkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

Aufgabe 7. Man soll die Evolute der *Epicykloide*

(31.) $x = a[m\cos t - \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 117.)

Auflösung. Nach den Gleichungen (65.), (66.) und (67.) in § 89 wird für die Epicykloide

(32.) $\xi = a_1[m\cos t + \cos(mt)], \quad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)],$

wobei

(33.) $$a_1 = \frac{na}{l} = \frac{n}{n+2}a$$

ist. Diese Gleichungen sind den Gleichungen der ursprünglichen Curve so ähnlich, dass die Vermuthung nahe liegt, die Evolute sei eine der Epicykloide verwandte Curve. Durch Transformation der Coordinaten kann man diese Vermuthung bestätigen. Dreht man nämlich die Coordinaten-Axen um den Winkel v, so sind die neuen Coordinaten eines Punktes bekanntlich durch die Gleichungen

(34.) $\xi' = \xi\cos v + \eta\sin v, \quad \eta' = -\xi\sin v + \eta\cos v$

gegeben. In dem vorliegenden Falle erhält man daher

$$\xi' = a_1[m(\cos t\cos v + \sin t\sin v) + (\cos mt\cos v + \sin mt\sin v)],$$
$$\eta' = a_1[m(-\cos t\sin v + \sin t\cos v) + (-\cos mt\sin v + \sin mt\cos v)],$$

oder

(35.) $$\begin{cases} \xi' = a_1[m\cos(t-v) + \cos(mt-v)], \\ \eta' = a_1[m\sin(t-v) + \sin(mt-v)]. \end{cases}$$

Setzt man nun

(36.) $$v = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t - v = t',$$

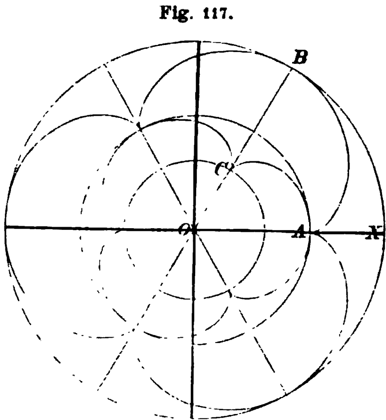
so wird, da $m = n + 1$ ist,

$$t = t' + \frac{\pi}{n}, \quad mt - v = mt' + \pi,$$

also

$$\cos(mt - v) = -\cos(mt'),$$
$$\sin(mt - v) = -\sin(mt').$$

Fig. 117.



Deshalb gehen die Gleichungen (35.) über in

$$(37.)\quad \begin{cases} \xi' = a_1[m\cos t' - \cos(mt')], \\ \eta' = a_1[m\sin t' - \sin(mt')]. \end{cases}$$

Die Evolute ist also wieder eine Epicykloide derselben Art, nur die Dimension hat sich in dem Verhältniss von $n+2$ zu n verkleinert, und die Richtung der Axen hat sich um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ (oder $-\frac{\pi}{n}$) *gedreht.*

Jetzt kann man auch leicht die Länge des Epicykloiden-Bogens berechnen. In Figur 117 entsteht der Bogen AB durch Abwickelung des Bogens AC, folglich muss der Bogen AC dieselbe Länge haben wie die Gerade CB. Nun ist aber

$$CB = OB - OC = (n+2)a - \frac{n^2}{n+2}a$$

$$= \frac{4(n+1)a}{n+2} = \frac{4(n+1)a_1}{n}.$$

Deshalb wird

$$(38.)\quad \widehat{AC} = \frac{4(n+1)a_1}{n}, \qquad \widehat{AB} = \frac{4(n+1)a}{n}.$$

Ist n eine ganze Zahl, so besteht die Curve aus $2n$ Bögen, welche dem Bogen AB congruent sind; der Umfang U der ganzen Epicykloide wird dann $8(n+1)a$.

Ist z. B., der Figur 117 entsprechend, $n = 3$, so wird

$$(38a.)\quad \widehat{AB} = \frac{16a}{3}, \quad U = 32a.$$

Aufgabe 8. Man soll die Evolute der *Hypocykloide*

$$(39.)\quad x = a[m\cos t + \cos(mt)], \quad y = a[m\sin t - \sin(mt)]$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 116.)

Auflösung. Nach den Gleichungen (76.) und (77.) in § 89 wird für die Hypocykloide

(40.) $\xi = a_1[m\cos t - \cos(mt)], \quad \eta = a_1[m\sin t + \sin(mt)],$
wobei

(41.) $$a_1 = \frac{na}{l} = \frac{na}{n-2}$$

ist. **Durch Drehung der Coordinaten-Axen um den Winkel** v findet **man in diesem** Falle

(42.) $$\begin{cases} \xi' = a_1[m\cos(t-v) - \cos(mt+v)], \\ \eta' = a_1[m\sin(t-v) + \sin(mt+v)]. \end{cases}$$

Setzt man jetzt wieder

(43.) $$v = \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad t - v = t',$$

so wird, da hier $m = n - 1$ ist,

$$t = t' + \frac{\pi}{n}, \quad mt + v = mt' + \pi,$$

$$\cos(mt + v) = -\cos(mt'), \quad \sin(mt + v) = -\sin(mt').$$

Deshalb gehen die Gleichungen (42.) über in

(44.) $\xi' = a_1[m\cos t' + \cos(mt')], \quad \eta' = a_1[m\sin t' - \sin(mt')].$

Die Evolute ist also wieder eine Hypocykloide derselben Art, nur die Dimension hat sich in dem Verhältniss von $n - 2$ *zu* n *vergrössert, und die Richtung der Axen hat sich um den Winkel* $\frac{\pi}{n}$ *gedreht.*

Auch hier kann man sehr leicht die Länge des Bogens berechnen und findet, ähnlich wie bei der vorigen Aufgabe, wenn n eine ganze Zahl ist, dass der Umfang der ganzen Hypocykloide

(45.) $$U = 8(n-1)a$$

ist.

Als Beispiel kann hier die *Astroide* dienen, welche man für den Fall $n = 4$ erhält. (Vergl. Fig. 116.)

Aufgabe 9. Man soll die Evolute der *Kreisevolvente*

(46.) $$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

aufsuchen. (Vergl. Fig. 81 auf Seite 364.)

Auflösung. Schon aus der Entstehung der Kreisevolvente durch Abwickelung eines Kreises kann man schliessen, dass dieser Kreis die Evolute sein muss. (Vergl. Satz 4 in § 90.)

Dieser Schluss wird auch durch die Rechnung bestätigt, denn nach den Gleichungen (83.) und (84.) in § 89 wird für die Kreisevolvente

$$\xi = a\cos t, \qquad \eta = a\sin t, \tag{47.}$$

also

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2, \tag{48.}$$

und dies ist die Gleichung des Kreises, durch dessen Abwickelung die Kreisevolvente entstanden ist.

XI. Abschnitt.

Untersuchung von Curven, welche auf ein Polarcoordinaten-System bezogen sind.

§ 92.

Tangenten und Normalen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 108—113.)

Bei der Bestimmung der Lage eines Punktes durch Polarcoordinaten ist eine Gerade OX gegeben und auf dieser Geraden ein Punkt O; den Punkt O nennt man den „*Nullpunkt*" oder den „*Pol*", und die Gerade OX nennt man die „*Anfangsrichtung*" oder die „*Polar-Axe* des Coordinaten-Systems."

Fig. 118.

Ist nun ein Punkt P beliebig gegeben, so nennt man die *positive* Strecke $OP = r$ den „*Radius vector*" oder „*Fahrstrahl*" und den Winkel φ, welchen OP mit der Anfangsrichtung bildet, das „*Argument* des Punktes P". (Vergl. Fig. 118.)

Durch die Lage des Punktes P sind daher die beiden Coordinaten r und φ gegeben, und umgekehrt: *Durch die beiden Coordinaten r und φ ist die Lage des Punktes P gegeben.*

Macht man O zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems und die Anfangsrichtung OX zur X-Axe, so ist der Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten, wie man ohne Weiteres aus der Figur erkennt, gegeben durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi. \tag{1.}$$

Diese Gleichungen bleiben auch dann noch richtig, wenn $\varphi > \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn φ nicht mehr ein spitzer Winkel ist.

Dabei wird x negativ für $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, und y wird negativ für $\pi < \varphi < 2\pi$.

Daraus folgen dann die Gleichungen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.}$$

welche den Uebergang von Polarcoordinaten zu rechtwinkligen Coordinaten vermitteln.

Ist nun zwischen r und φ eine Gleichung von der Form

$$F(r, \varphi) = 0, \quad \text{oder} \quad r = f(\varphi) \tag{3.}$$

gegeben, so entspricht dieser Gleichung eine Curve.

Auf einer solchen Curve (Fig. 119) seien P und P_1 zwei benachbarte Punkte, deren Coordinaten mit r, φ, bezw. mit $r + dr$, $\varphi + d\varphi$ bezeichnet werden mögen; dabei soll durch die Bezeichnung sogleich ausgedrückt werden, dass die beiden Punkte einander beliebig nahe rücken dürfen. Beschreibt man dann um O mit dem Halbmesser OP gleich r einen Kreisbogen, welcher den Radius vector OP_1 im Punkte Q treffen möge, dann ist

Fig. 119.

$$OP_1 = r + dr, \tag{4.}$$

also

$$OQ = r, \quad QP_1 = dr, \quad QP = rd\varphi. \tag{5.}$$

Wenn die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, so darf man das kleine rechtwinklige Dreieck PQP_1 als geradlinig betrachten und erhält nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\overline{PP_1}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QP_1}^2,$$

oder, wenn man den unendlich kleinen Bogen PP_1 wieder mit ds bezeichnet,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \tag{6.}$$

Ferner ist

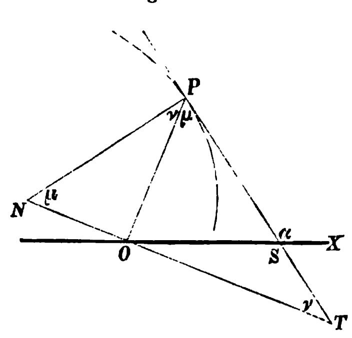
$$\operatorname{tg} QP_1P = \frac{QP}{QP_1} = \frac{rd\varphi}{dr}. \tag{7.}$$

Der Winkel QP_1P ist der Winkel, den die Gerade P_1P mit dem Radius vector OP_1 bildet; rücken aber die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe, so wird P_1P die *Tangente* der Curve im Punkte P (oder P_1), und der Radius vector OP_1 fällt mit OP zusammen. Bezeichnet man also den Winkel, welchen die Tangente im Punkte P mit dem Radius vector OP bildet, mit μ, so wird nach Gleichung (7.)

$$\text{(7a.)} \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{r d\varphi}{dr}.$$

Nennt man den Winkel, den die Tangente mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, wieder α, so ist, wie man ohne Weiteres aus Fig. 120 erkennt;

Fig. 120.



$$\alpha = \varphi + \mu,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi + \mu)$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\mu}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\mu}$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi + \dfrac{r d\varphi}{dr}}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \dfrac{r d\varphi}{dr}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\varphi \, . \, dr$ multiplicirt,

$$\text{(8.)} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi \, . \, dr + r\cos\varphi \, . \, d\varphi}{\cos\varphi \, . \, dr - r\sin\varphi \, . \, d\varphi}.$$

Durch den Uebergang von rechtwinkligen Coordinaten zu Polarcoordinaten werden die in den Gleichungen (6.) und (8.) enthaltenen Resultate bestätigt. Da r durch Gleichung (3.) als Function von φ erklärt ist, so muss man auch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

als Functionen von φ betrachten und erhält durch Differentiation

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi$$

oder

$$(9.)\quad \begin{cases} dx = \cos\varphi \,.\, dr - r\sin\varphi \,.\, d\varphi, \\ dy = \sin\varphi \,.\, dr + r\cos\varphi \,.\, d\varphi. \end{cases}$$

Erhebt man diese beiden Gleichungen in's Quadrat und addirt sie, so findet man wieder wie in Gleichung (6.)

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2;$$

durch Division erhält man in Uebereinstimmung mit Gleichung (8.)

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varphi \,.\, dr + r\cos\varphi \,.\, d\varphi}{\cos\varphi \,.\, dr - r\sin\varphi \,.\, d\varphi}.$$

In einem beliebigen Punkte P der Curve seien die Tangente und die Normale gezogen (Fig. 120), welche die im Punkte O auf dem Radius vector OP errichtete Senkrechte bezw. in den Punkten T und N treffen mögen. Man nennt dann

NP die *Polar-Normale* (N),
NO die *Polar-Subnormale* (Sn),
PT die *Polar-Tangente* (T),
OT die *Polar-Subtangente* (St).

Bezeichnet man den Complementwinkel von μ mit ν, so erkennt man aus Figur 120, dass ν auch der Complementwinkel von ONP ist. Deshalb wird

$$\sphericalangle\, ONP = \mu,$$

und man erhält mit Rücksicht auf Gleichung (7a.)

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}ONP = \frac{OP}{NO} = \frac{r}{NO} = \frac{rd\varphi}{dr},$$

$$(10.)\quad NO = Sn = \frac{dr}{d\varphi};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}OPT = \frac{OT}{OP} = \frac{OT}{r},$$

$$(11.)\quad OT = St = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr};$$

$$\overline{NP}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{OP}^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2,$$

$$NP = N = \frac{ds}{d\varphi}; \tag{12.}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg} PNT = \frac{PT}{NP},$$

$$PT = T = N\operatorname{tg}\mu = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{rds}{dr}. \tag{13.}$$

§ 93.

Anwendungen auf einzelne Curven.

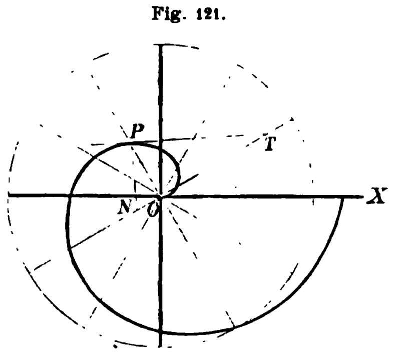
Aufgabe 1. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *Archimedische Spirale*

$$r = a\varphi \tag{1.}$$

berechnen.

Auflösung. Die Archimedische Spirale entsteht, indem eine gerade Linie sich um einen ihrer Punkte O dreht, während ein anderer Punkt P auf ihr mit gleichmässiger Geschwindigkeit fortrückt. Dadurch ist es auch leicht, die Curve punktweise zu construiren. (Vergl. Fig. 121.)

Fig. 121.



Aus Gleichung (1.) folgt nun

$$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = a, \tag{2.}$$

d. h. *die Subnormale ist in allen Punkten der Curve constant*; deshalb kann man in jedem beliebigen Punkte der Curve sehr leicht Tangente und Normale construiren, auch wenn die Curve nicht gezeichnet vorliegt. Ferner ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{r}{a} = \varphi. \tag{3.}$$

Für φ gleich 0 werden auch r und μ gleich 0, d. h. die Curve geht durch den Anfangspunkt des Coordinaten-Systems und die Tangente in diesem Punkte der Curve fällt mit der Anfangsrichtung zusammen.

(4.) $$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{a} = a\varphi^2,$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = a^2 + r^2 = a^2(1 + \varphi^2),$$

also

(5.) $$N = \frac{ds}{d\varphi} = a\sqrt{1 + \varphi^2};$$

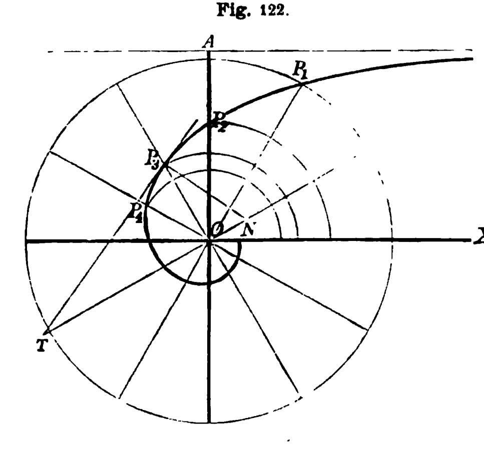
(6.) $$T = \frac{rds}{dr} = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Aufgabe 2. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für die *hyperbolische Spirale*

(7.) $$r\varphi = a$$

berechnen.

Fig. 122.



Auflösung. Beschreibt man um den Anfangspunkt O eine Schaar von Kreisen und schneidet auf ihnen, von der Anfangsrichtung (Polar-Axe) an gerechnet, Bögen von gleicher Länge a ab, so ist der geometrische Ort der Endpunkte, wie man aus Gleichung (7.) erkennt, eine hyperbolische Spirale. (Vergl. Fig. 122.) Da die Curve unendlich viele, immer enger werdende Windungen um den Nullpunkt beschreibt, so nennt man den Nullpunkt „einen *asymptotischen Punkt*“.

Aus Gleichung (7.) folgt

(7a.) $$r = a\varphi^{-1},$$

also

(8.) $$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = -a\varphi^{-2} = -\frac{r^2}{a},$$

(9.) $$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{a}{r} = -\varphi,$$

(10.) $$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = -a.$$

Bei der hyperbolischen Spirale ist also die Subtangente constant; deshalb kann man für jeden beliebigen Punkt der Curve sehr leicht Tangente und Normale construiren.

Ferner ist

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = r^2 + \frac{r^4}{a^2} = \frac{r^2}{a^2}(a^2 + r^2),$$

also

(11.) $$N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{a}\sqrt{a^2 + r^2},$$

(12.) $$T = \frac{rds}{dr} = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = -\sqrt{a^2 + r^2}.$$

Für φ gleich 0 ist r unendlich gross; man kann aber auch dann noch die Tangente an den zugehörigen Curvenpunkt legen, obgleich er unendlich fern ist. Eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich fern liegt, heisst bekanntlich eine *Asymptote.* Die Asymptote der hyperbolischen Spirale ist die Gerade, welche man im Abstande a parallel zur Anfangsrichtung legen kann. Denn r fällt für φ gleich 0 in die Anfangsrichtung, die Subtangente also in die Gerade, welche im Anfangspunkte auf der Anfangsrichtung senkrecht steht, und ihre Länge ist nach Gleichung (10.) gleich $-a$.

Aufgabe 3. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *parabolischen Spirale*

(13.) $$r^2 = a^2\varphi, \quad \text{oder} \quad r = a\sqrt{\varphi} = a\varphi^{\frac{1}{2}}$$

aufsuchen.

Auflösung. Aus Gleichung (13.) folgt

(14.) $$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{2}\varphi^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{2r},$$

(15.) $$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{2r^2}{a^2} = 2\varphi;$$

deshalb wird ebenso wie bei der Archimedischen Spirale

$$r = 0, \ \mu = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = 0.$$

$$(16.)\qquad St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{2r^3}{a^2} = 2r\varphi,$$

$$(17.)\qquad N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2r}\sqrt{a^4 + 4r^4} = \frac{a}{2}\sqrt{4\varphi + \varphi^{-1}},$$

$$(18.)\qquad T = N \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{a^2}\sqrt{a^4 + 4r^4} = a\sqrt{\varphi(1 + 4\varphi^2)}.$$

Aufgabe 4. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der *allgemeinen Spirale*

$$(19.)\qquad r = a\varphi^n$$

aufsuchen.

Auflösung. Aus Gleichung (19.) folgt

$$(20.)\qquad Sn = \frac{dr}{d\varphi} = na\varphi^{n-1},$$

$$(21.)\qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{\varphi}{n},$$

$$(22.)\qquad St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{a\varphi^{n+1}}{n},$$

$$(23.)\qquad N = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{n^2a^2\varphi^{2n-2} + a^2\varphi^{2n}} = a\varphi^{n-1}\sqrt{n^2 + \varphi^2},$$

$$(24.)\qquad T = N \operatorname{tg}\mu = \frac{a\varphi^n}{n}\sqrt{n^2 + \varphi^2} = \frac{r}{n}\sqrt{n^2 + \varphi^2}.$$

Man erkennt, dass in dieser Aufgabe die ersten drei Aufgaben als besondere Fälle enthalten sind, wenn man bezw.

$$n = +1, \quad n = -1, \quad n = +\tfrac{1}{2}$$

setzt.

Aufgabe 5. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente für einen beliebigen Punkt der *logarithmischen Spirale*

$$(25.)\qquad r = e^{a\varphi}$$

berechnen.

Auflösung. Aus Gleichung (25.) folgt

$$(26.)\qquad Sn = \frac{dr}{d\varphi} = ae^{a\varphi} = ar.$$

Die Subnormale ist also dem Radius vector proportional, deshalb beschreibt der Endpunkt N der Subnormale eine Curve,

welche der ursprünglichen Curve ähnlich ist. (Vergl. Fig. 123.) Da die Subnormale $ON = r'$ mit der Anfangsrichtung den Winkel

$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$ bildet, so wird die Gleichung der vom Punkte N beschriebenen Curve

Fig. 123.

(26a.) $r' = ae^{a\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)}$.

Führt man jetzt noch die Grössen α und φ'' durch die Gleichungen

$la = a\alpha$, oder $a = e^{a\alpha}$,

$$\varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2} = \varphi''$$

ein, so geht Gleichung (26a.) über in

$$(26b.)\qquad r' = e^{a\left(\varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = e^{a\varphi''}.$$

Daraus erkennt man, dass die von dem Punkte N beschriebene Curve, wenn man sie um den Winkel $\alpha - \frac{\pi}{2}$ dreht, sogar mit der ursprünglichen Curve zusammenfällt und deshalb mit derselben congruent ist.

Ferner ist

$$(27.)\qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{1}{a}, \quad \mu = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right);$$

der Winkel μ, den eine beliebige Tangente mit dem zugehörigen Radius vector bildet, ist also constant.

$$(28.)\qquad St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = \frac{r}{a},$$

folglich ist auch die Subtangente dem Radius vector proportional, so dass der Endpunkt T der Subtangente gleichfalls eine Curve beschreibt, welche der ursprünglichen Curve ähnlich ist. (Vergl. Fig. 123.) Auch von dieser Curve kann man zeigen, dass sie der ursprünglichen Curve sogar congruent ist.

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^2(1 + a^2),$$

also

(29.) $$N = \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1 + a^2},$$

(30.) $$T = N\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \frac{r}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

Es sind daher auch Normale und Tangente selbst dem Radius vector proportional.

Aufgabe 6. Man soll Subnormale, Subtangente, Normale und Tangente der Curve

(31.) $$r^m = a^m \cos(m\varphi)$$

aufsuchen.

Auflösung. Da in Gleichung (31.) die Grösse m noch unendlich viele Werthe haben darf, so sind in dieser Gleichung unendlich viele Curven inbegriffen, von denen einzelne hervorgehoben werden mögen.

I. $m = 1$. Die Gleichung der Curve ist

(32.) $$r = a\cos\varphi, \quad \text{oder} \quad r^2 = ar\cos\varphi,$$

also, wenn man zu rechtwinkligen Coordinaten übergeht,

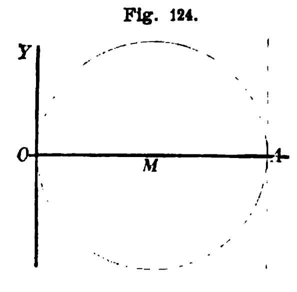
(32a.) $$x^2 + y^2 = ax,$$

und dies ist die Gleichung eines *Kreises* mit dem Halbmesser $\frac{a}{2}$, dessen Mittelpunkt die Coordinaten

$$\xi = \frac{a}{2}, \quad \eta = 0$$

hat. (Vergl. Fig. 124.)

Fig. 124.



II. $m = -1$. Die Gleichung der Curve ist

(33.) $$r^{-1} = a^{-1}\cos\varphi,$$

oder

$$r\cos\varphi = a,$$

also, wenn man zu rechtwinkligen Coordinaten übergeht,

(33a.) $$x = a.$$

Dies ist die Gleichung einer *Geraden*, welche im Abstande a parallel zur Y-Axe gezogen ist. (Vergl. Fig. 124.)

III. $m = 2$. Die Gleichung der Curve ist

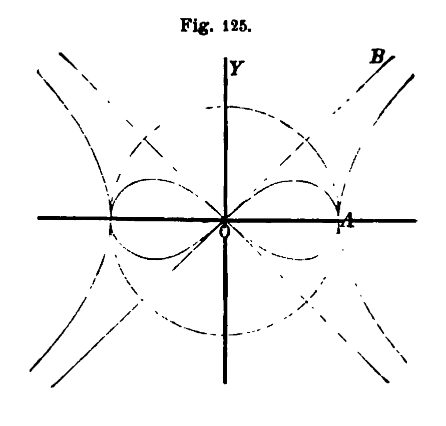
(34.) $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$, oder $r^4 = a^2(r^2 \cos^2\varphi - r^2 \sin^2\varphi)$,

also, wenn man zu rechtwinkligen Coordinaten übergeht,

(34a.) $$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Dies ist die Gleichung der *Lemniscate*, einer Curve, deren Gestalt man sehr leicht aus den Gleichungen (34.) und (34a.) erkennen kann. Zunächst folgt aus Gleichung (34.), dass die Curve innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser a liegen muss, denn es ist $r \leqq a$. (Vergl. Fig. 125.) Aus Gleichung (34a.) erkennt man sodann, dass die Coordinaten-Axen Symmetrie-Axen der Curve sind, weil nur die Quadrate von x und y in der Gleichung vorkommen.

Fig. 125.



Für $\varphi = 0$ wird $r = a$; wächst φ, so wird r kleiner und nimmt ab bis zu $r = 0$, wenn der Winkel $\varphi = 45^0$ geworden ist. Liegt φ zwischen 45^0 und 90^0, so wird r^2 negativ, r selbst also imaginär; deshalb liegt kein reeller Punkt der Curve zwischen der Geraden OB mit der Gleichung $y = x$ und der Y-Axe.

IV. $m = -2$. Die Gleichung der Curve ist

(35.) $$r^{-2} = a^{-2} \cos(2\varphi), \quad \text{oder} \quad r^2 \cos(2\varphi) = a^2,$$

also

(35a.) $$r^2 \cos^2\varphi - r^2 \sin^2\varphi = a^2, \quad \text{oder} \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Dies ist die Gleichung der *gleichseitigen Hyperbel*. (Vergl. Fig. 125.)

V. $m = +\frac{1}{2}$. Die Gleichung der Curve ist

$$r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{oder} \quad r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right); \tag{36.}$$

daraus folgt

$$2r^2 = 2ar\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = ar(1 + \cos\varphi) = ar + ar\cos\varphi,$$

$$2r^2 - ax = ar, \tag{37.}$$

$$4r^4 - 4axr^2 + a^2x^2 = a^2r^2 = a^2x^2 + a^2y^2,$$

oder

$$4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ax) = a^2y^2. \tag{36a.}$$

Dies ist die Gleichung der *Cardioide*. Um die Uebereinstimmung dieser Curve mit der bei den Epicykloiden als Cardioide bezeichneten Curve nachzuweisen, setze man

$$\varphi = \pi - t,$$

dann folgt aus den Gleichungen (36.) und (37.)

$$2r = 2a\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = a(1 - \cos t), \tag{38.}$$

$$2x = 2r\cos\varphi = -a\cos t(1 - \cos t), \tag{39.}$$

$$2y = 2r\sin\varphi = a\sin t(1 - \cos t). \tag{40.}$$

Transformirt man noch die Coordinaten, indem man

$$4x' = a - 4x$$

setzt, so erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} 4x' = a(1 + 2\cos t - 2\cos^2 t) = a[2\cos t - \cos(2t)], \\ 4y = a(2\sin t - 2\sin t\cos t) = a[2\sin t - \sin(2t)]. \end{array}\right. \tag{41.}$$

Diese Gleichungen gehen in die damals aufgestellten Gleichungen der Cardioide über, wenn man a mit $4a$ vertauscht. (Vergl. Fig. 79 auf Seite 360.)

VI. $m = -\frac{1}{2}$. Die Gleichung der Curve ist

$$r^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{oder} \quad r\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = a, \tag{42.}$$

$$2r\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = r + r\cos\varphi = 2a, \quad \text{oder} \quad r = 2a - x,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 4a^2 - 4ax + x^2,$$

also

(42a.) $$y^2 = 4a^2 - 4ax = 4a(a - x).$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Axe die X-Axe ist, und deren Scheitel die Coordinaten $x = a$, $y = 0$ hat.

Allgemein folgt aus der Gleichung (31.)

$$mr^{m-1}\frac{dr}{d\varphi} = -ma^m \sin(m\varphi),$$

also

(43.) $$Sn = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^m \sin(m\varphi)}{r^{m-1}} = -\frac{\sqrt{a^{2m} - r^{2m}}}{r^{m-1}},$$

oder

(43a.) $$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^m r \sin(m\varphi)}{r^m} = -r\,\mathrm{tg}(m\varphi);$$

(44.) $$\mathrm{tg}\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = -\mathrm{ctg}(m\varphi)$$

$$= \mathrm{ctg}(\pi - m\varphi) = \mathrm{tg}\left(m\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

folglich ist

(45.) $$\mu + \frac{(2h+1)\pi}{2} = m\varphi,$$

wobei h eine ganze, passend zu wählende Zahl ist. Dies giebt den Satz:

Der Winkel, den der Radius vector mit der Normale bildet, ist m-mal so gross wie der Winkel, den er mit der Anfangsrichtung bildet.

(46.) $$St = \frac{r^2 d\varphi}{dr} = -r\,\mathrm{ctg}(m\varphi),$$

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 = \frac{a^{2m} - r^{2m}}{r^{2m-2}} + r^2 = \frac{a^{2m}}{r^{2m-2}},$$

(47.) $$N = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a^m}{r^{m-1}} = \frac{r}{\cos(m\varphi)},$$

(48.) $$T = N\,\mathrm{tg}\mu = -\frac{r}{\sin(m\varphi)}.$$

§ 94.

Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkts-Curven.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 114.)

Ist die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten gegeben, so kann man immer den Radius vector r als eine Function vom Argumente φ betrachten; deshalb sind auch

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi \tag{1.}$$

Functionen von φ, so dass man durch Differentiation die folgenden Gleichungen erhält

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi, \tag{2.}$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi, \tag{3.}$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\cos\varphi - 2\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi - r\cos\varphi, \tag{4.}$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi, \tag{5.}$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2, \tag{6.}$$

$$\frac{dx}{d\varphi}\frac{d^2y}{d\varphi^2} - \frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}. \tag{7.}$$

Vertauscht man in den Formeln 106 und 107 der Tabelle t mit φ, setzt die hier gefundenen Werthe ein und multiplicirt in den Brüchen Zähler und Nenner mit $d\varphi^3$, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= r\cos\varphi - \frac{ds^2(r\cos\varphi d\varphi + dr\,.\sin\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi}, \\ \eta &= r\sin\varphi + \frac{ds^2(-r\sin\varphi d\varphi + dr\,.\cos\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi}, \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

$$\varrho = \pm\frac{ds^3}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)\,d\varphi}. \tag{9.}$$

Wenn man in diesen Gleichungen den Werth von r als Function von φ einsetzt, so sind ξ und η als Functionen der dritten Veränderlichen φ dargestellt, was für die Untersuchung der Krümmungsmittelpunkts-Curve oder Evolute ausreicht. Man kann

aber auch noch φ aus den beiden Gleichungen (8.) eliminiren und erhält dadurch eine Gleichung zwischen ξ und η.

Will man noch die Evolute in Polarcoordinaten darstellen, so hat man in dieser Gleichung zu setzen

$$\xi = r'\cos\varphi', \quad \eta = r'\sin\varphi'. \tag{10.}$$

§ 95.

Anwendungen auf einzelne Curven.

Aufgabe 1. Man soll den Krümmungskreis der *Archimedischen Spirale*

$$r = a\varphi \tag{1.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 121 auf Seite 439.)

Auflösung. Aus Gleichung (1.) folgt

$$dr = ad\varphi, \quad d^2r = 0, \tag{2.}$$

also

$$ds^2 = r^2d\varphi^2 + dr^2 = a^2(1 + \varphi^2)d\varphi^2, \tag{3.}$$

$$r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r = a^2(2 + \varphi^2)d\varphi^2. \tag{4.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln 114 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = a\varphi\cos\varphi - \frac{a^2(1 + \varphi^2) \,.\, a(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi)}{a^2(2 + \varphi^2)},$$

$$\eta = a\varphi\sin\varphi + \frac{a^2(1 + \varphi^2) \,.\, a(-\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)}{a^2(2 + \varphi^2)},$$

oder

$$\xi = \frac{a[\varphi\cos\varphi - (1 + \varphi^2)\sin\varphi]}{2 + \varphi^2}, \tag{5.}$$

$$\eta = \frac{a[\varphi\sin\varphi + (1 + \varphi^2)\cos\varphi]}{2 + \varphi^2}, \tag{6.}$$

$$\varrho = \pm\frac{a(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \varphi^2}. \tag{7.}$$

Aufgabe 2. Man soll den Krümmungskreis der *allgemeinen Spirale*

$$r = a\varphi^n \tag{8.}$$

bestimmen.

Auflösung. Aus Gleichung (8.) folgt durch Differentiation

$$(9.)\qquad \frac{dr}{d\varphi} = na\varphi^{n-1},\quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = n(n-1)a\varphi^{n-2};$$

deshalb ist

$$(10.)\qquad ds^2 = r^2d\varphi^2 + dr^2 = a^2\varphi^{2n-2}(n^2+\varphi^2)d\varphi^2,$$

$$(11.)\qquad r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r = a^2\varphi^{2n-2}[n(n+1)+\varphi^2]d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 114 der Tabelle ein, so erhält man

$$(12.)\qquad \xi = \frac{n[r\cos\varphi - (n^2+\varphi^2)a\varphi^{n-1}\sin\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2},$$

$$(13.)\qquad \eta = \frac{n[r\sin\varphi + (n^2+\varphi^2)a\varphi^{n-1}\cos\varphi]}{n(n+1)+\varphi^2},$$

$$(14.)\qquad \varrho = \pm\frac{a\varphi^{n-1}(n^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{n(n+1)+\varphi^2}.$$

Aufgabe 3. Man soll den Krümmungskreis und die Evolute der *logarithmischen Spirale*

$$(15.)\qquad r = e^{a\varphi}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 123 auf Seite 443.)

Auflösung. Aus Gleichung (15.) folgt durch Differentiation

$$(16.)\qquad \frac{dr}{d\varphi} = e^{a\varphi}\,.\,a = ar,\quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = a\frac{dr}{d\varphi} = a^2r;$$

deshalb ist

$$(17.)\qquad ds^2 = r^2d\varphi^2 + dr^2 = r^2(1+a^2)d\varphi^2,$$

$$(18.)\qquad r^2d\varphi^2+2dr^2-rd^2r = r^2(1+2a^2-a^2)d\varphi^2 = r^2(1+a^2)d\varphi^2.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 114 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = r\cos\varphi - \frac{r^2(1+a^2)\,.\,r(\cos\varphi + a\sin\varphi)}{r^2(1+a^2)},$$

$$\eta = r\sin\varphi + \frac{r^2(1+a^2)\,.\,r(-\sin\varphi + a\cos\varphi)}{r^2(1+a^2)},$$

oder

$$(19.)\qquad \xi = -ar\sin\varphi,\quad \eta = +ar\cos\varphi.$$

$$(20.)\qquad \varrho = \pm \frac{r^3(1+a^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2(1+a^2)} = \pm\, r\sqrt{1+a^2}.$$

Es war aber (nach § 93, Gleichung (29.)) auch die Normale

$$(21.)\qquad N = \frac{ds}{d\varphi} = r\sqrt{1+a^2},$$

folglich *ist der Krümmungshalbmesser gleich der Polar-Normale.* Der Krümmungsmittelpunkt fällt daher in Figur 123 mit N zusammen.

Nach den Gleichungen (19.) wird

$$(22.)\qquad \xi = -ay,\quad \eta = ax.$$

Hieraus erkennt man schon, dass die Evolute wieder eine *logarithmische Spirale* ist, bei der aber die Dimensionen a-mal so gross sind wie bei der gegebenen. Gleichzeitig sind auch noch die Coordinaten-Axen um einen Winkel von 90^0 gedreht. In § 93 (Seite 443) ist sogar gezeigt worden, dass die Evolute der gegebenen Curve *ähnlich* und ausserdem auch *congruent* ist.

Dasselbe Resultat findet man natürlich auch aus den Gleichungen (22.). Bezeichnet man nämlich die Polarcoordinaten der Evolute mit r' und φ', so ist

$$(23.)\qquad r'^2 = \xi^2 + \eta^2,\quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\eta}{\xi},$$

folglich wird in diesem Falle

$$(24.)\qquad r'^2 = a^2r^2,\quad \operatorname{tg}\varphi' = -\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}(-\varphi) = \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

oder

$$(24a.)\qquad r' = ar,\quad \varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \varphi' - \frac{\pi}{2},$$

also

$$(25.)\qquad r' = ar = ae^{a\varphi} = ae^{a\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\mathrm{l}r' = \mathrm{l}a + a\varphi' - a\frac{\pi}{2},$$

oder, wenn man $\frac{\mathrm{l}a}{a}$ mit α bezeichnet,

$$(26.)\qquad r' = e^{a\left(\varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Dreht man die Polar-Axe um den Winkel $\alpha - \frac{\pi}{2}$, so bildet r' mit der neuen Polar-Axe den Winkel

$$\varphi'' = \varphi' + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

und Gleichung (26.) geht über in

$$r' = e^{a\varphi''}. \tag{27.}$$

Aufgabe 4. Man soll den Krümmungskreis und die Evolute der *Lemniscate*

$$r^2 = a^2 \cos(2\varphi) \tag{28.}$$

bestimmen. (Vergl. Fig. 126.)

Auflösung. Durch Differentiation folgt aus Gleichung (28.)

$$r\frac{dr}{d\varphi} = -a^2 \sin(2\varphi) = -r^2 \operatorname{tg}(2\varphi), \tag{29.}$$

und wenn man diese Gleichung nochmals differentiirt,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = -2a^2\cos(2\varphi) = -2r^2. \tag{30.}$$

Deshalb wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (28.) und (29.)

$$r^2ds^2 = r^2(r^2d\varphi^2 + dr^2) = r^4d\varphi^2 + r^2dr^2 = a^4d\varphi^2,$$

oder

$$ds^2 = \frac{a^4}{r^2}d\varphi^2. \tag{31.}$$

Ferner findet man aus Gleichung (30.)

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] =$$

$$2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + 2r^2 = 2\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2,$$

folglich ist bei der Lemniscate

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 3\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{3a^4}{r^2}. \tag{32.}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln Nr. 114 der Tabelle ein, so erhält man

$$\xi = r\cos\varphi - \tfrac{1}{3}\left(r\cos\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cdot\sin\varphi\right),$$

$$\eta = r\sin\varphi + \tfrac{1}{3}\left(-r\sin\varphi + \frac{dr}{d\varphi}\cdot\cos\varphi\right),$$

oder

$$(33.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{a^2}{3r}[2\cos(2\varphi)\cos\varphi + \sin(2\varphi)\sin\varphi] = \dfrac{2a^2\cos^3\varphi}{3r}, \\ \eta = \dfrac{a^2}{3r}[2\cos(2\varphi)\sin\varphi - \sin(2\varphi)\cos\varphi] = -\dfrac{2a^2\sin^3\varphi}{3r}, \end{cases}$$

$$(34.)\quad \varrho = \pm\tfrac{1}{3}\frac{ds}{d\varphi} = \pm\frac{a^2}{3r}.$$

Fig. 126.

Aus den Gleichungen (33.) folgt

$$(35.)\quad \begin{aligned} \cos\varphi &= \left(\frac{3r\xi}{2a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ \sin\varphi &= -\left(\frac{3r\eta}{2a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{3r}{2a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right) = 1,$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \left(\frac{3r}{2a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = \cos(2\varphi) = \frac{r^2}{a^2},$$

$$(36.)\quad \xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2a^2}{3r}\right)^{\frac{2}{3}},\quad \xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}} = \frac{r^2}{a^2}\left(\frac{2a^2}{3r}\right)^{\frac{2}{3}},$$

folglich ist

$$(37.)\quad 9\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = 4a^2.$$

Den beiden Scheiteln A_1 und A_2 der Lemniscate entsprechen die Spitzen S_1 und S_2 der Evolute, wobei

$$(38.)\quad S_2O = OS_1 = \tfrac{2}{3}a.$$

XII. Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

§ 96.

Einleitung in die Determinanten-Theorie.

Für viele Untersuchungen in der höheren Mathematik gewährt die Anwendung der Determinanten eine wesentliche Erleichterung, einerseits dadurch, dass die Rechnungen kürzer werden, andererseits dadurch, dass die Resultate eine übersichtlichere und leichter zu merkende Form erhalten.

Deshalb soll hier ein kurzer Abriss der Determinanten-Theorie eingeschaltet werden.

Auf die Ausdrücke, welche man Determinanten nennt, ist man durch die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten geführt worden. Sind z. B. die beiden Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

mit den beiden Unbekannten x_1 und x_2 gegeben, so findet man bekanntlich durch Elimination

$$(2.)\qquad x_1 = \frac{c_1a_{22} - c_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{-c_1a_{21} + c_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Den gemeinschaftlichen Nenner dieser beiden Ausdrücke, nämlich die Grösse

$$(3.)\qquad \varDelta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

nennt man „die *Determinante*" der Coefficienten der beiden Gleichungen (1.). Die Determinante wird daher auch so ge-

schrieben, dass man die Coefficienten in derselben Reihenfolge wie in den gegebenen Gleichungen aufschreibt und zwischen zwei senkrechte Striche einschliesst.

Sind *drei* lineare Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

gegeben, so findet man bei der Auflösung für die drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 Werthe, welche den gemeinschaftlichen Nenner

$$(5.)\qquad \Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

haben. Diesen Nenner, welcher eine „*Determinante dritter Ordnung*“ genannt wird, schreibt man wieder in der Form

$$(5a.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

wobei die Coefficienten der gegebenen Gleichungen zwischen zwei senkrechte Striche eingeschlossen sind. Aus Gleichung (5.) erkennt man, dass

$$\Delta = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$$

ist, wobei sich die Summation über alle Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma$ der Zahlen 1 2 3 erstreckt, und wobei das Vorzeichen $(-1)^\lambda$ gleich $+1$ oder -1 ist, jenachdem die Permutationsform $\alpha\,\beta\,\gamma$ aus 1 2 3 durch eine *gerade* oder *ungerade* Anzahl von Vertauschungen von je 2 Zahlen hervorgeht. Demnach sind die Glieder

$$a_{11}a_{22}a_{33},\quad a_{12}a_{23}a_{31},\quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

mit dem Vorzeichen + zu nehmen, weil die Reihenfolge der zweiten Indices

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2

bezw. durch 0, 2, 2

solche Vertauschungen von je 2 Zahlen aus der Permutationsform 1 2 3 hervorgehen. Vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2 mit einander, so erhält man 2 1 3, und vertauscht man

dann die Zahlen 1 und 3 mit einander, so erhält man 2 3 1. Vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1, und vertauscht man dann die Zahlen 1 und 2, so erhält man 3 1 2.

Die Glieder

$$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}, \quad a_{12}\,a_{21}\,a_{33}, \quad a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

dagegen sind mit dem Vorzeichen — zu nehmen, weil die Permutationsformen

$$1\ 3\ 2, \quad 2\ 1\ 3, \quad 3\ 2\ 1$$

aus 1 2 3 durch eine einzige solche Vertauschung hervorgehen; vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 2 und 3, so erhält man 1 3 2, vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2, so erhält man 2 1 3, und vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1.

In ähnlicher Weise kann man „*Determinanten höherer Ordnung*" erklären. Der Erklärung mögen aber einige Sätze aus der Permutationslehre vorangeschickt werden.

§ 97.
Einige Sätze aus der Permutationslehre.

Erklärung. Das Permutiren besteht in dem Aufsuchen aller Stellungen, welche n Elemente $a, b, c, \ldots k, l$ einnehmen können. Jede solche Stellung nennt man „eine *Permutationsform*".

Die Anzahl der Permutationsformen bei 2 Elementen a und b ist $1 \cdot 2 = 2!$, nämlich $a\,b$ und $b\,a$. Tritt ein drittes Element c hinzu, so kann man aus jeder dieser beiden Permutationsformen drei bilden, z. B. aus $b\,a$ die drei Formen

$$c\,b\,a, \quad b\,c\,a, \quad b\,a\,c,$$

indem man c an die erste, die zweite und die dritte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei 3 Elementen a, b, c ist daher gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$.

Tritt ein viertes Element d hinzu, so kann man aus jeder dieser $3!$ Permutationsformen vier bilden, z. B. aus $b\,a\,c$ die vier Formen

$$d\,b\,a\,c, \quad b\,d\,a\,c, \quad b\,a\,d\,c, \quad b\,a\,c\,d,$$

indem man d an die erste, zweite, dritte und vierte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei 4 Elementen ist daher gleich $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 4!$

Indem man so fortfährt, findet man

Satz 1. *Die Anzahl der Permutationsformen bei n Elementen ist $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$.*

Vertauscht man nur zwei Elemente mit einander, so nennt man diese Vertauschung eine „*Transposition*“.

Satz 2. *Von zwei beliebigen Permutationsformen P_1 und P_2 kann die eine aus der anderen durch fortgesetzte Transposition hergeleitet werden.*

Beispiele. Die Permutationsform $e\,a\,b\,d\,c$ kann durch 3 Transpositionen in die Form $a\,b\,c\,d\,e$ übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

$$e\,a\,b\,d\,c, \quad a\,e\,b\,d\,c, \quad a\,b\,e\,d\,c, \quad a\,b\,c\,d\,e.$$

Die Permutationsform $f\,g\,a\,c\,d\,e\,b$ kann durch 5 Transpositionen in die Form $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$ übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

$$f\,g\,a\,c\,d\,e\,b, \quad a\,g\,f\,c\,d\,e\,b, \quad a\,b\,f\,c\,d\,e\,g,$$
$$a\,b\,c\,f\,d\,e\,g, \quad a\,b\,c\,d\,f\,e\,g, \quad a\,b\,c\,d\,e\,f\,g.$$

Aus diesen Beispielen erkennt man das Verfahren, das ganz allgemein zum Ziele führt. Es ist aber zu beachten, dass man eine Permutationsform P_1 in eine andere P_2 in mannigfacher Weise durch Transpositionen überführen kann, und dass die Anzahl der verwendeten Transpositionen noch unendlich viele Werthe besitzt. Dabei gilt aber der folgende

Satz 3. *Kann man P_1 in P_2 überführen, das eine Mal durch λ, das andere Mal durch μ Transpositionen, so ist $\lambda - \mu$ stets eine gerade Zahl.*

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned}(1.)\qquad F = (b-a)(c-a)(d-a)\ldots(k-a)(l-a)&\\ \text{mal } (c-b)(d-b)\ldots(k-b)(l-b)&\\ \text{mal } (d-c)\ldots(k-c)(l-c)&\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \text{mal } (l-k).&\end{aligned}$$

Bei der Bildung dieses Productes hat man jedes Element von allen folgenden subtrahirt und die so entstandenen Differenzen mit einander multiplicirt. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Grösse F ändert, wenn man zwei Elemente, z. B. q und s mit einander vertauscht. Alle Differenzen, in denen q und s gar nicht vorkommen, bleiben unverändert. Ist ferner p irgend ein Element, das den beiden Elementen q und s *vorangeht*, so geht bei der Vertauschung von q mit s das Product $(q-p)(s-p)$ in $(s-p)(q-p)$ über und behält denselben Werth. Steht das Element r *zwischen* q und s, so geht das Product $(r-q)(s-r)$ in $(r-s)(q-r)$ über und behält gleichfalls denselben Werth. *Folgt* endlich das Element t den beiden Elementen q und s, so geht das Product $(t-q)(t-s)$ in $(t-s)(t-q)$ über und behält auch denselben Werth. Nur durch den Factor $s-q$, welcher bei der Vertauschung von q mit s in $q-s$ übergeht, wird das Vorzeichen von F geändert, während der absolute Betrag von F derselbe bleibt.

Wenn man also zwei Elemente mit einander vertauscht, so ändert die Grösse F nur das Vorzeichen.

Ebenso kann man zeigen, dass F bei jeder weiteren Transposition zweier Elemente nur das Vorzeichen ändert. Entsteht F_λ aus F durch λ Transpositionen, so ist daher

$$F_\lambda = (-1)^\lambda F. \tag{2.}$$

Bezeichnet man also die Werthe von F, welche den Permutationsformen P_1 und P_2 entsprechen, mit F_1 und F_2, und geht P_1 in P_2 über, das eine Mal durch λ, das andere Mal durch μ Transpositionen, so gelten die beiden Gleichungen

$$F_2 = (-1)^\lambda F_1 \quad \text{und} \quad F_2 = (-1)^\mu F_1; \tag{3.}$$

daraus folgt

$$(-1)^\lambda = (-1)^\mu, \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu \pm 2w, \tag{4.}$$

wobei $2w$ eine beliebige gerade Zahl ist.

Um zu bezeichnen, dass die Permutationsform P (z. B. $1\,2\,3\ldots n$) in P_1 (oder $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$) durch λ Transpositionen übergeführt wird, schreibt man

$$\lambda = \binom{P}{P_1} = \binom{1\,2\,3\ldots n}{\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu}. \tag{5.}$$

Satz 4. *Geht P in P_1 über durch λ, und geht P_1 in P_2 über durch μ Transpositionen, so geht P in P_2 durch $\lambda+\mu\pm 2w$ Transpositionen über. Ist also*

$$(6.)\qquad \lambda=\binom{P}{P_1},\quad \mu=\binom{P_1}{P_2},$$

so wird

$$(7.)\qquad \binom{P}{P_2}=\binom{P}{P_1}+\binom{P_1}{P_2}\pm 2w=\lambda+\mu\pm 2w.$$

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, dass P in P_2 übergeht, wenn man zuerst P in P_1 und dann P_1 in P_2 überführt.

Der Satz lässt sich ohne Weiteres verallgemeinern; es ist z. B.

$$(8.)\qquad \binom{P}{P_3}=\binom{P}{P_1}+\binom{P_1}{P_2}+\binom{P_2}{P_3}\pm 2w.$$

Satz 5. *Die $n!$ Permutationsformen von n Elementen lassen sich durch die Transpositionen zweier Elemente paarweise gruppiren.*

Beweis. Durch die Transposition zweier Elemente, z. B. der beiden Elemente a und b, geht die beliebige Permutationsform P_1 in P_2 über, wobei P_1 und P_2 von einander verschieden sind. Ist nun die Permutationsform Q_1 von P_1 und P_2 verschieden, so geht Q_1 durch die Vertauschung von a mit b in Q_2 über, wobei Q_2 von Q_1 und auch von P_1 und P_2 verschieden ist. Wäre nämlich Q_2 identisch mit P_1 (bezw. mit P_2), so müsste Q_1 identisch sein mit P_2 (bezw. mit P_1). Ist ferner die Permutationsform R_1 von P_1, P_2, Q_1, Q_2 verschieden, so geht R_1 durch die Vertauschung von a mit b in R_2 über, wobei R_2 von R_1 und auch von P_1, P_2, Q_1, Q_2 verschieden ist.

So kann man fortfahren, bis die sämmtlichen Permutationsformen erschöpft sind.

§ 98.

Bildung einer Determinante n^{ter} Ordnung aus n^2 Elementen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 115.)

Eine „*Determinante n^{ter} Ordnung*" möge durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}$$

erklärt werden. Die n^2 Grössen $a_{11}, a_{12}, \dots a_{nn}$ heissen „die *Elemente* der Determinante"; die Determinante $\varDelta$ selbst ist eine Summe, bei der jedes Glied das Product von n Elementen ist. Dabei enthält ein solches Product aus jeder *Zeile* (Horizontalreihe) und aus jeder *Colonne* (Vertikalreihe) *ein und nur ein* Element.

Der Exponent λ ist die Anzahl der Transpositionen, durch welche die Permutationsform $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ in die Permutationsform $1\,2\,3 \dots n$ übergeführt werden kann, also

$$(2.)\qquad \lambda = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \,.\,.\; \nu \\ 1\,2\,3 \dots n \end{pmatrix}.$$

So ist z. B. für die Permutationsform 3 1 4 2 diese Zahl λ gleich 3, und zwar erhält man nach einander die Permutationsformen

3 1 4 2, 1 3 4 2, 1 2 4 3, 1 2 3 4.

Für die Permutationsform 3 2 5 1 4 ist λ wieder gleich 3, und zwar erhält man nach einander die Permutationsformen

3 2 5 1 4, 1 2 5 3 4, 1 2 3 5 4, 1 2 3 4 5.

Die Summation erstreckt sich über alle Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu$ der Zahlen $1\,2\,3 \dots n$, folglich ist die Anzahl der Glieder gleich $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots n$.

Dies kann man auch so zeigen. Nimmt man ein beliebiges Element der ersten Zeile $a_{1\alpha}$, so giebt es n mögliche Fälle, weil α dabei n Werthe haben darf. Da β von α verschieden sein muss, so giebt es bei der Auswahl von $a_{2\beta}$ aus den Elementen der zweiten Zeile nur noch $n - 1$ mögliche Fälle. Deshalb giebt es bei der

Auswahl von $a_{1\alpha} a_{2\beta}$ im Ganzen $n(n-1)$ mögliche Fälle. Ebenso erkennt man, dass für die Auswahl von $a_{3\gamma}$ aus den Elementen der dritten Zeile nur $n-2$ mögliche Fälle und deshalb für die Auswahl von $a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$ im Ganzen $n(n-1)(n-2)$ mögliche Fälle vorhanden sind.

Indem man so weiter fortfährt, findet man das oben angegebene Resultat.

§ 99.

Eigenschaften der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 116—119.)

Satz 1. *Zwei Glieder* (oder Terme)

$$T_1 = (-1)^{\lambda_1} a_{1\alpha_1} a_{2\beta_1} a_{3\gamma_1} \dots a_{n\nu_1} \tag{1.}$$

und

$$T_2 = (-1)^{\lambda_2} a_{1\alpha_2} a_{2\beta_2} a_{3\gamma_2} \dots a_{n\nu_2} \tag{2.}$$

haben gleiches oder entgegengesetztes Zeichen, jenachdem die Transpositionszahl

$$\varrho = \binom{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \nu_1}{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2} \tag{3.}$$

gerade oder ungerade ist.

Beweis. Es ist

$$\lambda_1 = \binom{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \nu_1}{1\ 2\ 3 \dots n},$$

$$\lambda_2 = \binom{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2}{1\ 2\ 3 \dots n} = \binom{1\ 2\ 3 \dots n}{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2},$$

folglich ist

$$\varrho = \lambda_1 + \lambda_2 \pm 2w. \tag{3a.}$$

Sind λ_1 und λ_2 beide gerade oder beide ungerade, haben also T_1 und T_2 gleiches Zeichen, so ist ϱ gerade. Wenn dagegen von den beiden Zahlen λ_1 und λ_2 die eine gerade und die andere ungerade ist, wenn also T_1 und T_2 entgegengesetztes Zeichen haben, so ist ϱ ungerade.

Satz 2. *Die Determinante Δ hat ebenso viele positive wie negative Glieder.*

Beweis. Wenn die beiden Permutationsformen $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\nu_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots\nu_2$ durch eine einzige Transposition in einander übergehen, wenn also $\varrho = 1$ ist, so haben nach Satz 1 die Glieder T_1 und T_2 entgegengesetztes Vorzeichen. Da man nun durch *eine* Transposition alle Permutationsformen paarweise gruppiren kann, so kann man auch die sämmtlichen Glieder der Determinante paarweise gruppiren, so dass bei jedem solchen Paare das eine Glied positiv und das andere negativ ist.

Ordnet man in

$$T = (-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} \tag{4.}$$

die Factoren anders, so geht T über in

$$T = (-1)^\lambda a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \ldots a_{l\nu_1}. \tag{4a.}$$

Dabei folgt aus

$$\mu = \begin{pmatrix} a_{1\alpha} & a_{2\beta} & a_{3\gamma} & \ldots & a_{n\nu} \\ a_{f\alpha_1} & a_{g\beta_1} & a_{h\gamma_1} & \ldots & a_{l\nu_1} \end{pmatrix},$$

dass auch

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ f & g & h & \ldots & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \nu \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \nu_1 \end{pmatrix} \tag{5.}$$

ist. Ausserdem ist

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \nu \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} f & g & h & \ldots & l \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}. \tag{6.}$$

Deshalb erhält man

$$\begin{aligned} \varrho &= \begin{pmatrix} f & g & h & \ldots & l \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \nu_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f & g & h & \ldots & l \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \nu \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \nu_1 \end{pmatrix} \pm 2w, \end{aligned} \tag{7.}$$

oder

$$\varrho = \mu + \lambda + \mu \pm 2w = \lambda \pm 2v, \tag{7a.}$$

$$(-1)^\varrho = (-1)^\lambda. \tag{8.}$$

Dies giebt

Satz 3. *Sind in dem Gliede T die Factoren beliebig geordnet, so ist das Vorzeichen von T gleich $(-1)^\varrho$, wobei ϱ die Transpositionszahl zwischen den ersten und den zweiten Indices ist.*

Jetzt möge die Determinante $\varDelta_1$ aus

$$(9.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, indem man die Zeilen beliebig mit einander und ebenso die Colonnen beliebig mit einander vertauscht, d. h. es sei

$$(10.)\qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & a_{f\gamma} & \dots & a_{f\nu} \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & a_{g\gamma} & \dots & a_{g\nu} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & a_{h\gamma} & \dots & a_{h\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & \dots & a_{l\nu} \end{vmatrix},$$

wobei $f\, g\, h \dots l$ und $\alpha\, \beta\, \gamma \dots \nu$ irgend zwei Permutationsformen der Zahlen $1\ 2\ 3 \dots n$ sind.

Die beiden Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta_1$ enthalten dann, abgesehen vom Vorzeichen, genau dieselben Glieder; denn ein beliebiges Glied von $\varDelta_1$ ist

$$(11.)\qquad T_1 = (-1)^\mu a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei

$$(12.)\qquad \mu = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \dots \nu_1 \\ \alpha\ \beta\ \gamma \dots \nu \end{pmatrix}$$

ist. Das entsprechende Glied in $\varDelta$ heisst

$$(13.)\qquad T = (-1)^\varrho a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei nach Satz 3

$$(14.)\qquad \varrho = \begin{pmatrix} f\ g\ h \dots l \\ \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \nu_1 \end{pmatrix}$$

die Transpositionszahl zwischen den ersten und zweiten Indices ist. Bezeichnet man jetzt

$$\begin{pmatrix} f\,g\,h\ldots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu \end{pmatrix}$$

mit λ, so wird

$$(15.)\quad \mu = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\nu_1 \\ f\;g\;h\ldots l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f\,g\,h\ldots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu \end{pmatrix} \pm 2w = \varrho + \lambda \pm 2w,$$

folglich ist

$$(16.)\qquad T_1 = (-1)^\lambda T,$$

und da diese Gleichung für alle Glieder der Determinanten Δ_1 und Δ gilt, so erhält man

$$(17.)\qquad \Delta_1 = (-1)^\lambda \Delta.$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Satz 4. *Vertauscht man in einer Determinante Δ die Zeilen beliebig mit einander und die Colonnen beliebig mit einander, so geht die Determinante in sich selber über, multiplicirt mit $(-1)^\lambda$, wobei λ die Transpositionszahl zwischen der neuen Aufeinanderfolge $f\,g\,h\ldots l$ der Zeilen und der neuen Aufeinanderfolge $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$ der Colonnen ist.*

Hieraus ergiebt sich als besonderer Fall

Satz 5. *Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Colonnen mit einander vertauscht.*

Hat eine Determinante Δ zwei identische Zeilen oder zwei identische Colonnen, so ändert sich Δ nicht, wenn man diese beiden identischen Reihen mit einander vertauscht. Andererseits erhält aber nach Satz 5 die Determinante bei dieser Vertauschung das entgegengesetzte Vorzeichen, folglich wird

$$(18.)\qquad \Delta = -\Delta, \quad \text{oder} \quad 2\Delta = 0.$$

Dies giebt

Satz 6. *Eine Determinante mit zwei identischen Zeilen oder mit zwei identischen Colonnen ist gleich Null.*

Satz 7. *Eine Determinante ändert ihren Werth gar nicht, wenn man die Zeilen zu Colonnen und die Colonnen zu Zeilen macht.*

Beweis. Die Vertauschung der Zeilen mit den Colonnen entspricht einer Vertauschung der ersten Indices mit den zweiten, so dass die Determinante

$$\Delta = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu} \tag{19.}$$

bei dieser Vertauschung übergeht in

$$\Delta_1 = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{\alpha 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \dots a_{\nu n}. \tag{20.}$$

Die beiden Determinanten Δ und Δ_1 enthalten aber genau dieselben Glieder, nur sind die Factoren der einzelnen Glieder in Δ nach den ersten und in Δ_1 nach den zweiten Indices geordnet.

Aus diesem letzten Satze erkennt man, dass jeder Satz, welcher sich auf die *Zeilen* einer Determinante bezieht, in gleicher Weise auch von den *Colonnen* einer Determinante gilt. Um beide Fälle zusammenzufassen, möge in den folgenden Paragraphen der Ausdruck „*Reihen*" ebenso für die *Zeilen* wie für die *Colonnen* gebraucht werden.

§ 100.

Zerlegung der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 120—124.)

Zieht man aus der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu} \tag{1.}$$

alle Glieder heraus, die mit a_{11} multiplicirt sind, so erhält man

$$\Sigma(-1)^{\lambda} a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu} = a_{11} \Sigma(-1)^{\lambda} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}, \tag{2.}$$

wo sich die Summation auf alle Permutationsformen $\beta\gamma \dots \nu$ der Zahlen $2\,3 \dots n$ erstreckt, während λ die zugehörige Transpositionszahl ist. Der Factor von a_{11} in Gleichung (2.) — er heisse α_{11} — ist daher

$$(3.)\qquad \alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix};$$

er ist also eine Determinante $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die aus Δ entsteht, indem man die erste Zeile und die erste Colonne fortlässt.

Vertauscht man in Δ die erste Zeile mit der zweiten, so wird

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Bei dieser Determinante wird in gleicher Weise wie vorhin der Factor von a_{21} eine Determinante $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche durch Fortlassen der ersten Zeile und ersten Colonne aus der vorstehenden Determinante hervorgeht; folglich ist der Factor α_{21} von a_{21} in der ursprünglichen Determinante Δ

$$(5.)\qquad \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{32}\, a_{33} \ldots a_{3n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n2}\, a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

und geht aus Δ hervor, indem man die *zweite* Zeile und die erste Colonne fortlässt und das Zeichen

$$(6.)\qquad -1 = (-1)^{2+1}$$

davorsetzt.

In ähnlicher Weise findet man den Factor von $a_{31}, a_{41}, \ldots$ allgemein den Factor α_{f1} von a_{f1}. Vertauscht man nämlich die f^{te} Zeile mit der $(f-1)^{ten}$, dann mit der $(f-2)^{ten}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Zeilen (bezw. der ersten Indices)

$$f,\ 1,\ 2,\ \ldots f-1,\ f+1,\ \ldots n$$

geworden ist, so geht bei diesen $f-1$ Vertauschungen Δ in $(-1)^{f-1}\Delta$ über, und das Element a_{f1} steht an erster Stelle. Daraus folgt, dass der Factor von a_{f1} in Δ, nämlich

$$(7.)\qquad \alpha_{f1} = (-1)^{f-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,2} & a_{f-1,3} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,2} & a_{f+1,3} & \dots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus $\varDelta$ hervorgeht, indem man die f^{te} Zeile und die erste Colonne fortlässt und das Vorzeichen

$$(8.)\qquad (-1)^{f-1} = (-1)^{f+1}$$

hinzufügt.

Vertauscht man jetzt in $\varDelta$ die r^{te} Colonne mit der $(r-1)^{ten}$, dann mit der $(r-2)^{ten}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Colonnen (bezw. der zweiten Indices)

$$r,\ 1,\ 2, \dots r-1,\ r+1, \dots n$$

geworden ist, so geht $\varDelta$ in $(-1)^{r-1}\varDelta$ über; jetzt kann man den Factor α_{fr} von a_{fr} in gleicher Weise finden, wie vorhin den Factor α_{f1} von a_{f1}. Daraus folgt dann, dass

$$(9.)\qquad \alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,1} & \dots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \dots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \dots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus $\varDelta$ entsteht, indem man die f^{te} Zeile und r^{te} Colonne fortlässt und den Factor $(-1)^{f+r}$ hinzufügt.

Diese Factoren α_{fr} heissen „*Unterdeterminanten* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung von* $\varDelta$“ und können auch noch auf die folgende Form gebracht werden. Durch $f-1$ Vertauschungen können die Zeilen (bezw. die ersten Indices)

$$1,\ 2,\ 3 \dots f-1,\ f+1,\ f+2, \dots n$$

in die Reihenfolge

$$f+1,\ 1,\ 2,\ 3, \dots f-1,\ f+2, \dots n$$

gebracht werden. Durch weitere $f-1$ Vertauschungen erhält man die Reihenfolge

$$f+1,\ f+2,\ 1,\ 2, \dots f-1,\ f+3, \dots n.$$

So kann man fortfahren, bis man durch $(n-f)(f-1)$ Vertauschungen die „*cyklische*" Reihenfolge

$$f+1,\ f+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots f-1$$

erhält. Ebenso gelangt man durch $(n-r)(r-1)$ Vertauschungen der Colonnen (bezw. der zweiten Indices) zu der *cyklischen* Reihenfolge

$$r+1,\ r+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots r-1.$$

Wegen dieser Vertauschungen ist α_{fr} mit

$$(-1)^{(n-f)(f-1)+(n-r)(r-1)} = (-1)^{n(f+r)-2n-f(f-1)-r(r-1)}$$

zu multipliciren. Da noch $2n$, $f(f-1)$ und $r(r-1)$ gerade Zahlen sind, so geht dieser Factor in

$$(-1)^{n(f+r)}$$

über. Deshalb wird das Vorzeichen von α_{fr}

$$(-1)^{n(f+r)+f+r} = (-1)^{(n+1)(f+r)}.$$

Dies giebt

$$(10.)\quad \alpha_{fr} = (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,\,r+1} & a_{f+1,\,r+2} & \ldots & a_{f+1,\,r-1} \\ a_{f+2,\,r+1} & a_{f+2,\,r+2} & \ldots & a_{f+2,\,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,\,r+1} & a_{f-1,\,r+2} & \ldots & a_{f-1,\,r-1} \end{vmatrix}.$$

Ist n *ungerade*, also $n+1$ *gerade*, so sind daher alle diese Unterdeterminanten mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen.

Beachtet man, dass jedes Glied der Determinante Δ *ein und nur ein* Element der ersten Colonne enthält, so findet man, dass

$$(11.)\qquad \Delta = a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1}$$

sein muss; denn es sind erstens alle Glieder von Δ durch die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (11.) erschöpft, weil jedes Glied ein Element der ersten Colonne als Factor enthalten muss, und zweitens kommt in dieser Summe jedes Glied nur einmal vor, weil kein Glied *zwei* Elemente der ersten Colonne als Factoren enthalten kann.

Ebenso kann man die Determinante Δ nach den Elementen der r^{ten} Colonne zerlegen und erhält

$$(12.)\qquad \Delta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + a_{3r}\alpha_{3r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr}.$$

Beispiel.

Es sei $n = 3$, also

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

dann ist

$$\varDelta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die *cyklische* Anordnung der Unterdeterminanten benutzt,

$$\varDelta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Da sich $\varDelta$ nicht ändert, wenn man die Zeilen mit den Colonnen vertauscht, so findet man in gleicher Weise eine Zerlegung von $\varDelta$ nach den Elementen einer beliebigen *Zeile* und zwar wird

$$(13.)\qquad \varDelta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + a_{f3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{fn}\alpha_{fn}.$$

Ordnet man z. B. für $n = 3$ die Determinante nach den Elementen der zweiten Zeile, so erhält man

$$\varDelta = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

oder bei *cyklischer* Anordnung

$$\varDelta = a_{21} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Ist s von r verschieden, und vertauscht man in Gleichung (12.) die Elemente $a_{1r}, a_{2r}, \ldots a_{nr}$ mit $a_{1s}, a_{2s}, \ldots a_{ns}$, so erhält man

$$(14.)\qquad \varDelta_1 = a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr},$$

wo $\varDelta_1$ gleichfalls eine Determinante ist, welche aus $\varDelta$ hervorgeht, indem man die Elemente der r^{ten} Colonne durch die Elemente der s^{ten} Colonne ersetzt. Dadurch wird aber $\varDelta_1$ eine Determinante, in welcher die Elemente der r^{ten} und der s^{ten}

Colonne identisch sind. Deshalb wird Δ_1 nach Satz 6 in § 99 gleich Null, und Gleichung (14.) geht über in

(14a.) $$a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0,$$

wenn $r \gtrless s$ ist.

Ist ferner g von f verschieden, und vertauscht man in Gleichung (13.) die Elemente $a_{f1}, a_{f2}, \ldots a_{fn}$ mit $a_{g1}, a_{g2}, \ldots a_{gn}$, so erhält man

(15.) $$\Delta_2 = a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn},$$

wo Δ_2 gleichfalls eine Determinante ist, welche aus Δ hervorgeht, indem man die Elemente der f^{ten} Zeile durch die Elemente der g^{ten} Zeile ersetzt. Dadurch wird aber Δ_2 eine Determinante, in welcher die Elemente der f^{ten} und der g^{ten} Zeile identisch sind. Deshalb wird Δ_2 nach Satz 5 in § 99 gleich Null, und Gleichung (15.) geht über in

(15a.) $$a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0,$$

wenn $f \gtrless g$ ist.

§ 101.

Anwendung auf die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 125.)

Sind n lineare Gleichungen mit n Unbekannten:

(1.) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

gegeben, so findet man x_1, indem man die erste Gleichung mit α_{11}, die zweite Gleichung mit $\alpha_{21}, \ldots$ die n^{te} Gleichung mit α_{n1} multiplicirt und alle Gleichungen addirt. Der Coefficient von x_1 wird dann nach Formel Nr. 121 der Tabelle (für $r = 1$)

(2.) $$a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1} = \Delta,$$

während der Coefficient von x_s, wenn s von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 123 der Tabelle (für $r = 1$) gleich

$$(3.)\qquad a_{1s}\alpha_{11} + a_{2s}\alpha_{21} + \cdots + a_{ns}\alpha_{n1} = 0$$

ist. Man erhält daher bei der Addition

$$(4.)\qquad \Delta \,.\, x_1 = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \cdots + c_n\alpha_{n1},$$

eine Gleichung, aus der sich x_1 unmittelbar ergiebt, wenn man auf beiden Seiten durch Δ dividirt.

Ebenso leicht findet man den Werth von x_r, indem man die Gleichungen (1.) bezw. mit

$$\alpha_{1r},\ \alpha_{2r}, \ldots \alpha_{nr}$$

multiplicirt und dann addirt. Ist s von r verschieden, so wird bei der Addition der Coefficient von x_s nach Formel Nr. 123 der Tabelle

$$(5.)\qquad a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0;$$

nur der Coefficient von x_r wird nach Formel Nr. 121 der Tabelle

$$(6.)\qquad a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr} = \Delta,$$

folglich erhält man bei der Addition

$$(7.)\qquad \Delta \,.\, x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr}.$$

Wenn man in der Determinante

$$\Delta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr}$$

die Elemente der r^{ten} Colonne $a_{1r}, a_{2r} \ldots a_{nr}$ durch die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ ersetzt, so erhält man

$$c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr};$$

deshalb kann man Gleichung (7.) auch schreiben, wie folgt:

$$(7a.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot x_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & c_1 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,r-1} & c_2 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & c_n & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um x_r selbst zu finden, muss man noch die beiden Seiten der Gleichung (7.) oder (7a.) durch Δ dividiren, was nur unter der Voraussetzung geschehen darf, dass Δ von Null verschieden ist. Was geschieht, wenn $\Delta = 0$ ist, möge einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

§ 102.

Vereinfachungen bei Ausrechnung der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 126—132.)

Satz 1. *Wenn alle Elemente einer Reihe bis auf eines a_{fr} verschwinden, so ist die Determinante gleich diesem einen Elemente a_{fr}, multiplicirt mit der zugehörigen Unterdeterminante $(n-1)^{ter}$ Ordnung α_{fr}.*

So ist z. B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & 0 & C_3 \end{vmatrix} = B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Der Beweis des allgemeinen Satzes ergiebt sich unmittelbar aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Satz 2. *Eine Determinante kann auf den nächst höheren Grad gebracht werden, indem man eine Zeile und eine Colonne einschiebt, das den beiden eingeschobenen Reihen gemeinschaftliche Element gleich ± 1 setzt und die übrigen Elemente der einen eingeschobenen Reihe gleich 0 macht. Die übrigen Elemente der anderen eingeschobenen Reihe sind ganz beliebig.*

Es ist z. B.

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ noch ganz beliebig sind.

Der Beweis des Satzes folgt unmittelbar aus der Anwendung von Satz 1. Stehen die beiden eingeschobenen Reihen am Rande der Determinante, wie in dem angegebenen Beispiele, so nennt man das Verfahren „*Rändern der Determinante*".

Satz 3. *Verschwinden alle Elemente auf der einen Seite einer Diagonale, so reducirt sich die Determinante auf das erste bezw. auf das letzte Glied.*

Es ist z. B.

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 D_4.$$

Der Beweis folgt aus der wiederholten Anwendung von Satz 1.

Satz 4. *Haben sämmtliche Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Factor, so kann man denselben vor die Determinante setzen.*

Es ist also z. B.

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} \ldots ma_{1r} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots ma_{2r} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \ldots ma_{nr} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2r} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nr} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der Beweis folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Durch die Anwendung dieses Satzes kann man in vielen Fällen eine Determinante auf eine andere mit kleineren Zahlen reduciren. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 16 & 7 & 10 \\ 8 & 13 & 25 \end{vmatrix} = 3 . 4 . 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 13 & 5 \end{vmatrix}.$$

Satz 5. *Sind die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe proportional, so ist die Determinante gleich Null.*

Es ist z. B.

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & mA_1 & C_1 \\ A_2 & mA_2 & C_2 \\ A_3 & mA_3 & C_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 \\ A_2 & A_2 & C_2 \\ A_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Beweis des Satzes folgt aus Satz 4 und Formel Nr. 118 der Tabelle.

Satz 6. *Sind die Elemente einer Reihe Aggregate von gleich viel Gliedern, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Theilreihen einsetzt.*

Es ist z. B.

$$
(5.)\quad \begin{vmatrix} A_1 + B_1, C_1, D_1, \ldots \\ A_2 + B_2, C_2, D_2, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n + B_n, C_n, D_n, \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\, C_1\, D_1 \ldots \\ A_2\, C_2\, D_2 \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n\, C_n\, D_n \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1\, C_1\, D_1 \ldots \\ B_2\, C_2\, D_2 \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_n\, C_n\, D_n \ldots \end{vmatrix}.
$$

Der Beweis des Satzes folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Satz 7. *Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein beliebiges Vielfaches von den Elementen einer parallelen Reihe addirt.*

Es ist also z. B.

$$
(6.)\quad \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r}, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r}, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} + ma_{nr}, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Der Beweis folgt aus der Verbindung der Sätze 5 und 6.

In welcher Weise die vorstehenden Sätze benutzt werden können, mögen die folgenden Beispiele zeigen.

1) Es ist

$$
\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
$$

2) Es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ 0 & x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 & -z_3 \\ -1 & -x_4 & -y_4 & -z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

§ 103.

Multiplication der Determinanten.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 133.)

Es sei

$$(1.)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

wobei

$$(2.)\qquad \begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & c_{22} = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \end{cases}$$

dann soll gezeigt werden, dass

$$(3.)\qquad A \cdot B = C$$

ist. Es wird nämlich nach den Sätzen der vorhergehenden Paragraphen

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} \\ a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{12}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{12}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Da nun aber die Determinanten mit zwei identischen Colonnen gleich Null sind, so wird

$$(4.)\quad C = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$
$$= A \,.\, B.$$

Beispiel.

Es ist

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c, & -d \\ d, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd, & ad - bc \\ bc - ad, & bd + ac \end{vmatrix},$$

oder

$$(5a.)\quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Dies giebt den Satz: *Multiplicirt man die Summe zweier Quadrate wieder mit der Summe zweier Quadrate, so lässt sich das Product gleichfalls als die Summe zweier Quadrate darstellen.*

In ähnlicher Weise, wie vorhin Determinanten 2ter Ordnung mit einander multiplicirt worden sind, kann man auch Determinanten n^{ter} Ordnung mit einander multipliciren. Es sei jetzt

$$(6.)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\; B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix},\; C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$(7.)\quad c_{fr} = a_{f1}b_{r1} + a_{f2}b_{r2} + \cdots + a_{fn}b_{rn}$$

sein möge. Der Kürze wegen soll Gleichung (7.) in der Form

(7a.) $c_{fr} = \Sigma^\alpha a_{f\alpha}b_{r\alpha}$, oder $c_{fr} = \Sigma^\beta a_{f\beta}b_{r\beta}$, ... oder $c_{fr} = \Sigma^\nu a_{f\nu}b_{r\nu}$

geschrieben werden, wobei die Summationsbuchstaben $\alpha, \beta, \ldots \nu$ die Werthe 1 bis n durchlaufen. Dadurch erhält man

$$(8.)\quad C = \begin{vmatrix} \Sigma^\alpha a_{1\alpha}b_{1\alpha}, & \Sigma^\beta a_{1\beta}b_{2\beta}, & \ldots & \Sigma^\nu a_{1\nu}b_{n\nu} \\ \Sigma^\alpha a_{2\alpha}b_{1\alpha}, & \Sigma^\beta a_{2\beta}b_{2\beta}, & \ldots & \Sigma^\nu a_{2\nu}b_{n\nu} \\ . & . & . & . \\ \Sigma^\alpha a_{n\alpha}b_{1\alpha}, & \Sigma^\beta a_{n\beta}b_{2\beta}, & \ldots & \Sigma^\nu a_{n\nu}b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Determinante nach den Theilcolonnen zerlegt,

$$(9.)\quad C = \Sigma^\alpha \Sigma^\beta \ldots \Sigma^\nu \begin{vmatrix} a_{1\alpha}b_{1\alpha}, & a_{1\beta}b_{2\beta}, & \ldots & a_{1\nu}b_{n\nu} \\ a_{2\alpha}b_{1\alpha}, & a_{2\beta}b_{2\beta}, & \ldots & a_{2\nu}b_{n\nu} \\ . & . & . & . \\ a_{n\alpha}b_{1\alpha}, & a_{n\beta}b_{2\beta}, & \ldots & a_{n\nu}b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta, \ldots \nu$ alle Werthe von 1 bis n durchlaufen, so dass die Summe im Ganzen n^n Glieder enthält. Die Gleichung (9.) kann jetzt aber auch in der Form

$$(9a.)\qquad C = \Sigma b_{1\alpha} b_{2\beta} \ldots b_{n\nu} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} a_{1\beta} \ldots a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{2\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha} a_{n\beta} \ldots a_{n\nu} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wobei das Summenzeichen verlangt, dass $\alpha, \beta, \ldots \nu$ *einzeln* alle Werthe von 1 bis n annehmen. Man darf sich aber darauf beschränken, dass $\alpha, \beta, \ldots \nu$ lauter *verschiedene* Werthe haben, weil in Gleichung (9a.) die Determinante der a verschwindet, sobald von den Indices $\alpha, \beta, \ldots \nu$ zwei einander gleich sind. Man braucht daher in Gleichung (9a.) die Summation nur über die $n!$ Permutationsformen $\alpha\beta \ldots \nu$ der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ zu erstrecken. Nun ist aber, wenn $\alpha\beta \ldots \nu$ eine Permutiationsform der Zahlen $1\ 2 \ldots n$ ist,

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} a_{1\beta} \ldots a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{2\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n\alpha} a_{n\beta} \ldots a_{n\nu} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} A,$$

wobei

$$(11.)\qquad \lambda = \binom{\alpha\ \beta \ldots \nu}{1\ 2 \ldots n}$$

ist, folglich geht Gleichung (9a.) über in

$$(11.)\qquad C = A \,.\, \Sigma(-1)^{\lambda} b_{1\alpha} b_{2\beta} \ldots b_{n\nu} = A \,.\, B.$$

Dies giebt den Satz:

Zwei Determinanten n^{ter} Ordnung werden mit einander multiplicirt, indem man die Elemente der f^{ten} Zeile der ersten Determinante mit den gleichstelligen Elementen der r^{ten} Zeile der zweiten Determinante multiplicirt, diese n Producte addirt und aus den so erhaltenen n^2 Summen eine neue Determinante bildet.

Da man in jeder der beiden Determinanten A und B die Zeilen mit den Colonnen vertauschen darf, so kann c_{fr} auch die folgenden Werthe erhalten:

$$c_{fr} = a_{f1}b_{1r} + a_{f2}b_{2r} + \cdots + a_{fn}b_{nr}, \tag{13.}$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f}b_{r1} + a_{2f}b_{r2} + \cdots + a_{nf}b_{rn}, \tag{14.}$$

oder

$$c_{fr} = c_{1f}b_{1r} + a_{2f}b_{2r} + \cdots + a_{nf}b_{nr}. \tag{15.}$$

§ 104.

Homogene, lineare Gleichungen mit n Unbekannten.

Sind n lineare Gleichungen mit n Unbekannten

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{array}\right. \tag{1.}$$

gegeben, so wird nach Formel Nr. 125 der Tabelle

$$\Delta\,.\,x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr}. \tag{2.}$$

Lässt man jetzt die Grössen $c_1, c_2, \ldots c_n$ immer kleiner werden und schliesslich ganz verschwinden, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right. \tag{3.}$$

Diese linearen Gleichungen heissen *homogen*. Aus den Gleichungen (3.) findet man in diesem Falle

$$\Delta\,.\,x_r = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, 3, \ldots n. \tag{4.}$$

Wenn man nun weiss, dass die Gleichungen (3.) auch für solche Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelten, die nicht sämmlich gleich Null sind, so folgt aus den Gleichungen (4.), dass

$$\Delta = 0$$

sein muss. Dies giebt den Satz:

Wenn n lineare, homogene Gleichungen mit n Unbekannten für Werthe der Unbekannten, die nicht sämmtlich gleich 0 sind, gleichzeitig bestehen, so muss die Determinante Δ der Coefficienten gleich 0 sein.

§ 105.

Anwendungen auf einzelne Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Gerade g_1, g_2, g_3 durch einen Punkt gehen.

Auflösung. Man kann die Gleichungen

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,\ A_3x + B_3y + C_3 = 0 \tag{1.}$$

der drei Geraden g_1, g_2, g_3 homogen machen, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_3},\quad y = \frac{x_2}{x_3} \tag{2.}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit x_3 multiplicirt. Dadurch gehen die drei Gleichungen (1.) über in

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 = 0. \end{cases} \tag{3.}$$

Dabei darf man noch für x_3 jeden beliebigen Werth setzen. Ist z. B. $x_3 = 1$, so wird

$$x_1 = x,\quad x_2 = y.$$

Da also die drei linearen, homogenen Gleichungen (3.) gleichzeitig gelten sollen für Werthe von x_1, x_2, x_3, die nicht alle drei gleich Null sind, so muss die Determinante der Coefficienten verschwinden. Die Bedingung dafür, dass die drei Geraden durch einen Punkt gehen, ist daher

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Ebenen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 durch einen Punkt gehen.

Auflösung. Man kann die Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

der vier Ebenen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 homogen machen, indem man

$$(6.)\qquad x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit x_4 multiplicirt. Dadurch gehen die Gleichungen (5.) über in

$$(7.)\qquad \begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 = 0, \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Da diese linearen, homogenen Gleichungen gleichzeitig gelten sollen für Werthe der Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4, die nicht alle vier gleich Null sind, so muss die Determinante der Coefficienten verschwinden. Die Bedingung dafür, dass die vier Ebenen durch einen Punkt gehen, ist daher

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Geraden g liegen.

Auflösung. Hat die Gerade g eine Gleichung

$$(9.)\qquad Ax + By + C = 0,$$

so liegen die drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf dieser Geraden, wenn

$$(10.)\qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0, \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

ist. Hierbei sind x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die gegebenen Coordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, während die drei Grössen A, B, C noch unbekannt sind. Man hat also drei lineare, homogene Gleichungen mit den drei Unbekannten A, B, C. Da diese Unbekannten nicht alle drei gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (10.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die drei Punkte in gerader Linie liegen, ist daher

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 des Raumes in einer Ebene ε liegen.

Auflösung. Hat die Ebene ε die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{12.}$$

so liegen die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in dieser Ebene, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{array}\right. \tag{13.}$$

ist. Hierbei sind x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 die gegebenen Coordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, während die vier Grössen A, B, C, D noch unbekannt sind. Man hat also vier lineare, homogene Gleichungen mit den Unbekannten A, B, C, D. Da diese Unbekannten nicht alle vier gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (13.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Coefficienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die vier Punkte in einer Ebene liegen, ist daher

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{14.}$$

Aufgabe 5. Man soll den Kreis bestimmen, der durch drei gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgeht.

Auflösung. Hat der gesuchte Kreis die Gleichung

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-\varrho^2=0, \tag{15.}$$

so geht er durch die drei gegebenen Punkte, wenn

$$x_1^2-2\xi x_1+\xi^2+y_1^2-2\eta y_1+\eta^2-\varrho^2=0, \tag{16.}$$

$$x_2^2-2\xi x_2+\xi^2+y_2^2-2\eta y_2+\eta^2-\varrho^2=0, \tag{17.}$$

$$x_3^2-2\xi x_3+\xi^2+y_3^2-2\eta y_3+\eta^2-\varrho^2=0 \tag{18.}$$

ist. Diese drei Gleichungen mit den drei Unbekannten ξ, η und ϱ sind *nicht linear*. Zieht man aber die Gleichungen (17.) und (18.) von Gleichung (16.) ab, so erhält man zwei *lineare* Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x_1-x_2)\xi+2(y_1-y_2)\eta=x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2, \\ 2(x_1-x_3)\xi+2(y_1-y_3)\eta=x_1^2-x_3^2+y_1^2-y_3^2 \end{array}\right. \tag{19.}$$

mit den beiden Unbekannten ξ und η. Indem man noch der Kürze wegen

$$x_1^2+y_1^2=r_1^2,\quad x_2^2+y_2^2=r_2^2,\quad x_3^2+y_3^2=r_3^2 \tag{20.}$$

setzt, findet man durch Auflösung der Gleichungen (19.)

$$2\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2 \\ x_1-x_3, & y_1-y_3 \end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix} r_1^2-r_2^2, & y_1-y_2 \\ r_1^2-r_3^2, & y_1-y_3 \end{vmatrix} \tag{21.}$$

$$2\begin{vmatrix} x_1-x_2, & y_1-y_2 \\ x_1-x_3, & y_1-y_3 \end{vmatrix}\cdot\eta=\begin{vmatrix} x_1-x_2, & r_1^2-r_2^2 \\ x_1-x_3, & r_1^2-r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22.}$$

Die Determinanten, welche hier auftreten, kann man, wie schon in § 102, Seite 474 gezeigt wurde, umformen und erhält dadurch

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{21a.}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\eta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22a.}$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden ξ und η unendlich gross, d. h. der Mittelpunkt des Kreises rückt in's Unendliche, und die drei Punkte P_1, P_2, P_3 liegen in gerader Linie, wie schon in Aufgabe 3 gezeigt wurde.

Der Werth von ϱ^2 ergiebt sich aus Gleichung (16.), (17.) oder (18.), indem man die gefundenen Werthe von ξ und η einsetzt.

Aufgabe 6. Man soll die Kugelfläche bestimmen, welche durch vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 hindurchgeht.

Auflösung. Hat die Kugelfläche die Gleichung

$$(23.)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-\varrho^2=0,$$

so findet man die Werthe von ξ, η, ζ in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe die Werthe von ξ und η, und zwar erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$(24.)\qquad \begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=r_1^2, & x_2^2+y_2^2+z_2^2=r_2^2, \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2=r_3^2, & x_4^2+y_4^2+z_4^2=r_4^2 \end{cases}$$

setzt,

$$(25.)\qquad 2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\xi = \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 & z_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 & z_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 & z_3 \\ 1 & r_4^2 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$(26.)\qquad 2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\eta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 & z_1 \\ 1 & x_2 & r_2^2 & z_2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 & z_3 \\ 1 & x_4 & r_4^2 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$(27.)\qquad 2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\zeta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & r_4^2 \end{vmatrix}.$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden ξ, η, ζ unendlich gross, d. h. der Mittelpunkt der Kugel rückt in's Unendliche, und die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 liegen, wie schon in Aufgabe 4 gezeigt wurde, in einer Ebene.

Den Werth von ϱ findet man schliesslich aus der Gleichung

$$(28.)\qquad (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2 = \varrho^2.$$

Zweiter Theil.

Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

XIII. Abschnitt.

Differentiation der Functionen von mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen.

§ 106.

Differentiation einer Function von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 134.)

In derselben Weise, wie in § 1 (Seite 7) Functionen von *einer* Veränderlichen erklärt wurden, kann man, wie es Seite 20 bereits geschehen ist, auch Functionen von *zwei* (oder *mehr*) Veränderlichen erklären.

Demnach heisst eine veränderliche Grösse z *eine Function der beiden Veränderlichen* x *und* y *für* $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, *wenn jedem Werthsysteme* x, y *in den angegebenen Intervallen ein oder mehrere Werthe von* z *nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.*

Hier möge nur der Fall in Betracht gezogen werden, wo dieses Gesetz durch eine Gleichung zwischen x, y, z gegeben ist.

Besteht nämlich zwischen drei veränderlichen Grössen x, y, z eine Gleichung, so wird man zweien von ihnen, z. B. x und y, beliebige Werthe beilegen können; dadurch wird dann z die Wurzel einer Gleichung mit constanten Coefficienten, so dass z nur noch eine Anzahl ganz bestimmter Werthe haben darf.

Bei dieser Anschauungsweise sind also x und y die *unabhängigen* Veränderlichen, während z eine von x und y *abhängige* Veränderliche oder eine *Function von x und y* ist.

Man kann sich die Gleichung zwischen x, y und z deshalb auf die Form

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

gebracht denken und erkennt, dass Veränderungen von z auf dreifache Art hervorgerufen werden können, nämlich

1) indem sich x allein ändert,
2) „ „ y „ „
3) „ „ x und y gleichzeitig ändern.

Den Unterschied zwischen diesen drei Fällen kann man sich am leichtesten durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) als Gleichung einer Fläche im Raume klar machen. Bleibt y constant, so liegen die Flächenpunkte mit den Coordinaten x, y, z alle in einer Ebene, welche zur ZX-Ebene parallel ist und die Fläche in einer Curve schneidet. Auf dieser Curve kann daher der Flächenpunkt P nur fortschreiten, wenn x als die einzige Veränderliche und y als Constante betrachtet wird.

Ebenso kann der Flächenpunkt P nur auf einer Curve fortschreiten, welche in einer zur YZ-Ebene parallelen Ebene liegt, wenn man y als einzige Veränderliche und x als Constante betrachtet.

Sind aber x und y beide veränderlich, so kann der Flächenpunkt auf der Fläche nach allen beliebigen Richtungen fortschreiten.

Betrachtet man zunächst den ersten Fall, wo nur x als *veränderlich* und y als *constant* angesehen wird, so kann man z wie eine Function der einzigen Veränderlichen x behandeln und auch ebenso differentiiren. Man bezeichnet dann aber, wie schon in § 69, Seite 316 hervorgehoben wurde, den Differential-Quotienten nicht mit $\frac{dz}{dx}$, sondern mit $\frac{\partial z}{\partial x}$, so dass man erhält

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{2.}$$

In dem zweiten Falle, wo nur y als *veränderlich* und x als *constant* angesehen wird, findet man in derselben Weise

$$(3.)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y=0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Diese Grössen werden die „*partiellen* Ableitungen von z nach x und nach y“ genannt.

Dem entsprechend nennt man die Aenderung, welche z dadurch erleidet, dass sich nur x um die Grösse Δx ändert, die „*partielle Zunahme von z in Bezug auf x*“ und bezeichnet sie mit $\Delta_x z$. Es ist also

$$(4.)\qquad z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y),$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahirt,

$$(5.)\qquad \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x.$$

Ebenso nennt man die Aenderung, welche z dadurch erleidet, dass sich nur y um die Grösse Δy ändert, die „*partielle Zunahme von z in Bezug auf y*“ und bezeichnet sie mit $\Delta_y z$. Es ist also

$$(6.)\qquad z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y),$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahirt,

$$(7.)\qquad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Lässt man jetzt die Grössen Δx und Δy unendlich klein werden, indem man sie durch ihre Differentiale dx und dy ersetzt, so werden auch die entsprechenden Aenderungen von z, nämlich $\Delta_x z$ und $\Delta_y z$, unendlich klein und heissen dann die „*partiellen Differentiale* $\partial_x z$ und $\partial_y z$ von z“. Dabei folgt aus den Gleichungen (5.) und (7.)

$$(8.)\qquad \partial_x z = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

$$(9.)\qquad \partial_y z = \lim_{\Delta y=0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

In dem dritten Falle dagegen, wo sich x um Δx und gleichzeitig y um Δy ändert, nennt man die entsprechende Aenderung

von z die *„vollständige* oder *totale* Zunahme von z" und bezeichnet sie mit $\varDelta z$. Es wird also

$$z + \varDelta z = f(x + \varDelta x, y + \varDelta y), \tag{10.}$$

oder, wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahirt,

$$\varDelta z = f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y), \tag{11.}$$

wobei $\varDelta x$ und $\varDelta y$ von einander *unabhängige* Grössen sind. Die hier folgenden Schlüsse gelten jedoch auch dann noch, wenn man diese Voraussetzung nicht macht, wenn also x und y und deshalb auch $\varDelta x$ und $\varDelta y$ von einander abhängig sind.

Gleichung (11.) kann man auf die Form

$$\begin{aligned}\varDelta z = &f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y + \varDelta y)\\ &+ f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)\end{aligned}$$

bringen. Dies giebt, wenn man $y + \varDelta y$ der Kürze wegen mit y_1 bezeichnet,

$$\begin{aligned}\varDelta z &= f(x + \varDelta x, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)\\ &= \frac{f(x + \varDelta x, y_1) - f(x, y_1)}{\varDelta x}\varDelta x + \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y}\varDelta y.\end{aligned} \tag{12.}$$

Lässt man jetzt wieder $\varDelta x$ und $\varDelta y$ unendlich klein werden, so wird auch $\varDelta z$ unendlich klein und geht in das *vollständige oder totale Differential von* z über, welches man mit dz bezeichnet. Da nun

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{f(x + \varDelta x, y_1) - f(x, y_1)}{\varDelta x} = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x},$$

$$\lim_{\varDelta y = 0} \frac{f(x, y + \varDelta y) - f(x, y)}{\varDelta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

und $\lim y_1 = y$ wird, so geht die Gleichung (12.) über in

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \tag{13.}$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{14.}$$

Es gilt also der Satz:

Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Derselbe Satz ist auch in § 69, Gleichung (16a.) ausgesprochen; damals handelte es sich aber um eine Function

$$y = f(u, v)$$

von zwei veränderlichen Grössen u und v, die nicht von einander *unabhängig*, sondern beide wieder Functionen von *einer* Veränderlichen x waren.

§ 107.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = x^3 y^2. \tag{1.}$$

Auflösung. Die partielle Ableitung nach x bildet man, indem man x als *veränderlich* und y als *constant* betrachtet; und die partielle Ableitung nach y bildet man, indem man y als *veränderlich* und x als *constant* betrachtet. Deshalb ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y, \tag{2.}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy. \tag{3.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = y^2 \sin x. \tag{4.}$$

Auflösung. Hier findet man in ähnlicher Weise wie vorhin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin x, \tag{5.}$$

$$dz = y^2 \cos x\, dx + 2y \sin x\, dy. \tag{6.}$$

Aufgabe 3. Man soll die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = y^3 + 4x^2y + 2x^3. \tag{7.}$$

Auflösung.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy + 6x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 4x^2, \tag{8.}$$

$$dz = (8xy + 6x^2)dx + (3y^2 + 4x^2)dy. \tag{9.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = e^y \arcsin x + x^2 . \mathrm{l}y. \tag{10.}$$

Auflösung.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}} + 2x . \mathrm{l}y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}, \tag{11.}$$

$$dz = \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}} + 2x . \mathrm{l}y\right)dx + \left(e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}\right)dy. \tag{12.}$$

§ 108.

Differentiation der Functionen von mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 135 und 136.)

Das in § 106 angedeutete Verfahren lässt sich ohne Weiteres auf Functionen von drei oder von mehr von einander unabhängigen Veränderlichen übertragen. Ist z. B. z eine Function von drei Veränderlichen u, v, w, ist also

$$z = f(u, v, w), \tag{1.}$$

so kann man zunächst die partiellen Ableitungen bilden, indem man setzt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w)}{\Delta u}, \tag{2.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v, w) - f(u, v, w)}{\Delta v}, \tag{3.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \lim_{\Delta w = 0} \frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w}. \tag{4.}$$

Aus den drei *partiellen Zunahmen* von z, nämlich aus

$$(5.)\quad \begin{cases} \Delta_u z = f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w), \\ \Delta_v z = f(u, v + \Delta v, w) - f(u, v, w), \\ \Delta_w z = f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w) \end{cases}$$

erhält man sodann, indem man Δu, Δv, Δw durch die Differentiale du, dv, dw ersetzt, die drei *partiellen Differentiale* von z, nämlich

$$(6.)\quad \partial_u z = \frac{\partial z}{\partial u}du, \quad \partial_v z = \frac{\partial z}{\partial v}dv, \quad \partial_w z = \frac{\partial z}{\partial w}dw.$$

Ist endlich Δz die Aenderung von z, wenn sich gleichzeitig u um Δu, v um Δv, w um Δw ändern, ist also

$$z + \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w),$$

so wird

$$(7.)\quad \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w),$$

oder

$$(7a.)\quad \begin{aligned} \Delta z = & f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w) - f(u, v+\Delta v, w+\Delta w) \\ & + f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w) \\ & + f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w). \end{aligned}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $v + \Delta v$ mit v_1 und $w + \Delta w$ mit w_1, so kann man diese Gleichung auf die Form

$$(7b.)\quad \begin{aligned} \Delta z = & \frac{f(u + \Delta u, v_1, w_1) - f(u, v_1, w_1)}{\Delta u}\Delta u \\ & + \frac{f(u, v + \Delta v, w_1) - f(u, v, w_1)}{\Delta v}\Delta v \\ & + \frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w}\Delta w \end{aligned}$$

bringen. Geht man jetzt zur Grenze über, indem man Δu, Δv und Δw durch die entsprechenden Differentiale du, dv, dw ersetzt, so wird

$$\lim v_1 = v, \quad \lim w_1 = w,$$

und Δz geht über in das *vollständige* (oder *totale*) Differential von z, nämlich in

$$(8.)\quad dz = \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u}du + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v}dv + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w}dw,$$

oder

$$(8a.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw.$$

Auch hier gilt also der Satz:

Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Beispiel.

Es sei

$$(9.)\qquad z = v^2 w \sin u + e^w . \mathrm{l}u;$$

dann wird

$$(10.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = v^2 w \cos u + \dfrac{e^w}{u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = 2vw \sin u, \\ \dfrac{\partial z}{\partial w} = v^2 \sin u + e^w . \mathrm{l}u, \end{cases}$$

also

$$(11.)\quad dz = \left(v^2 w \cos u + \frac{e^w}{u}\right)du + 2vw \sin u dv + (v^2 \sin u + e^w . \mathrm{l}u)dw.$$

In derselben Weise kann man

$$(12.)\qquad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

nach jeder der n Veränderlichen einzeln differentiiren, indem man die anderen Veränderlichen als *constant* betrachtet. So erhält man die *partiellen Ableitungen*. Multiplicirt man dann noch mit dem Differential der betreffenden Veränderlichen, so sind die Producte die *partiellen Differentiale* von z, nämlich

$$(13.)\quad \partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1,\ \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2, \ldots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Das vollständige (oder totale) Differential ist dann wieder gleich der Summe der partiellen Differentiale, also

$$(14.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Dabei ist zunächst die Voraussetzung gemacht, dass die n Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von einander unabhängig sind. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel (14.) lässt sich aber auch

leicht auf den Fall übertragen, wo $u_1, u_2, \dots u_n$ sämmtlich Functionen von einer Veränderlichen t sind.

In diesem Falle sind jedoch, wie für $n = 2$ schon in § 69 gezeigt wurde, die Differentiale $du_1, du_2, \dots du_n$ nicht mehr von einander unabhängige Grössen; es folgt vielmehr aus den Gleichungen

$$u_1 = \varphi_1(t), \quad u_2 = \varphi_2(t), \dots u_n = \varphi_n(t), \tag{15.}$$

dass

$$du_1 = \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \dots du_n = \varphi_n'(t)dt \tag{16.}$$

wird. Deshalb darf man in diesem Falle die beiden Seiten der Gleichung (14.) durch dt dividiren und erhält auf diese Weise

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{17.}$$

Die Formel (14.) bleibt sogar noch richtig, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ wiederum Functionen von m Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_m$ sind, wenn also

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots t_m), \\ u_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots t_m), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots t_m). \end{cases} \tag{18.}$$

Setzt man nämlich diese Werthe in die Gleichung (12.) ein, so wird

$$z = F(t_1, t_2, \dots t_m) \tag{19.}$$

eine Function von $t_1, t_2, \dots t_m$ und deshalb, der Gleichung (14.) entsprechend,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2}dt_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial t_m}dt_m. \tag{20.}$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen (18.)

$$du_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_2}dt_2 + \dots + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_m}dt_m \tag{21.}$$

für $\alpha = 1, 2, 3, \dots n$. Nun ist aber nach Gleichung (17.), wenn man zuerst t_1, dann $t_2, \dots$ endlich t_m als die einzige Veränderliche betrachtet,

$$
(22.)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_1}, \\
\frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial z}{\partial t_m} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_m} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_m}.
\end{array}\right.
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $dt_1, dt_2, \ldots dt_m$ und addirt sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (20.) und (21.)

$$
(23.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.
$$

§ 109.

Wiederholte Differentiation einer Function von mehreren Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 137.)

Der Kürze wegen bezeichnet man gewöhnlich die partiellen Ableitungen durch Indices. Ist z. B.

$$
(1.)\qquad z = f(x, y),
$$

so setzt man

$$
(2.)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y).
$$

Nun sind $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ im Allgemeinen wieder Functionen von x und y, die man nochmals nach den einzelnen Veränderlichen differentiiren kann. Dadurch erhält man, wenn man die Ableitungen wieder durch Indices andeutet,

$$
(3.)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = f_{11}(x, y), \quad \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y), \\
\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y), \quad \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = f_{22}(x, y).
\end{array}\right.
$$

Es giebt also im Ganzen 4 zweite partielle Ableitungen einer Function von 2 Veränderlichen.

Die Werthe dieser Ableitungen sind aber nicht sämmtlich von einander verschieden, sondern es wird, wie sogleich bewiesen werden soll,

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y). \tag{4.}$$

Zum Beweise setze man

$$\varphi(y) = f(x + h, y) - f(x, y), \tag{5.}$$

also

$$\varphi(y + k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k). \tag{6.}$$

Nun ist nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze (vergl. Formel Nr. 49a der Tabelle)

$$\varphi(y + k) - \varphi(y) = \varphi'(y + \Theta k) . k, \tag{7.}$$

oder, wenn man die Werthe aus den Gleichungen (5.) und (6.) einsetzt,

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y) = \\ [f_2(x + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] . k. \end{aligned} \tag{7a.}$$

Setzt man dagegen

$$\psi(x) = f(x, y + k) - f(x, y), \tag{8.}$$

also

$$\psi(x + h) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y), \tag{9.}$$

so folgt aus Formel Nr. 49a der Tabelle

$$\psi(x + h) - \psi(x) = \psi'(x + \Theta_1 h) . h, \tag{10.}$$

oder, wenn man die Werthe aus den Gleichungen (8.) und (9.) einsetzt,

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = \\ [f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] . h. \end{aligned} \tag{10a.}$$

Durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit Gleichung (7a.) erhält man

$$\begin{aligned} [f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] . h = \\ [f_2(x + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] . k, \end{aligned} \tag{11.}$$

oder, wenn man auf die beiden Grössen in den eckigen Klammern nochmals Formel Nr. 49a der Tabelle anwendet,

$$f_{12}(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k) . hk = f_{21}(x + \Theta_3 h, y + \Theta k) . hk. \tag{12.}$$

Dabei sind h und k hinreichend kleine, aber sonst beliebige Grössen. Deshalb ist auch

$$(13.)\qquad f_{12}(x+\Theta_1 h, y+\Theta_2 k) = f_{21}(x+\Theta_3 h, y+\Theta k).$$

Lässt man jetzt h und k gleich Null werden, so erhält man

$$(14.)\qquad f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y),\quad \text{oder}\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Dies giebt den Satz:

Wenn man eine Function

$$z = f(x,y)$$

zuerst partiell nach x und dann partiell nach y differentiirt, so findet man dasselbe Resultat, welches man finden würde, indem man zuerst partiell nach y und dann partiell nach x differentiirt; oder mit anderen Worten: *Die Reihenfolge, in welcher man die partiellen Differentiationen ausführt, ist gleichgültig.*

Dieser Satz lässt sich natürlich verallgemeinern, nicht nur auf die zweiten partiellen Ableitungen der Functionen von beliebig vielen Veränderlichen, sondern auch auf höhere partielle Ableitungen. Setzt man nämlich

$$(15.)\quad \begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}, & f_2(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\[2ex] f_{11}(x,y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & f_{12}(x,y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \\[2ex] f_{21}(x,y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, & f_{22}(x,y) = \dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \end{cases}$$

so erhält der eben ausgesprochene Satz die Fassung

$$(16.)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x},\quad \text{oder}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}.$$

Bezeichnet man in entsprechender Weise mit $\frac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m \partial y^n}$ den Ausdruck, welchen man erhält, indem man z zuerst m-mal partiell nach x und dann n-mal partiell nach y differentiirt, so gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \tag{17.}$$

und wenn man in ähnlicher Weise fortfährt,

$$\frac{\partial^{m+n}z}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n}z}{\partial y^n \partial x^m}. \tag{18.}$$

Ebenso setzt man, wenn

$$z = f(u, v, w)$$

gegeben ist,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f_1(u, v, w), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f_2(u, v, w), \quad \frac{\partial z}{\partial w} = f_3(u, v, w) \tag{19.}$$

und kann diese Functionen wieder nach jeder der drei Veränderlichen differentiiren. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial u} = f_{11}(u, v, w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial v} = f_{12}(u, v, w),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial w} = f_{13}(u, v, w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial f_2(u, v, w)}{\partial u} = f_{21}(u, v, w),$$

. . . .

Auch hier lässt sich zeigen, dass

$$\begin{cases} f_{12}(u, v, w) = f_{21}(u, v, w), \\ f_{13}(u, v, w) = f_{31}(u, v, w), \\ f_{23}(u, v, w) = f_{32}(u, v, w) \end{cases} \tag{20.}$$

ist, allgemein, dass

$$\begin{cases} \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial u^m \partial v^n \partial w^p} = \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial v^n \partial u^m \partial w^p} = \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial w^p \partial u^m \partial v^n} \\ = \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial u^m \partial w^p \partial v^n} = \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial v^n \partial w^p \partial u^m} = \frac{\partial^{m+n+p}z}{\partial w^p \partial v^n \partial u^m}. \end{cases} \tag{21.}$$

§ 110.
Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ermitteln für

$$z = x^2y^3 - 3x^4y + xy^4. \tag{1.}$$

Auflösung. Durch Differentiation erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - 12x^3y + y^4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3x^4 + 4xy^3, \tag{2.}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 - 36x^2y, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y + 12xy^2. \end{array}\right. \tag{3.}$$

Hierdurch wird auch bestätigt, dass

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Aufgabe 2. Man soll die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ermitteln für

$$z = \sin x \,.\, \mathrm{l}y + e^y \,.\, \mathrm{l}x. \tag{4.}$$

Auflösung.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \,.\, \mathrm{l}y + \frac{e^y}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sin x}{y} + e^y \,.\, \mathrm{l}x, \tag{5.}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \,.\, \mathrm{l}y - \frac{e^y}{x^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin x}{y^2} + e^y \,.\, \mathrm{l}x. \end{array}\right. \tag{6.}$$

Auch hier wird wieder

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

§ 111.

Vollständige Differentiale höherer Ordnung.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 138.)

Es sei wieder

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

eine Function von zwei *unabhängigen* Veränderlichen, dann wird nach Formel Nr. 134 der Tabelle

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \tag{2.}$$

das *erste* vollständige Differential von z. Dabei sind dx und dy zwei von einander *und auch von x und y unabhängige*, unendlich kleine Grössen.

Unter dem *zweiten vollständigen* Differential von z versteht man nun das vollständige Differential des ersten vollständigen Differentials und bezeichnet es mit d^2z.

Um d^2z zu bilden, braucht man also nur in Gleichung (2.) z mit dz zu vertauschen. Dadurch erhält man

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial (dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial (dz)}{\partial y} dy. \tag{3.}$$

Weil nun aber dx und dy von x und y unabhängig sind, so findet man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (dz)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \\[2ex] \dfrac{\partial (dz)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy. \end{cases} \tag{4.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit dx und dy und addirt sie dann, so erhält man

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \tag{5.}$$

Wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung überall $\partial^2 z$ mit ∂z^2 vertauscht, so wird die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$(6.)\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dx\,dy + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2.$$

Diesen Umstand benutzt man, um die Gleichung (5.) auf eine einfachere Form zu bringen; man schreibt nämlich

$$(5a.)\qquad d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(2)},$$

wobei der eingeklammerte Exponent (2) bedeutet, dass man den Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ wirklich in's Quadrat erheben, dann aber überall ∂z^2 mit $\partial^2 z$ vertauschen soll.

Man sagt bei der Ausführung dieses Verfahrens, dass $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ „*symbolisch*" in's Quadrat erhoben werde.

Ebenso versteht man unter dem *dritten* vollständigen Differential von z, nämlich unter d^3z das erste vollständige Differential des zweiten vollständigen Differentials. Es ist also

$$(7.)\qquad d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy.$$

Nun ist aber nach Gleichung (5.)

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2, \\ \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3, \end{cases}$$

folglich ist

$$(9.)\quad d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

oder, wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise benutzt,

$$(9a.)\qquad d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(3)}.$$

Auch hier bedeutet der eingeklammerte Exponent (3), dass man $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ zuerst wirklich in die dritte Potenz erheben und dann überall ∂z^3 mit $\partial^3 z$ vertauschen soll.

So kann man fortfahren und findet für das m^{te} vollständige Differential

$$d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(m)}, \tag{10.}$$

wobei man also $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ in die m^{te} Potenz erheben und dann ∂z^m mit $\partial^m z$ vertauschen soll.

Die Richtigkeit dieser Formel für einen beliebigen Werth von m wird durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen. Nach dem binomischen Lehrsatze ist nämlich

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots,$$

oder

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

wobei das Summenzeichen Σ andeutet, dass k alle Werthe von 0 bis n durchlaufen soll. Gilt also die Gleichung (10.) für $m = n$, so wird

$$d^n z = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k. \tag{11.}$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{cases} \frac{\partial(d^n z)}{\partial x}dx = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}dx^{n-k+1}dy^k, \\ \frac{\partial(d^n z)}{\partial y}dy = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{\partial^{n+1}z}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}dx^{n-k}dy^{k+1}. \end{cases} \tag{12.}$$

Ersetzt man die Glieder auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen durch die entsprechenden in der symbolischen Darstellung, so erhält man

$$\begin{cases} \Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k+1}\partial y^k}dx^{n-k+1}dy^k = \\ \frac{\partial z}{\partial x}dx\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k = \frac{\partial z}{\partial x}dx\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n \end{cases} \tag{13.}$$

und

$$(14.)\quad \begin{cases} \Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k}\partial y^{k+1}}dx^{n-k}dy^{k+1} = \\ \frac{\partial z}{\partial y}dy\,\Sigma\binom{n}{k}\frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k = \frac{\partial z}{\partial y}dy\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n. \end{cases}$$

Indem man die Gleichungen (12.) addirt, erhält man auf der linken Seite

$$(15.)\qquad \frac{\partial(d^n z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^n z)}{\partial y}dy = d^{n+1}z,$$

auf der rechten Seite dagegen, wenn man $\partial^{n+1}z$ mit ∂z^{n+1} vertauscht, mit Rücksicht auf die Gleichungen (13.) und (14.)

$$(16.)\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^n = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{n+1},$$

folglich ist unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise

$$(17.)\qquad d^{n+1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(n+1)}.$$

Gilt also Gleichung (10.) für $m = n$, so gilt sie auch für $m = n + 1$.

Was in dem Vorhergehenden für eine Function von *zwei* unabhängigen Veränderlichen gezeigt worden ist, kann man in ähnlicher Weise auch für Functionen von n unabhängigen Veränderlichen zeigen. Dadurch findet man für

$$(18.)\qquad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

zunächst in Uebereinstimmung mit Formel Nr. 136 der Tabelle

$$(19.)\qquad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n$$

und durch wiederholte Differentiation

$$(20.)\quad \begin{cases} d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(m)}. \end{cases}$$

Bei dem *ersten* vollständigen Differential von z war es gleichgültig, ob die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von einander unabhängig sind oder nicht, denn man erhielt, auch wenn u_1.

$u_2, \dots u_n$ sämmtlich Functionen von *einer* Veränderlichen t oder von *mehreren* Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_m$ waren,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

Bei den *höheren* vollständigen Differentialen aber bleiben die Gleichungen (20.) nur dann richtig, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ von einander *unabhängig*, oder wenn sie *lineare* Functionen von neuen unabhängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_m$ sind. Ist z. B. wieder

$$z = f(x, y), \tag{21.}$$

und sind

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

beide Functionen einer neuen Veränderlichen t, so erhält man zunächst

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{22.}$$

Hierbei sind aber dx und dy nicht mehr von einander unabhängige Grössen, sondern es ist

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt. \tag{23.}$$

Deshalb kann man auch Gleichung (22.) auf die Form

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{24.}$$

bringen. Da z und $\frac{dz}{dt}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ als Functionen der einzigen Veränderlichen t anzusehen sind, so erhält man durch nochmalige Differentiation nach t

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{25.}$$

Nun ist aber nach Gleichung (24.), indem man z bezw. mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder mit $\frac{\partial z}{\partial y}$ vertauscht,

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{d\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\dfrac{dy}{dt}; \end{cases}$$

folglich geht Gleichung (25.), wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise anwendet, über in

$$(27.)\quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Indem man beide Seiten der Gleichung mit dt^2 multiplicirt. giebt dies

$$(27a.)\quad d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich also von der Gleichung (5a.) auch äusserlich dadurch, dass auf der rechten Seite noch die Glieder $\frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y$ hinzugetreten sind.

Ist

$$(28.)\quad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

und sind

$$(29.)\quad u_1 = \varphi_1(t), \quad u_2 = \varphi_2(t), \ldots u_n = \varphi_n(t)$$

sämmtlich Functionen einer neuen Veränderlichen t, so findet man in ähnlicher Weise

$$(30.)\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n,$$

$$(31.)\quad \begin{cases} d^2 z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)} \\ \qquad + \dfrac{\partial z}{\partial u_1}d^2 u_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}d^2 u_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}d^2 u_n, \end{cases}$$

wobei

$$(32.)\quad \begin{cases} du_1 = \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \ldots \quad du_n = \varphi_n'(t)dt, \\ d^2 u_1 = \varphi_1''(t)dt^2, \quad d^2 u_2 = \varphi_2''(t)dt^2, \ldots \quad d^2 u_n = \varphi_n''(t)dt^2. \end{cases}$$

Man erkennt aus den letzten Gleichungen leicht, unter welcher Bedingung die Grössen

$$d^2u_1, \quad d^2u_2, \ldots d^2u_n,$$

oder

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}, \quad \frac{d^2u_2}{dt^2}, \ldots \frac{d^2u_n}{dt^2}$$

verschwinden. Dies geschieht, wenn

$$u_1 = a_1t + b_1, \quad u_2 = a_2t + b_2, \ldots \quad u_n = a_nt + b_n \tag{33.}$$

lineare Functionen von t sind. Dann wird nämlich

$$\frac{du_1}{dt} = a_1, \quad \frac{du_2}{dt} = a_2, \ldots \quad \frac{du_n}{dt} = a_n \tag{34.}$$

und

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2u_2}{dt^2} = 0, \ldots \quad \frac{d^2u_n}{dt^2} = 0. \tag{35.}$$

In diesem Falle ist also wieder

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n\right)^{(2)}, \tag{36.}$$

oder

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(2)}. \tag{37.}$$

Gerade dieser Fall wird aber in dem Folgenden in Betracht kommen.

Gelten die Gleichungen (33.), so findet man jetzt auch ebenso wie früher

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(3)}, \tag{38.}$$

. . . .

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^mz}{dt^m} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(m)} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} a_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} a_n\right)^{(m)}. \end{aligned}\right. \tag{39.}$$

§ 112.

Nicht entwickelte Functionen einer Veränderlichen, gegeben durch simultane Gleichungen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 139.)

Es kommt häufig vor, dass y und z als Functionen der einen Veränderlichen x gegeben sind durch *zwei* Gleichungen

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0,$$

welche *gleichzeitig* bestehen und deshalb „*simultan*" genannt werden.

Jede der beiden Gleichungen für sich allein würde, geometrisch gedeutet, einer Fläche entsprechen; gelten sie aber gleichzeitig, so können ihnen nur die Coordinaten derjenigen Punkte genügen, welche auf beiden Flächen liegen, d. h. die Gleichungen (1.) stellen zusammen die *Schnittcurve* der beiden Flächen dar.

Eliminirt man aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche z, so erhält man die Gleichung

$$(2.)\qquad H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die XY-Ebene projicirt. Eliminirt man aber aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche y, so erhält man die Gleichung

$$(3.)\qquad K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders, welcher die Schnittcurve in die XZ-Ebene projicirt. Da die Raumcurve, welche durch die beiden Gleichungen (1.) erklärt wird, auf diesen beiden Cylindern liegt, so ist sie auch die Schnittcurve dieser beiden Cylinder oder wenigstens ein Theil davon, denn die Cylinder können möglicher Weise auch noch Punkte gemeinsam haben, die *nicht* auf der gegebenen Curve liegen.

Es kommt hier zunächst nicht auf diese geometrische Deutung an, es sollte vielmehr die vorstehende Untersuchung nur zeigen, dass man y und z als Functionen der *einzigen* unabhängigen Veränderlichen x betrachten darf. Deshalb ist es auch möglich, y und z als Functionen von x zu differentiiren, und zwar kann

man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auch berechnen, ohne die Gleichungen (2.) und (3.) wirklich zu bilden.

Dies geschieht, indem man auf die Gleichungen (1.) die Regeln anwendet, welche in Formel Nr. 136 der Tabelle ausgesprochen sind, wobei man aber in diesem Falle die drei Veränderlichen u_1, u_2, u_3 bezw. mit x, y, z und die unabhängige Veränderliche t, von der u_1, u_2, u_3 abhängig sind, mit x vertauschen muss. Dadurch erhält man

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder, wenn man wieder $\frac{\partial F}{\partial x}$ mit F_1, $\frac{\partial F}{\partial y}$ mit F_2, $\frac{\partial F}{\partial z}$ mit F_3 bezeichnet,

$$F_1 + F_2\frac{dy}{dx} + F_3\frac{dz}{dx} = 0. \tag{4.}$$

Ebenso findet man

$$G_1 + G_2\frac{dy}{dx} + G_3\frac{dz}{dx} = 0. \tag{5.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich jetzt sehr leicht durch Elimination

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_2G_3 - F_3G_2} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_2G_3 - F_3G_2}. \tag{6.}$$

Mit demselben Rechte, mit welchem in dem Vorstehenden x als die unabhängige Veränderliche betrachtet wurde, kann man auch y als die unabhängige Veränderliche ansehen. Dadurch werden x und z Functionen von y, und man erhält in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (6.)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_3G_1 - F_1G_3} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_3G_1 - F_1G_3}. \tag{7.}$$

Macht man z zur unabhängigen Veränderlichen, so erhält man

$$\frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}. \tag{8.}$$

Man kann die Gleichungen (6.), (7.) und (8.) zusammenfassen in der Formel

$$(9.)\quad dx : dy : dz = (F_2 G_3 - F_3 G_2) : (F_3 G_1 - F_1 G_3) : (F_1 G_2 - F_2 G_1),$$

oder

$$(9\text{a.})\quad dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}.$$

Uebungs-Beispiele für den Gebrauch dieser Formeln finden sich bei den geometrischen Anwendungen in den folgenden Paragraphen.

XIV. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes.

§ 113.

Bestimmung der Tangenten und der Normalebenen bei einer Curve im Raume.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 140 bis 143a.)

Aufgabe 1. Man soll das Bogenelement ds einer Curve im Raume bestimmen und die Cosinusse der Winkel α, β, γ berechnen, welche ds mit den positiven Richtungen der Coordinaten-Axen bildet.

Auflösung. Es seien P und P_1 zwei benachbarte Punkte auf der Curve mit den Coordinaten x, y, z bezw.

$$x_1 = x + dx, \quad y_1 = y + dy, \quad z_1 = z + dz, \tag{1.}$$

Fig. 127.

wo wieder die Bezeichnungen dx, dy, dz andeuten sollen, dass die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken dürfen.

Legt man jetzt durch die Punkte P und P_1 Ebenen parallel zu den drei Coordinaten-Ebenen (vergl. Fig. 127), so erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Seitenkanten dx, dy, dz und der Diagonale

$$\overline{PP_1} = ds. \tag{2.}$$

Da die Sehne PP_1 mit dem Bogen PP_1 zusammenfällt, wenn die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, so

nennt man ds das „*Bogenelement*" und erhält nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.}$$

Ferner ergiebt sich ohne Weiteres aus der Figur, dass

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \tag{4.}$$

ist, wobei α, β, γ die Winkel sind, welche ds mit den positiven Richtungen der Coordinaten-Axen bildet.

Aufgabe 2. Eine Raumcurve sei durch die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{5.}$$

gegeben; man soll im Curvenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z ihre Tangente bestimmen.

Auflösung. Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume schreibt man gewöhnlich in der Form

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu. \tag{6.}$$

Dies seien also auch die Gleichungen der gesuchten Tangente, wobei die laufenden Coordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden mögen, weil x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes P sind. Damit die Tangente durch diesen Punkt P geht, müssen die Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{7.}$$

gelten, folglich erhält man für die Tangente die Gleichungen

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z). \tag{8.}$$

Um auch noch die Coefficienten m und n zu bestimmen, beachte man, dass die Tangente auch durch den Curvenpunkt P' hindurchgehen muss, welcher dem Punkte P unendlich nahe liegt und deshalb die Coordinaten

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz \tag{9.}$$

hat. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (8.) ein, so erhält man

$$dx = mdz, \quad dy = ndz, \tag{10.}$$

oder, indem man durch dz dividirt und Formel Nr. 139 der Tabelle berücksichtigt,

$$(11.)\quad m = \frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}, \qquad n = \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Die Tangente im Punkte P hat daher die Gleichungen

$$(12.)\quad x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z), \quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

oder

$$(12a.)\quad x' - x = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z), \quad y' - y = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z).$$

Gewöhnlich schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$(13.)\quad \frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - y}{dz},$$

oder

$$(13a.)\quad \frac{x' - x}{F_2G_3 - F_3G_2} = \frac{y' - y}{F_3G_1 - F_1G_3} = \frac{z' - z}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Aufgabe 3. Man soll die Ebene bestimmen, welche im Curvenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z auf der Curve senkrecht steht.

Auflösung. Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt P hindurchgeht, ist

$$(14.)\quad A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0.$$

Damit diese Ebene auf einer Geraden

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu$$

senkrecht steht, muss nach bekannten Sätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes

$$(15.)\quad m = \frac{A}{C}, \qquad n = \frac{B}{C}$$

sein. In dem vorliegenden Falle ist aber die Tangente die Gerade, welche auf der gesuchten Ebene senkrecht stehen soll, folglich gehen die Gleichungen (15.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) über in

$$(15a.)\quad \frac{dx}{dz} = \frac{A}{C}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B}{C},$$

so dass man für die gesuchte Ebene die Gleichung

(16.) $$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0,$$

oder

(16a.) $$(F_2G_3 - F_3G_2)(x' - x) + (F_3G_1 - F_1G_3)(y' - y) + (F_1G_2 - F_2G_1)(z' - z) = 0$$

erhält. Diese Ebene heisst die „*Normalebene*" der Raumcurve im Punkte P.

Eine Curve im Raume kann auch durch drei Gleichungen von der Form

(17.) $$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

gegeben sein. Auf drei solche Gleichungen wird man z. B. geführt, wenn man aus den Gleichungen (5.) in der früher beschriebenen Weise (Gleichung (2.) und (3.) in § 112) die Gleichungen

(18.) $$y = f(x), \quad z = g(x)$$

ableitet, die Function $x = f_1(t)$ nach Belieben annimmt (z. B. $x = t$ macht) und diesen Werth von x in die Gleichungen (18.) einsetzt. Dann kann man die *Gleichungen der Tangente* im Curvenpunkte P ohne Weiteres auf die Form

(13b.) $$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z' - z}{\frac{dz}{dt}}$$

und die *Gleichung der Normalebene* auf die Form

(16b.) $$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} + (z' - z)\frac{dz}{dt} = 0$$

bringen.

§ 114.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Der Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

schneidet die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

in einer Raumcurve; man soll die Tangente und die Normalebene dieser Curve im Punkte P bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad G = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \tag{1.}$$

folglich wird

$$\begin{cases} F_1 = \frac{2x}{a^2}, & F_2 = \frac{2y}{b^2}, & F_3 = -\frac{2z}{c^2}, \\ G_1 = 2x, & G_2 = 2y, & G_3 = 2z, \end{cases} \tag{2.}$$

also

$$\begin{cases} F_2G_3 - F_3G_2 = \frac{4yz}{b^2} + \frac{4yz}{c^2} = \frac{4yz}{b^2c^2}(b^2 + c^2), \\ F_3G_1 - F_1G_3 = -\frac{4xz}{c^2} - \frac{4xz}{a^2} = -\frac{4zx}{c^2a^2}(c^2 + a^2), \\ F_1G_2 - F_2G_1 = \frac{4xy}{a^2} - \frac{4xy}{b^2} = -\frac{4xy}{a^2b^2}(a^2 - b^2). \end{cases} \tag{3.}$$

Dies giebt nach Formel Nr. 142 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$\frac{b^2c^2(x' - x)}{yz(b^2 + c^2)} = -\frac{c^2a^2(y' - y)}{zx(c^2 + a^2)} = -\frac{a^2b^2(z' - z)}{xy(a^2 - b^2)}, \tag{4.}$$

oder

$$\begin{cases} c^2(a^2 - b^2)x(x' - x) = -a^2(b^2 + c^2)z(z' - z), \\ c^2(a^2 - b^2)y(y' - y) = +b^2(c^2 + a^2)z(z' - z). \end{cases} \tag{5.}$$

Aus den Gleichungen (3.) folgt sodann nach Formel Nr. 143 der Tabelle für die Normalebene die Gleichung

$$\frac{4yz}{b^2c^2}(b^2+c^2)(x'-x) - \frac{4zx}{c^2a^2}(c^2+a^2)(y'-y) - \frac{4xy}{a^2b^2}(a^2-b^2)(z'-z) = 0,$$

oder

$$a^2yz(b^2+c^2)(x'-x) - b^2zx(c^2+a^2)(y'-y) - c^2xy(a^2-b^2)(z'-z) = 0, \tag{6.}$$

oder

$$a^2(b^2 + c^2)yzx' - b^2(c^2 + a^2)zxy' - c^2(a^2 - b^2)xyz' = 0. \tag{6a.}$$

Aufgabe 2. Die Schraubenlinie hat die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad y - x\,\mathrm{tg}\left(\frac{z}{c}\right) = 0, \tag{7.}$$

oder

(7a.) $$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = c\varphi;$$
man soll die Tangente und die Normalebene im Curvenpunkte P bestimmen.

Auflösung. Hier ist

(8.) $$F = x^2 + y^2 - a^2,\quad G = y - x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right),$$
folglich wird

(9.) $$F_1 = 2x,\qquad F_2 = 2y,\quad F_3 = 0;$$

(10.) $$G_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right),\quad G_2 = 1,\quad G_3 = -\frac{x}{c}\left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right],$$
oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (7.)

(10a.) $$G_1 = -\frac{y}{x},\quad G_2 = 1,\quad G_3 = -\frac{x}{c}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{a^2}{cx}.$$

Dies giebt

(11.) $$\begin{cases} F_2G_3 - F_3G_2 = -\dfrac{2a^2y}{cx}, \\ F_3G_1 - F_1G_3 = +\dfrac{2a^2x}{cx} = \dfrac{2a^2}{c}, \\ F_1G_2 - F_2G_1 = 2x + \dfrac{2y^2}{x} = \dfrac{2a^2}{x} = \dfrac{2a^2c}{cx}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Tangente sind daher nach Formel Nr. 142 der Tabelle
$$-\frac{cx(x' - x)}{2a^2y} = \frac{cx(y' - y)}{2a^2x} = \frac{cx(z' - z)}{2a^2c},$$
oder

(12.) $$x' - x = -\frac{y}{c}(z' - z),\quad y' - y = \frac{x}{c}(z' - z).$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 143 der Tabelle
$$-\frac{2a^2y}{cx}(x' - x) + \frac{2a^2x}{cx}(y' - y) + \frac{2a^2c}{cx}(z' - z) = 0,$$
oder

(13.) $$y(x' - x) - x(y' - y) - c(z' - z) = 0,$$
oder

$$yx' - xy' - c(z' - z) = 0. \tag{13a.}$$

Weit einfacher findet man diese Resultate, wenn man von den Gleichungen (7a.) ausgeht, aus welchen sich ohne Weiteres

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = a\cos\varphi = x, \quad \frac{dz}{d\varphi} = c \tag{14.}$$

ergiebt. Deshalb erhält man aus Formel Nr. 142a der Tabelle für die *Gleichungen der Tangente* in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (12.)

$$-\frac{x' - x}{y} = \frac{y' - y}{x} = \frac{z' - z}{c} \tag{15.}$$

und nach Formel Nr. 143a der Tabelle für die *Gleichung der Normalebene* in Uebereinstimmung mit Gleichung (13.)

$$-y(x' - x) + x(y' - y) + c(z' - z) = 0. \tag{16.}$$

Aufgabe 3. Die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{17.}$$

wird von dem Cylinder

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \tag{18.}$$

durchbohrt; man soll die Tangente und die Normalebene der Schnittcurve im Punkte P mit den Coordinaten x, y, z bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2, \quad G = x^2 - ax + y^2, \tag{19.}$$

folglich wird

$$\begin{cases} F_1 = 2x, & F_2 = 2y, \quad F_3 = 2z, \\ G_1 = 2x - a, & G_2 = 2y, \quad G_3 = 0, \end{cases} \tag{20.}$$

also

$$\begin{cases} F_2G_3 - F_3G_2 = -4yz, \\ F_3G_1 - F_1G_3 = 4xz - 2az, \\ F_1G_2 - F_2G_1 = 4xy - 4xy + 2ya = 2ay; \end{cases} \tag{21.}$$

dies giebt nach Formel Nr. 142 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{-2yz} = \frac{y' - y}{z(2x - a)} = \frac{z' - z}{ay}, \tag{22.}$$

oder

$$(23.)\quad \begin{cases} a(x'-x) = -2z(z'-z), \\ ay(y'-y) = (2x-a)z(z'-z). \end{cases}$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 143 der Tabelle

$$(24.)\quad 2yz(x'-x) - (2x-a)z(y'-y) - ay(z'-z) = 0,$$

oder

$$(24a.)\quad 2yzx' - (2x-a)zy' - ayz' = 0.$$

Noch einfacher findet man diese Resultate, wenn man

$$(25.)\quad x = \frac{a}{2}(1+\cos\varphi) = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

setzt; dann folgt aus Gleichung (18.)

$$(26.)\quad y = \frac{a}{2}\sin\varphi = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

und aus Gleichung (17.)

$$(27.)\quad z = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dadurch erhält man

$$(28.)\quad \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a}{2}\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\varphi,\quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dies giebt nach Formel Nr. 142a der Tabelle in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (22.) für die Tangente die Gleichungen

$$(29.)\quad \frac{x'-x}{-\sin\varphi} = \frac{y'-y}{\cos\varphi} = \frac{z'-z}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Für die Normalebene findet man in Uebereinstimmung mit Gleichung (24.) nach Formel Nr. 143a der Tabelle die Gleichung

$$(30.)\quad -\sin\varphi(x'-x) + \cos\varphi(y'-y) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)(z'-z) = 0,$$

oder

$$(30a.)\quad -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + z'\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

§ 115.

Tangenten und Tangentialebenen an eine beliebige krumme Fläche.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 144 und 145.)

Eine gerade Linie heisst eine Tangente der Fläche

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y), \tag{1.}$$

wenn sie durch zwei unendlich nahe Punkte der Fläche hindurchgeht.

Aufgabe 1. Man soll die Bedingungen finden, unter denen die Gerade

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu \tag{2.}$$

die Fläche

$$z = f(x, y)$$

im Flächenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z berührt.

Auflösung. Die laufenden Coordinaten der geraden Linie sind mit x', y', z' bezeichnet worden, weil x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes P sind. Damit nun die Gerade durch diesen Berührungspunkt P hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{3.}$$

gelten. Daraus folgt

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z). \tag{4.}$$

Irgend ein Flächenpunkt P', welcher dem Punkte P benachbart ist, hat die Coordinaten

$$x' = x + \Delta x, \quad y' = y + \Delta y, \quad z' = z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y), \tag{5.}$$

wobei noch Δx und Δy ganz beliebig und *von einander unabhängig* sind. Damit nun die Gerade auch durch diesen Punkt P' hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$\Delta x = m\Delta z \quad \text{und} \quad \Delta y = n\Delta z \tag{6.}$$

befriedigt werden.

Lässt man jetzt Δx und Δy unendlich klein werden, indem man sie bezw. durch dx und dy ersetzt, so rückt der Punkt P' dem Punkte P unendlich nahe. Dann wird auch Δz unendlich klein, und zwar geht Δz über in

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{7.}$$

Dadurch nehmen die Gleichungen (6.) die Form an

$$dx = m\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \quad dy = n\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right).$$

Dies giebt

$$\left(m \frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) dx + m \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0, \tag{8.}$$

$$n \frac{\partial z}{\partial x} dx + \left(n \frac{\partial z}{\partial y} - 1\right) dy = 0. \tag{9.}$$

Multiplicirt man Gleichung (8.) mit $n \frac{\partial z}{\partial x}$, Gleichung (9.) mit $1 - m \frac{\partial z}{\partial x}$, so erhält man durch Addition und Fortlassung des Factors dy

$$m \frac{\partial z}{\partial x} + n \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0. \tag{10.}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so geht die Gerade

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z)$$

durch zwei unendlich nahe Punkte der Fläche, d. h. sie ist eine Tangente derselben.

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, so erhält man, indem man y als constant ansieht und die Gleichung nach x differentiirt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{oder} \quad F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \tag{11.}$$

und indem man x als constant ansieht und nach y differentiirt,

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{oder} \quad F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{12.}$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}. \tag{13.}$$

Deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$F_1 m + F_2 n + F_3 = 0. \tag{14.}$$

Aufgabe 2. Die Gleichung einer krummen Fläche sei wieder

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y); \tag{15.}$$

man soll durch den Punkt P mit den Coordinaten x, y, z eine Tangentialebene legen.

Auflösung. Da in Aufgabe 1 die Grössen dx und dy von einander *unabhängig* sind, so giebt es unendlich viele Tangenten der Fläche im Punkte P. Davon kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man in den Gleichungen (10.) und (14.) den Werth von m noch beliebig annehmen und dann den Werth von n aus dieser Gleichung berechnen kann. Es wird nämlich

$$n = \frac{1 - m\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{F_1 m + F_3}{F_2}. \tag{16.}$$

Setzt man diesen Werth von n in die Gleichungen (4.) ein, so erhält man

$$x' - x = m(z' - z), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y) = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z' - z), \tag{17.}$$

oder

$$x' - x = m(z' - z), \quad F_2(y' - y) = -(F_1 m + F_3)(z' - z). \tag{17a.}$$

Diese Gleichungen stellen also eine Tangente im Flächenpunkte P dar, welchen Werth auch m haben mag. Eliminirt man jetzt aus diesen beiden Gleichungen m, so erhält man

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y), \tag{18.}$$

oder

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0. \tag{18a.}$$

Dies sind zwei verschiedene Formen für die Gleichung einer *Ebene*, in welcher alle Tangenten liegen, die im Punkte P an die Fläche möglich sind. Man nennt diese Ebene daher die „*Tangentialebene der Fläche im Punkte P*“.

Die Gleichung der Tangentialebene findet man auch in folgender Weise. Der Flächenpunkt P habe wieder die Coordinaten x, y, z. Lässt man jetzt x um Δx wachsen, während y unverändert bleibt, so gelangt man vom Punkte P zu einem benachbarten Flächenpunkte P_1 (Fig. 128), dessen Coordinaten

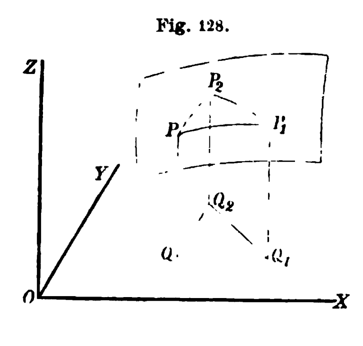


Fig. 128.

$$x_1 = x + \Delta x, \quad y_1 = y$$

und

$$z_1 = z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y)$$

sind. Lässt man dagegen y um Δy wachsen, während x constant bleibt, so gelangt man vom Punkte P zu einem dritten Flächenpunkte P_2 mit den Coordinaten

$$x_2 = x, \quad y_2 = y + \Delta y, \quad z_2 = z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y).$$

Durch diese drei Punkte P, P_1, P_2 ist eine Ebene bestimmt, deren Gleichung

$$(19.) \qquad Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

heissen möge. Auch hier sind die laufenden Coordinaten der Ebene mit x', y', z' bezeichnet worden, weil x, y, z die Coordinaten des Punktes P sind. Wenn C von Null verschieden ist, kann man die Gleichung dieser Ebene noch, indem man durch C dividirt, auf die Form

$$(20.) \qquad z' = ax' + by' + c$$

bringen. Damit nun die Ebene durch den Punkt P geht, muss die Gleichung

$$(21.) \qquad z = ax + by + c$$

gelten, folglich wird

$$(22.) \qquad z' - z = a(x' - x) + b(y' - y).$$

Damit die Ebene durch die Punkte P_1 und P_2 hindurchgeht, muss die Gleichung (22.) auch für die Coordinaten dieser Punkte befriedigt werden. Dadurch erhält man die beiden Gleichungen

$$\Delta_x z = a\Delta x \quad \text{und} \quad \Delta_y z = b\Delta y,$$

oder

$$(23.)\qquad a = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad b = \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Lässt man jetzt Δx und Δy unendlich klein werden, indem man sie durch ihre Differentiale dx und dy ersetzt, so rücken die Punkte P_1 und P_2 dem Punkte P unendlich nahe, und die Gleichungen (23.) gehen über in

$$(24.)\qquad a = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial z}{\partial y},$$

so dass Gleichung (22.) die Form

$$(25.)\qquad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y)$$

annimmt, welche mit Gleichung (18.) übereinstimmt.

Der Sinn dieser zweiten Herleitung ist folgender:

Die geraden Linien PP_1 und PP_2 werden Tangenten der Fläche, wenn die Punkte P_1 und P_2 dem Punkte P unendlich nahe rücken. Die Ebene PP_1P_2 ist also, wenn man Δx und Δy unendlich klein werden lässt, durch *zwei* Tangenten des Punktes P hindurchgelegt. Da aber *alle* Tangenten des Flächenpunktes P in derselben Ebene, nämlich in der Tangentialebene, liegen, so ist diese Ebene die Tangentialebene.

Die Gleichung der Tangentialebene wird illusorisch, wenn

$$(26.)\qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0.$$

In diesem Falle, welcher allerdings *nur ausnahmsweise* eintreten kann, liegen die Tangenten des Flächenpunktes P *nicht* mehr sämmtlich in derselben Ebene.

So hat z. B. die Spitze des Kegels mit der Gleichung

$$(27.)\qquad F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

die Coordinaten

$$(28.)\qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

für diese Werthe von x, y, z wird aber auch

$$(29.)\qquad F_1 = \frac{2x}{a^2} = 0, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2} = 0, \quad F_3 = -\frac{2z}{c^2} = 0.$$

Man nennt einen Punkt der Fläche, für welchen die Gleichungen (26.) gelten, „einen *Knotenpunkt*“.

§ 116.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein *Ellipsoid* ist durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1.}$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Tangentialebene bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

also

$$F_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2}, \quad F_3 = \frac{2z}{c^2}; \tag{2.}$$

deshalb wird nach Formel Nr. 145 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x(x' - x)}{a^2} + \frac{y(y' - y)}{b^2} + \frac{z(z' - z)}{c^2} = 0, \tag{3.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (1.) und (3.) addirt,

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0. \tag{4.}$$

Aufgabe 2. Ein *elliptisches Paraboloid* ist durch die Gleichung

$$x^2 + a^2y^2 - 2pz = 0 \tag{5.}$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Tangentialebene bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y, z) = x^2 + a^2y^2 - 2pz,$$

also

$$F_1 = 2x, \quad F_2 = 2a^2y, \quad F_3 = -2p, \tag{6.}$$

deshalb wird nach Formel Nr. 145 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$x(x' - x) + a^2y(y' - y) - p(z' - z) = 0, \tag{7.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (5.) und (7.) addirt,

$$xx' + a^2yy' - p(z' + z) = 0. \tag{8.}$$

Ist z. B.

$$x = 3a, \quad y = 4, \quad \text{also} \quad 2pz = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2,$$

so geht Gleichung (8.) über in

$$(8a.) \qquad 6ax' + 8a^2y' = 2pz' + 25a^2.$$

§ 117.

Theorie der Umhüllungscurven oder Enveloppen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 146.)

Ist eine Gleichung zwischen x, y und u, nämlich

$$(1.) \qquad F(x, y, u) = 0$$

gegeben, so stellt dieselbe für jeden constanten Werth von u eine Curve dar. Da es aber unendlich viele Werthe von u giebt, so entspricht der Gleichung (1.) eine ganze *Schaar* von Curven. So entspricht z. B. der Gleichung

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

eine ganze Schaar von *concentrischen Kreisen*, da der Halbmesser u noch unendlich viele Werthe haben darf. Der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1$$

entspricht eine Schaar *confocaler Ellipsen* und *Hyperbeln*.

Der Gleichung

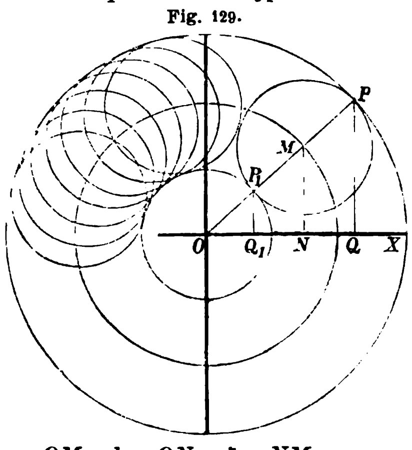
$$F(x, y, u) = (x - u)^2 + (y - \sqrt{b^2 - u^2})^2 - a^2 = 0$$

entspricht eine ganze Schaar von *Kreisen* (vergl. Fig. 129), denn für jeden Werth von u erhält man einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Coordinaten

$$\xi = u, \quad \eta = \sqrt{b^2 - u^2}$$

hat. Zwischen ξ und η besteht daher die Gleichung

Fig. 129.



$OM = b, \quad ON = \xi, \quad NM = \eta.$

$$\xi^2 + \eta^2 - b^2 = 0,$$

d. h. der Mittelpunkt M des Kreises durchläuft selbst wieder einen Kreis, welcher mit dem Halbmesser b um den Anfangspunkt O der Coordinaten beschrieben ist.

Die Grösse u nennt man dabei den „(*variablen*) *Parameter*".

Sind nun u und $u_1 = u + \varDelta u$ zwei benachbarte Werthe von u, so giebt die Zusammenstellung der beiden Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, u_1) = 0 \tag{2.}$$

die Schnittpunkte der beiden entsprechenden Curven.

Die Coordinaten dieser Schnittpunkte genügen daher auch den beiden Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{F(x, y, u + \varDelta u) - F(x, y, u)}{\varDelta u} = 0. \tag{3.}$$

Lässt man jetzt $\varDelta u$ unendlich klein werden, so gehen diese Gleichungen über in

$$F(x, y, u) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \tag{4.}$$

und geben die Schnittpunkte der Curve $F(x, y, u) = 0$ mit einer unendlich nahen Curve.

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung zwischen x und y allein, nämlich

$$S(x, y) = 0, \tag{5.}$$

welche *den geometrischen Ort aller Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Curven der gegebenen Curvenschaar darstellt.*

Dieser geometrische Ort ist eine Curve, welche die „*einhüllende Curve* oder die *Enveloppe*" genannt wird, da sie die sämmtlichen Curven der gegebenen Curvenschaar einhüllt. Es gilt nämlich folgender Satz:

Die Enveloppe hat in den Punkten, welche sie mit der zugehörigen Curve

$$F(x, y, u) = 0$$

gemein hat, auch die Tangente mit dieser Curve gemein.

Zum Beweise dieses Satzes betrachte man drei benachbarte Curven C, C_1, C_2 des gegebenen Curvensystems (vergl. Fig. 130), welche den Werthen u, u_1, u_2 des Parameters entsprechen.

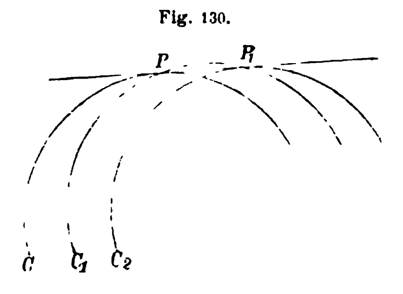


Fig. 130.

Ein Schnittpunkt der Curven C und C_1 heisse P. Dieser Schnittpunkt gehe in den Punkt P_1 über, wenn die Curve C in C_1 und die Curve C_1 in C_2 übergeht. Die Punkte P und P_1 liegen also beide auf der Curve C_1 und rücken einander unendlich nahe, wenn die Werthe u, u_1, u_2 unendlich wenig von einander verschieden sind, d. h. wenn die Curven C, C_1, C_2 einander unendlich nahe rücken. Gleichzeitig rücken die Punkte P und P_1 auf die Curve mit der Gleichung

$$S(x, y) = 0,$$

weil sie Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Curven der gegebenen Curvenschaar sind. Deshalb ist die Verbindungslinie dieser unendlich nahen Punkte P und P_1 eine Tangente der Curve C_1 und gleichzeitig auch der Curve

$$S(x, y) = 0.$$

Dadurch ist bewiesen, dass die beiden Curven im Punkte P (oder in dem unendlich nahen Punkte P_1) eine gemeinsame Tangente haben, dass sie sich also im Punkte P berühren.

Was von C_1 gilt, gilt ebenso von jeder beliebigen Curve der gegebenen Curvenschaar. Es ist also hiermit bewiesen, dass die Curve

$$S(x, y) = 0$$

sämmtliche Curven des gegebenen Curvensystems berührt: sie ist daher die *Umhüllungscurve* oder *Enveloppe*.

Dasselbe Resultat findet man auch durch Rechnung. Die Gleichung

$$S(x, y) = 0$$

kann man nämlich aus den Gleichungen (4.) dadurch herleiten, dass man den Parameter u als Function von x und y darstellt, indem man die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \quad \text{auf die Form} \quad u = \varphi(x, y)$$

bringt, und dass man sodann diesen Werth von u in die Gleichung

$$F(x, y, u) = 0$$

einsetzt. Dies giebt also

$$S(x, y) = F(x, y, u) \quad \text{für} \quad u = \varphi(x, y), \tag{6.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

Da nun aber für den betrachteten Punkt P mit den Coordinaten x, y

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist, so gehen die Gleichungen (7.) über in

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{7 a.}$$

folglich hat nach Formel Nr. 88 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{8.}$$

in dem betrachteten Punkte P für beide Curven denselben Werth, d. h. die beiden Curven haben in diesem Punkte dieselbe Tangente.

Es ist allerdings noch hervorzuheben, dass die Elimination von u aus den Gleichungen (4.) durchaus nicht immer die Gleichung einer *reellen* Curve liefert.

Dies folgt schon daraus, dass nicht jede Schaar von gleichartigen Curven eine Umhüllungscurve besitzt. Bei den concentrischen Kreisen

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

z. B. schneidet kein Kreis den anderen in einem reellen Punkte, folglich giebt es für diese Curvenschaar auch keine Umhüllungscurve.

Ebensowenig haben die einander benachbarten confocalen Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}=1, \quad (-b^2<u<+\infty)$$

oder die einander benachbarten confocalen Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}=1 \quad (-a^2<u<-b^2)$$

reelle Schnittpunkte mit einander gemein, folglich giebt es bei dieser Curvenschaar auch keine Umhüllungscurve.

Dagegen schneidet jeder der Kreise

$$(9.) \qquad F(x, y, u)=(x-u)^2+(y-\sqrt{b^2-u^2})^2-a^2=0$$

den folgenden in zwei reellen Punkten. Deshalb giebt es in diesem Falle eine Umhüllungscurve. Dabei wird

$$(10.) \qquad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u}=-2(x-u)+2(y-\sqrt{b^2-u^2})\frac{u}{\sqrt{b^2-u^2}}=0.$$

Aus Gleichung (10.) folgt

$$y-\sqrt{b^2-u^2}=\frac{x-u}{u}\sqrt{b^2-u^2}=\frac{x}{u}\sqrt{b^2-u^2}-\sqrt{b^2-u^2},$$

oder

$$(11.) \qquad y=\frac{x}{u}\sqrt{b^2-u^2};$$

deshalb findet man aus den Gleichungen (9.) und (11.)

$$x=\frac{u(b\pm a)}{b}, \quad x^2=\frac{u^2(b\pm a)^2}{b^2},$$

$$y^2=\frac{x^2(b^2-u^2)}{u^2}=\frac{(b^2-u^2)(b\pm a)^2}{b^2},$$

folglich ist

$$(12.) \qquad x^2+y^2=(b\pm a)^2.$$

Nimmt man in diesen Gleichungen das obere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b+a$; und nimmt man das untere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b-a$. Die Umhüllungscurve zerfällt also bei diesem Beispiele in zwei concentrische Kreise. (Vergl. Fig. 129.)

§ 118.

Uebungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein System von geraden Linien (Fig. 131) sei durch die Bedingung bestimmt, dass die zwischen den Coordinaten-Axen liegenden Abschnitte derselben die constante Länge c haben. Man soll die Gleichung ihrer Umhüllungscurve aufstellen.

Auflösung. Es seien $OA = a$ und $OB = b$ die Abschnitte, welche die Gerade auf den Coordinaten-Axen abschneidet, dann ist bekanntlich ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{1.}$$

oder

$$bx + ay - ab = 0.$$

Der Abschnitt AB der Geraden zwischen den beiden Coordinaten-Axen ist daher gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Hat also dieser Abschnitt die constante Länge c, und bezeichnet man den Winkel OAB mit u, so wird

$$(2.)\quad a = c\cos u, \qquad (3.)\quad b = c\sin u;$$

die Gleichung der Geraden AB geht daher über in

$$F(x, y, u) = x\sin u + y\cos u - c\sin u\cos u = 0. \tag{4.}$$

Dabei ergänzt der Winkel u den Winkel α, welchen die Gerade AB mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, zu 180^0.

Um die Enveloppe dieser Schaar gerader Linien zu finden, bilde man

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = x\cos u - y\sin u - c(\cos^2 u - \sin^2 u) = 0. \tag{5.}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4.) und (5.) bezw. mit $\sin u$ und $\cos u$, so erhält man durch Addition

$$x = + c\cos^3 u. \tag{6.}$$

Multiplicirt man sie dagegen bezw. mit $\cos u$ und $-\sin u$, so findet man durch Addition

$$y = + c\sin^3 u. \tag{7.}$$

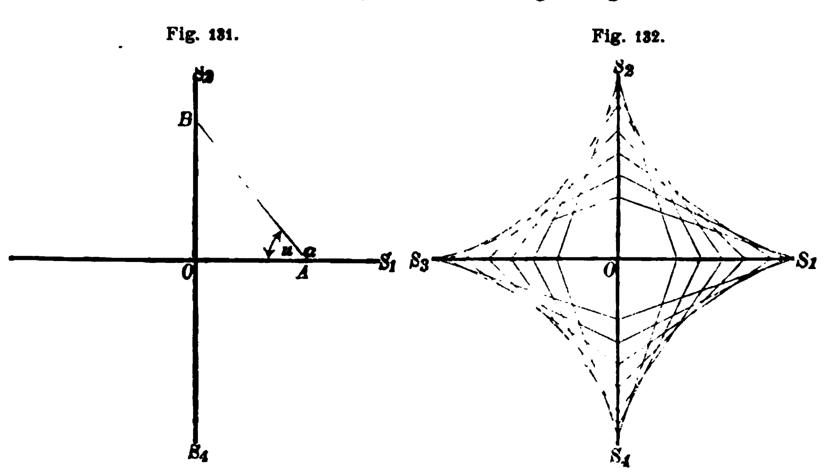


Fig. 131. Fig. 132.

Die Gleichungen (6.) und (7.) geben die Coordinaten des Schnittpunktes der dem Werthe u entsprechenden Geraden mit der unendlich nahen. Dieser Punkt ist daher auch ein Punkt der Umhüllungscurve. Die Gleichungen

$$x = c\cos^3 u, \quad y = c\sin^3 u \tag{8.}$$

stellen also die Umhüllungscurve dar, wenn u alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft. Man kann aber aus diesen Gleichungen auch den Parameter u eliminiren. Erhebt man sie nämlich zur Potenz $\frac{2}{3}$, so erhält man

$$x^{\frac{2}{3}} = + c^{\frac{2}{3}} \cos^2 u, \quad y^{\frac{2}{3}} = + c^{\frac{2}{3}} \sin^2 u,$$

und wenn man diese Gleichungen addirt,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}. \tag{9.}$$

Dies ist die Gleichung der Umhüllungscurve, und zwar ist diese Curve unter dem Namen „*Astroide*“ bekannt. (Vergl. Fig. 132.)

Aufgabe 2. Es ist durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = x\cos(3u) + y\sin(3u) - a\cos u = 0 \tag{10.}$$

eine Schaar von geraden Linien gegeben; man soll die von ihnen eingehüllte Curve bestimmen. (Vergl. Fig. 134.)

Auflösung. Hier wird

$$(11.)\quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -3x\sin(3u) + 3y\cos(3u) + a\sin u = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, bezw. x, so erhält man

$$(12.)\quad \begin{cases} 3x = a[3\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u)], \\ 3y = a[3\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u)]. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u) = \cos(2u),$$
$$2\cos u\cos(3u) = \cos(4u) + \cos(2u);$$

ferner ist

$$\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u) = \sin(2u),$$
$$2\cos u\sin(3u) = \sin(4u) + \sin(2u),$$

folglich wird

$$(13.)\quad \begin{cases} 3x = a[\cos(4u) + 2\cos(2u)], \\ 3y = a[\sin(4u) + 2\sin(2u)]. \end{cases}$$

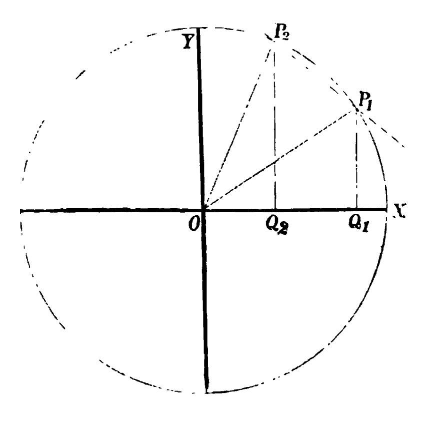
Setzt man $a = 3a_1$ und $2u = t + \pi$, so wird

$$(14.)\quad \begin{cases} \cos(2u) = -\cos t, \quad \sin(2u) = -\sin t, \\ \cos(4u) = +\cos(2t), \quad \sin(4u) = +\sin(2t), \end{cases}$$

und die Gleichungen (13.) gehen über in

$$(15.)\quad x = -a_1[2\cos t - \cos(2t)], \quad y = -a_1[2\sin t - \sin(2t)].$$

Fig. 133.



Dies sind bekanntlich die Gleichungen der *Cardioide.* Die Cardioide war ein besonderer Fall der Epicykloiden, welchen man erhält, wenn der Halbmesser des *festen* Kreises dem Halbmesser des *rollenden* Kreises gleich ist. Durch die vorliegende Aufgabe findet man also eine andere Erzeugungsweise der Cardioide, die sich dann auch so verallgemeinern

lässt, dass man jede beliebige Epicykloide (oder Hypocykloide) erhält.

Die Gleichung (10.) stellt nämlich eine Gerade dar (vergl. Fig. 133), welche durch die beiden Punkte P_1 und P_2 mit den Coordinaten

$$x_1 = a\cos(2u), \quad y_1 = a\sin(2u)$$

und

$$x_2 = a\cos(4u), \quad y_2 = a\sin(4u)$$

hindurchgeht, denn diese Werthepaare von x und y befriedigen die Gleichung (10.). Nun wird aber

$$(16.) \qquad x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \text{und} \quad x_2^2 + y_2^2 = a^2,$$

d. h. die Punkte P_1 und P_2 liegen beide auf einem Kreise, der mit dem Halbmesser a um den Anfangspunkt O der Coordinaten beschrieben ist. Dabei sind die Winkel, welche die Halbmesser OP_1 und OP_2 mit der X-Axe bilden,

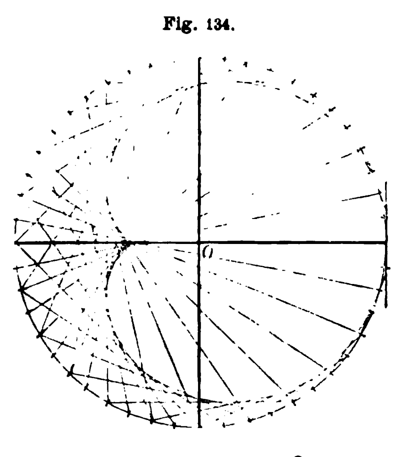
$$\sphericalangle XOP_1 = 2u, \quad \sphericalangle XOP_2 = 4u = 2\sphericalangle XOP_1.$$

Wenn sich also der Parameter u verändert, so bewegen sich die Punkte P_1 und P_2 beide auf diesem Kreise fort, der Punkt P_2 aber doppelt so schnell wie der Punkt P_1.

Dies giebt folgende Erzeugung der Cardioide:

Bewegen sich auf einem Kreise zwei Punkte P_1 und P_2 so, dass P_2 doppelt so schnell läuft wie P_1, so umhüllt die Gerade P_1P_2 eine Cardioide. (Vergl. Fig. 134.)

Fig. 134.



In ähnlicher Weise können auch die anderen Epicykloiden erzeugt werden, wenn der Punkt P_2 auf dem Kreise m-mal so schnell fortschreitet wie der Punkt P_1.

Dabei war bisher vorausgesetzt, dass die Punkte P_1 und P_2 den Kreis in gleicher Richtung durchlaufen. Wenn sie aber den Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so umhüllt die Gerade P_1P_2 eine „*Hypocykloide*“.

Man kann sich in folgender Weise von dem Vorstehenden durch Zeichnung überzeugen. Man theile den Umfang eines Kreises in eine Anzahl gleicher Theile. (Vergl. Fig. 134.) Es sei z. B. diese Anzahl gleich 48. Dann bezeichne man die Theilpunkte der Reihe nach durch die Nummern

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots 47, 48,$$

wobei der Punkt 48 mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Jetzt verbinde man die Punkte

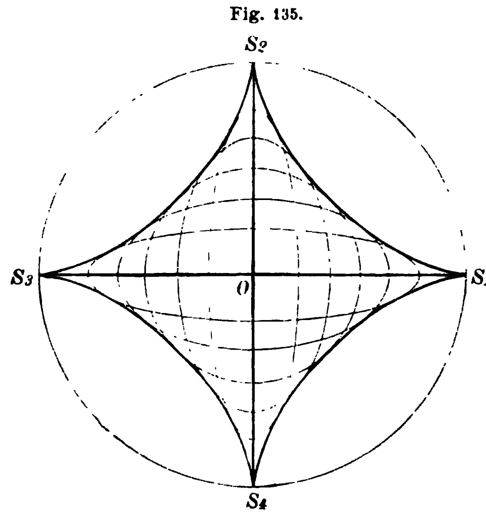
$$1 \text{ und } 2, \quad 2 \text{ und } 4, \quad 3 \text{ und } 6, \ldots$$

allgemein k und $2k$ durch gerade Linien. Auf diese Weise erhält man 48 Tangenten der *Cardioide*, und zwar wird man daraus die Gestalt der Cardioide sicherer gewinnen, als wenn man die Curve punktweise construirt hätte.

Verbindet man dagegen die Punkte k und mk durch Gerade, so erhält man eine andere *Epicykloide*, welche der Zahl m entspricht, mit grosser Genauigkeit als die *Enveloppe* ihrer Tangenten.

In ähnlicher Weise kann man auch die *Hypocykloide* als Enveloppe ihrer Tangenten zeichnen. In diesem Falle wird es zweckmässig sein, die Anzahl der Theilpunkte auf dem Kreise etwas grösser anzunehmen.

Fig. 135.



Aufgabe 3. Es ist eine Schaar concentrischer Ellipsen gegeben, deren Halbaxen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen und die constante Summe c haben; man soll die Gleichung der Enveloppe bestimmen. (Vgl. Fig. 135.)

Auflösung. Die Gleichung einer Ellipse mit den Halbaxen a und b ist

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Da aber die Axen veränderliche Länge und die constante Summe c haben sollen, so setze man

$$a = u \quad \text{und} \quad b = c - u.$$

Dadurch wird die Gleichung der gegebenen Curvenschaar

$$F(x, y, u) = (c - u)^2 x^2 + u^2 y^2 - u^2 (c - u)^2 = 0. \tag{17.}$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation nach u

$$-2(c - u)x^2 + 2uy^2 - 2u(c - u)(c - 2u) = 0, \tag{18.}$$

oder, wenn man mit $-\frac{u}{2}$ multiplicirt,

$$(c - u)ux^2 - u^2 y^2 + u^2(c - u)(c - 2u) = 0. \tag{18 a.}$$

Indem man die Gleichungen (17.) und (18 a.) addirt, findet man

$$(c - u)cx^2 - (c - u)u^3 = 0,$$

oder

$$x^2 = \frac{u^3}{c}, \quad x^{\frac{2}{3}} = \frac{u}{\sqrt[3]{c}}. \tag{19.}$$

Setzt man diesen Werth von x^2 in die Gleichung (17.) ein, so folgt

$$y^2 = \frac{(c - u)^3}{c}, \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{c - u}{\sqrt[3]{c}}. \tag{20.}$$

Deshalb wird

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}, \tag{21.}$$

d. h. die Enveloppe ist wieder eine *Astroide*.

Aufgabe 4. Es ist eine Schaar von Parabeln durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = 4c(y - ux) + (1 + u^2)x^2 = 0 \tag{22.}$$

gegeben; man soll ihre Enveloppe bestimmen. (Vergl. Fig. 136.)

Auflösung. Hier ist

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -4cx + 2ux^2 = 0. \tag{23.}$$

Dies giebt die beiden Lösungen

$$(24.) \quad x = 0 \qquad \text{und} \qquad (24\text{a.}) \quad u = \frac{2c}{x}.$$

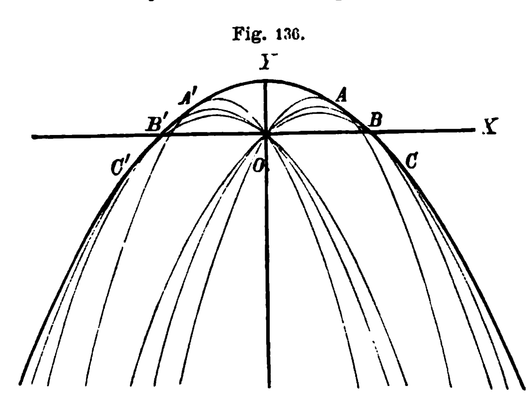


Fig. 136.

Setzt man diesen Werth von u in die Gleichung (22.) ein, so erhält man für die Enveloppe die Gleichung

$$(25.)\quad x^2 + 4c(y - c) = 0.$$

Die Enveloppe ist also wieder eine *Parabel.* Ausserdem schneiden sich alle Parabeln der gegebenen Schaar im Punkte O, welcher als ein Theil der Enveloppe zu betrachten ist und der Lösung durch Gleichung (24.) entspricht.

Aufgabe 5. Es ist eine Schaar von *Kreisen* durch die Gleichung

$$(26.)\quad F(x, y, u) = (x - u)^2 + y^2 - 2up + p^2 = 0$$

gegeben; man soll die Enveloppe bestimmen. (Vergl. Fig. 137.)

Auflösung. Hier ist

$$(27.)\quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -2(x - u) - 2p = 0,$$

oder

$$(28.)\quad x = u - p.$$

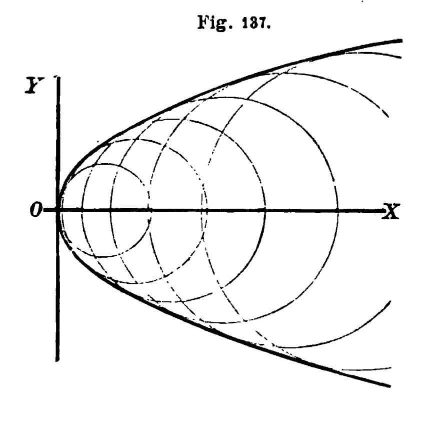


Fig. 137.

Setzt man diesen Werth von x in die Gleichung (26.) ein, so wird

$$(29.)\quad y = \pm\sqrt{2p(u - p)}.$$

Die Gleichungen (28.) und (29.) geben die Schnittpunkte des Kreises, der dem Parameter u entspricht, mit dem unendlich nahen. Diese Schnittpunkte werden erst reell, wenn

$$(30.)\quad u \geqq p.$$

Die Kreise selbst dagegen werden schon reell, wenn

$$2u \geqq p. \tag{31.}$$

Liegt u zwischen $\frac{p}{2}$ und p, so sind die Kreise zwar reell, schneiden aber einander nicht. In diesem Falle enthält also die gegebene Curvenschaar unendlich viele Curven, welche die benachbarten Curven in keinem reellen Punkte schneiden.

Indem man schliesslich noch u aus den Gleichungen (26.) und (28.) eliminirt, erhält man die Gleichung der Enveloppe, nämlich

$$y^2 = 2px. \tag{32.}$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel.*

§ 119.

Doppelpunkte und isolirte Punkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 147.)

Wenn eine Curve, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

sein möge, zweimal durch denselben Punkt hindurchgeht, so nennt man diesen Punkt einen „*Doppelpunkt* der Curve". So hat z. B. das *Folium Cartesii* mit der Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vergl. Fig. 83 auf Seite 378.) Ebenso hat die *Lemniscate* mit der Gleichung

$$r^2 = a^2 \cos(2\varphi),$$

oder

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vergl. Fig. 125 und 126 auf Seite 445 und 453.)

Um nun zu untersuchen, für welche Werthe von x und y eine Curve einen Doppelpunkt hat, braucht man nur zu beachten, dass in einem Doppelpunkte nicht *eine*, sondern *zwei* Tangenten an die Curve möglich sind, denn man kann an jeden der beiden

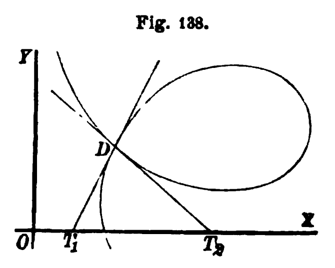


Fig. 138.

Curvenzweige, welche durch den Doppelpunkt hindurchgehen, eine Tangente legen. (Vergl. Fig. 138.) Streng genommen giebt es sogar in einem Doppelpunkte *unendlich viele* Tangenten, wenn man von der Erklärung ausgeht, dass jede Gerade, welche zwei unendlich nahe Punkte der Curve mit einander verbindet, eine Tangente der Curve ist. Danach würde *jede* Gerade, welche man durch den Doppelpunkt legt, als eine Tangente aufgefasst werden können. Hier soll aber nur die Verbindungslinie von zwei unendlich nahen Punkten, welche *auf demselben Zweige der Curve liegen*, als eine Tangente angesehen werden.

Ist nun $F(x, y)$ eine *eindeutige* Function von x und y, so gilt dasselbe von

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}; \tag{2.}$$

es wird also für jedes Werthepaar x, y die Richtungstangente

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} \tag{3.}$$

im Allgemeinen nur einen einzigen Werth haben, so dass der zugehörige Curvenpunkt nur ein einfacher Punkt sein kann.

Nur in dem besonderen Falle, wo $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ beide gleich 0 sind, erhält der Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$; dann kann also $\operatorname{tg}\alpha$ *möglicher Weise* mehr als einen Werth haben. Die Methode, welche in § 58 zur Berechnung von Ausdrücken angegeben wurde, welche an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, führt hierbei in folgender Weise zum Ziele. Bezeichnet man wieder die zweiten partiellen Ableitungen durch Indices, so folgt aus Gleichung (3.), indem man Zähler und Nenner einzeln differentiirt,

$$\lim \frac{dy}{dx} = -\lim \frac{F_{11} + F_{12}\frac{dy}{dx}}{F_{21} + F_{22}\frac{dy}{dx}}$$

für

$$\lim F_1(x, y) = 0, \quad \lim F_2(x, y) = 0,$$

also, wenn man nach Einsetzung der in Betracht kommenden Werthe von x und y das Zeichen limes fortlässt,

$$\left(F_{21} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(F_{11} + F_{12}\frac{dy}{dx}\right),$$

oder

$$(4.) \qquad F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder

$$(4\text{a.}) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}.$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man die Gleichung

$$(5.) \qquad \frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

nochmals nach x differentiirt; dann erhält man nämlich

$$(6.) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} \\ + \left[\dfrac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2(x, y)}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\right]\dfrac{dy}{dx} + F_2(x, y)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0, \end{cases}$$

oder

$$(6\text{a.}) \qquad F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt man im Allgemeinen $\frac{d^2y}{dx^2}$; gilt aber die Voraussetzung

$$(7.) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

so erhält man wieder

$$(8.) \qquad F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder

$$(8a.)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}.$$

Hieraus erkennt man, dass unter der gemachten Voraussetzung $\frac{dy}{dx}$ *zwei* Werthe erhält, dass es also in dem betrachteten Punkte *zwei* Tangenten an die Curve giebt, deren Richtungen durch die Gleichung (8a.) bestimmt sind.

Diese Untersuchung giebt daher den Satz:

Ist der Punkt D mit den Coordinaten x, y ein Doppelpunkt der Curve, so müssen die drei Gleichungen

$$(9.)\qquad F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden.

Die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$, welche man aus der quadratischen Gleichung (8.) erhält, sind *reell*, wenn

$$(10.)\qquad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} > 0;$$

sie sind dagegen imaginär, wenn

$$(11.)\qquad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} < 0.$$

In dem ersten Falle erhält man einen *eigentlichen* Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, in dem zweiten Falle aber sind die Tangenten *imaginär*.

Ein Beispiel möge zeigen, wie die Curve in dem Doppelpunkte beschaffen ist, jenachdem der erste oder der zweite Fall eintritt. Es sei nämlich

$$(12.)\qquad F(x, y) = y^2 - (x - a)^2(x - b) = 0,$$

oder

$$(12a.)\qquad F(x, y) = y^2 - x^3 + (2a + b)x^2 - (a^2 + 2ab)x + a^2b = 0,$$

dann wird

$$(13.)\qquad \begin{cases} F_1(x, y) = -3x^2 + (4a + 2b)x - (a^2 + 2ab) \\ \qquad\qquad\; = (x - a)(-3x + a + 2b), \\ F_2(x, y) = 2y, \end{cases}$$

$$(14.)\qquad F_{11} = -6x + (4a + 2b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2.$$

Für $x = a$, $y = 0$ werden also die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt, und man erhält

$$F_{11} = -2(a - b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2.$$

Deshalb wird nach Gleichung (8a.)

$$15.) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a - b}.$$

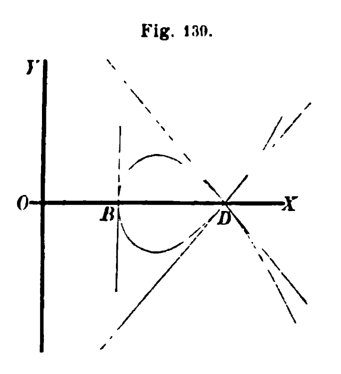


Fig. 139.

Ist $a > b$, so wird $\sqrt{a - b}$ reell; man kann in diesem Falle nicht nur die Tangenten in dem Doppelpunkte D mit den Coordinaten $x = a$, $y = 0$ zeichnen, sondern es ergiebt sich auch aus Gleichung (12.), oder aus der Gleichung

$$12b.) \quad y = \pm(x - a)\sqrt{x - b}$$

leicht die Gestalt der Curve. Sie ist symmetrisch zur X-Axe, und y wird für Werthe von x, die kleiner als b sind, imaginär, d. h. die Curve liegt rechts von der Geraden, welche man durch den Punkt B mit den Coordinaten $x = b$, $y = 0$ parallel zur Y-Axe ziehen kann. Diese Gerade wird von der Curve im Punkte B berührt; und zwar gehen von B aus zwei symmetrische Zweige der Curve, welche sich im Doppelpunkte D schneiden, so dass die Curve zwischen B und D eine Schleife bildet. (Vergl. Fig. 139.)

Ist dagegen $a < b$, so folgt aus der Gleichung

$$y = \pm(x - a)\sqrt{x - b},$$

dass der Punkt D mit den Coordinaten $x = a$, $y = 0$ wieder ein Punkt der Curve ist. Für alle Werthe von x, die kleiner als a sind, und für alle Werthe von x, die zwar grösser als a, aber kleiner als b sind, wird y imaginär, so dass auch hier die Curve eigentlich erst mit dem Punkte B beginnt, dessen Coordinaten $x = b$, $y = 0$ sind. Der Punkt D ist daher in diesem Falle ein

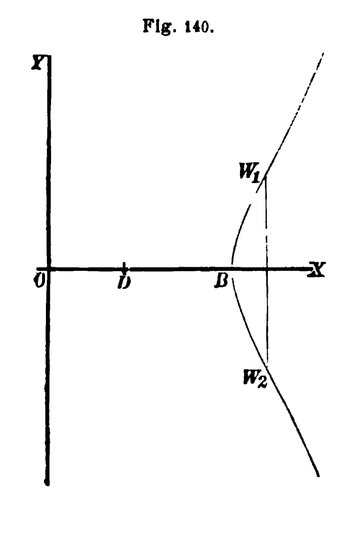


Fig. 140.

„isolirter Punkt“ oder *„Einsiedler“*. Ein solcher isolirter Punkt ist daher auch als ein Doppelpunkt anzusehen, in dem sich zwei imaginäre Curvenzweige schneiden. Deshalb werden in diesem Falle auch die beiden Tangenten imaginär. (Vergl. Fig. 140.)

Für

$$x = \frac{4b - a}{3}, \; y = \pm \frac{4(b-a)}{3}\sqrt{\frac{b-a}{3}}$$

hat die Curve zwei Wendepunkte W_1 und W_2, wie man durch die früher angegebenen Methoden leicht bestätigen kann.

§ 120.

Uebungs-Aufgaben.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 147.)

Aufgabe 1. Man soll beweisen, dass beim *Folium Cartesii* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vergl. Fig. 141.)

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0, \tag{1.}$$

also

Fig. 141.

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay, \\ F_2(x, y) = 3y^2 - 3ax, \end{cases} \tag{2.}$$

$$\begin{cases} F_{11} = 6x, \quad F_{12} = -3a, \\ \qquad F_{22} = 6y. \end{cases} \tag{3.}$$

Für $x = 0, \quad y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0,$$

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt, folglich ist

der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um in diesem Doppelpunkte die Richtung der Tangenten zu bestimmen, setzt man die Werthe von F_{11}, F_{12}, F_{22} in die Formel Nr. 147 der Tabelle ein. Dies giebt

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} \tag{4.}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 36xy}}{6y}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung das obere Zeichen und setzt $x = 0$, $y = 0$, so erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \infty. \tag{4a.}$$

Nimmt man dagegen das untere Zeichen, so erhält $\operatorname{tg}\alpha$ zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Um den Grenzwerth dieses unbestimmten Ausdrucks zu erhalten, multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches mit $a + \sqrt{a^2 - 4xy}$. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \lim \frac{a - \sqrt{a^2 - 4xy}}{2y} = \lim \frac{2x}{a + \sqrt{a^2 - 4xy}} = 0, \tag{4b.}$$

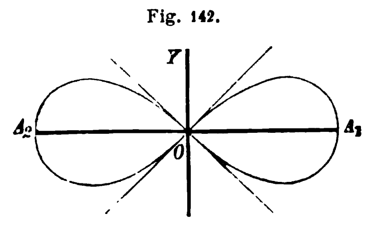
oder

$$\alpha_1 = 90^0, \quad \alpha_2 = 0^0, \tag{5.}$$

d. h. *die beiden Coordinaten-Axen sind Tangenten in dem Doppelpunkte der Curve.*

Aufgabe 2. Man soll beweisen, dass bei der *Lemniscate* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vergl. Fig. 142.)

Fig. 142.



Auflösung. Hier ist

$$F(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0, \tag{6.}$$

also

(7.) $F_1(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x, \quad F_2(x, y) = 4x^2y + 4y^3 + 2a^2y.$

(8.) $F_{11} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2, \quad F_{12} = 8xy, \quad F_{22} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2.$

Für $x = 0$, $y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte zu bestimmen, beachte man, dass für $x = 0$, $y = 0$

(9.) $$F_{11} = -2a^2, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = +2a^2$$

wird. Dies giebt nach Formel Nr. 147 der Tabelle

(10.) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \pm 1.$$

also

(11.) $$\alpha_1 = +45^0, \quad \alpha_2 = -45^0,$$

d. h. die beiden Tangenten im Nullpunkte halbiren die Winkel, welche die Coordinaten-Axen mit einander bilden.

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

erhält man der Reihe nach unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise die Gleichungen

(12.) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

(13.) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

(14.) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Bei *einfachen* Curvenpunkten findet man

aus Gleichung (12.) die Grösse $\frac{dy}{dx}$,

" " (13.) " " $\frac{d^2y}{dx^2}$,

" " (14.) " " $\frac{d^3y}{dx^3}$;

ist aber der Punkt ein Doppelpunkt, so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2(x, y) = 0;$$

dann reduciren sich die Gleichungen (13.) und (14.) auf

$$(13a.) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$(14a.) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder

$$(14b.) \quad F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$+ 3\left(F_{12} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Da die Gleichung (12.) zur Berechnung von $\frac{dy}{dx}$ illusorisch wird, liefert Gleichung (13a.) die *beiden* Werthe dieser Grösse; aus Gleichung (14a.) oder (14b.) findet man dann die zugehörigen Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Für die *Lemniscate* wird z. B.

$$(15.) \quad F_{111} = 24x, \quad F_{112} = 8y, \quad F_{122} = 8x, \quad F_{222} = 24y,$$

Ausdrücke, welche für $x = 0$, $y = 0$ sämmtlich verschwinden. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (9.) und (10.) geht daher in diesem Falle die Gleichung (14b.) über in

$$(16.) \quad 3\left(0 + 2a^2\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm 6a^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ sind also *beide* gleich Null. Daraus folgt, dass *die beiden Curvenzweige der Lemniscate, welche sich in ihrem Doppelpunkte schneiden, gleichzeitig Wendepunkte sind.* (Vergl. Fig. 142.)

§ 121.

Mehrfache Punkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 148.)

Wenn für ein Werthepaar x, y nicht nur die Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt werden, sondern ausserdem auch noch die Gleichungen

$$F_{11}(x, y) = 0, \quad F_{12}(x, y) = 0, \quad F_{22}(x, y) = 0,$$

so ist es nicht mehr möglich, die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ nach den Angaben der Formel Nr. 147 der Tabelle zu berechnen; dann reducirt sich aber die allgemein geltende Gleichung

$$(1.) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

auf

$$(2.) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0,$$

oder

$$(2\text{a.}) \quad F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom *dritten Grade* und liefert daher *drei* Werthe dieser Grösse. In dem zugehörigen Curvenpunkte giebt es daher *drei* Tangenten der Curve, woraus man schliessen kann, dass *drei* Aeste der Curve durch diesen Punkt hindurchgehen.

Ein solcher Curvenpunkt heisst daher ein „*dreifacher Punkt* der Curve“.

Sind auch die *dritten* partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ sämmtlich gleich Null, so kann man auch aus der Gleichung (2a.) noch nicht die Grösse $\frac{dy}{dx}$ berechnen; dann gilt aber, wie man durch nochmalige Differentiation der Gleichung (1.) erkennt, die Gleichung

$$(3.) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(4)} = 0,$$

welche *vier* Werthe von $\frac{dy}{dx}$ liefert. Der betrachtete Punkt ist dann ein „*vierfacher Punkt* der Curve“, denn es giebt in diesem Punkte *vier* Tangenten an die *vier* verschiedenen Zweige der Curve, welche durch diesen Punkt hindurchgehen.

In dieser Weise kann man fortfahren und kommt schliesslich zu dem folgenden Resultate:

Sind die n^{ten} partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ die ersten welche für die Coordinaten x, y des Punktes P nicht sämmtlich, verschwinden, so findet man aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(n)} = 0 \tag{4.}$$

n Werthe von $\frac{dy}{dx}$, denen n Tangenten in dem betrachteten Punkte an n verschiedene Zweige der Curve entsprechen. Der Punkt P heisst dann ein „n-facher Punkt der Curve“.

Beispiel.

Es sei

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - y(y^2 - 3x^2) = 0 \tag{5.}$$

die Gleichung der Curve, dann wird

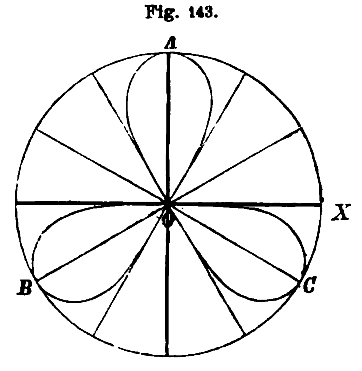
$$F(x, y) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - y^3 + 3x^2y,$$

$$\begin{cases} F_1 = 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 6xy, \\ F_2 = 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 3y^2 + 3x^2, \end{cases} \tag{6.}$$

$$\begin{cases} F_{11} = 30x^4 + 36x^2y^2 + 6y^4 + 6y, \\ F_{12} = 24x^3y + 24xy^3 + 6x, \\ F_{22} = 6x^4 + 36x^2y^2 + 30y^4 - 6y, \end{cases} \tag{7.}$$

$$\begin{cases} F_{111} = 120x^3 + 72xy^2, \quad F_{112} = 72x^2y + 24y^3 + 6, \\ F_{122} = 24x^3 + 72xy^2, \quad F_{222} = 72x^2y + 120y^3 - 6. \end{cases} \tag{8.}$$

Fig. 143.



Für $x = 0$, $y = 0$ werden die 6 Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$
$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein dreifacher Punkt, in welchem man die Richtung der drei Tangenten aus Gleichung (2a.) findet, indem man

(8a.) $$F_{111} = 0, \quad F_{112} = 6, \quad F_{122} = 0, \quad F_{222} = -6$$

einsetzt. Dies giebt

$$18\frac{dy}{dx} - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

oder, wenn man die drei Wurzeln dieser Gleichung mit $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$ bezeichnet,

(9.) $$\operatorname{tg}\alpha_1 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = +\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = -\sqrt{3},$$

(10.) $$\alpha_1 = 0^0, \quad \alpha_2 = 60^0, \quad \alpha_3 = 120^0.$$

(Vergl. Fig. 143.)

§ 122.
Spitzen oder Rückkehrpunkte.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 149.)

In Formel Nr. 147 der Tabelle, nämlich in der Gleichung

(1.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}},$$

welche die Richtung der beiden Tangenten in einem Doppelpunkte lieferte, kann es vorkommen, dass

(2.) $$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

wird. Dann sind die beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ einander *gleich*, d. h. *die beiden Tangenten fallen in eine zusammen.* Durch den betrachteten Punkt gehen daher zwei Zweige der Curve, die sich gegenseitig berühren. Hierbei werden im Allgemeinen die beiden Curvenzweige nur auf der einen Seite des betrachteten Punktes *reell* sein, während sie auf der anderen Seite *imaginär* werden. Ist z. B.

(3.) $$y = \varphi(x) \pm (x - a)\sqrt{\psi(x)},$$

wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ rationale Functionen sein mögen, die für $x = a$ nicht unendlich gross werden, so ist

(4.) $$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{2\psi(x) + (x - a)\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}}.$$

Aus Gleichung (3.) findet man andererseits durch Fortschaffung des Wurzelzeichens

$$(5.)\qquad F(x, y) = [y - \varphi(x)]^2 - (x - a)^2\psi(x) = 0,$$

$$(6.)\qquad \begin{cases} F_1(x, y) = -2[y - \varphi(x)]\varphi'(x) - 2(x - a)\psi(x) - (x - a)^2\psi'(x), \\ F_2(x, y) = +2[y - \varphi(x)], \end{cases}$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_{11} = +2\varphi'(x)^2 - 2[y - \varphi(x)]\varphi''(x) - 2\psi(x) \\ \qquad\qquad - 4(x - a)\psi'(x) - (x - a)^2\psi''(x), \\ F_{12} = -2\varphi'(x), \quad F_{22} = +2. \end{cases}$$

Deshalb erhält man für $x = a$, $y = \varphi(a)$

$$(8.)\qquad F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0;$$

$$(9.)\qquad F_{11} = 2\varphi'(a)^2 - 2\psi(a), \quad F_{12} = -2\varphi'(a), \quad F_{22} = +2.$$

Aus den Gleichungen (8.) folgt, dass der Punkt mit den Coordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$ ein Doppelpunkt ist, und aus den Gleichungen (9.) ergiebt sich, dass für diesen Doppelpunkt

$$(10.)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \varphi'(a) \pm \sqrt{\psi(a)}.$$

Dasselbe Resultat findet man noch leichter aus Gleichung (4).

Wenn sich nun der Factor $x - a$ von der Function $\psi(x)$ absondern lässt, so dass für $x = a$

$$(11.)\qquad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 4\psi(a) = 0$$

wird, so fallen die beiden Tangenten im Doppelpunkte der Curve in *eine* zusammen, und die Curve selbst hat in dem Doppelpunkte eine Spitze, wenn $\psi(x)$ mit $x - a$ zugleich das Vorzeichen wechselt. Wird z. B.

$$\psi(x) > 0 \text{ für } x < a \quad\text{und}\quad \psi(x) < 0 \text{ für } x > a,$$

wobei (vom Vorzeichen abgesehen) nur hinreichend kleine Werthe von $x - a$ in Betracht kommen sollen, so sind die beiden Werthe von y und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \leqq a$ ist; sie werden imaginär, wenn $x > a$ ist. Wird dagegen

$$\psi(x) < 0 \text{ für } x < a \quad\text{und}\quad \psi(x) > 0 \text{ für } x > a,$$

so sind die beiden Werthe von y und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \geqq a$ ist; sie werden imaginär für $x < a$.

Die beiden Curvenzweige haben daher in dem Doppelpunkte dieselbe Tangente und endigen in diesem Punkte, so dass der eine Curvenzweig als die Fortsetzung des andern betrachtet werden muss. Ein solcher Punkt heisst demgemäss eine „*Spitze* oder ein *Rückkehrpunkt* der Curve“, und die zugehörige Tangente heisst „*Rückkehrtangente*“.

Eine Spitze ist gewissermassen der Uebergang von einem eigentlichen Doppelpunkte zu einem isolirten Punkte, ebenso wie eine quadratische Gleichung mit zwei *gleichen* Wurzeln den Uebergang bildet von einer quadratischen Gleichung mit zwei *reellen* Wurzeln zu einer mit zwei *imaginären* Wurzeln.

So liefert das in § 119 gewählte Beispiel

$$F(x, y) = y^2 - (x-a)^2(x-b) = 0$$

einen *eigentlichen Doppelpunkt*, wenn $a > b$, einen *isolirten Punkt*, wenn $a < b$, und eine *Spitze*, wenn $a = b$ ist. In der That, dann wird

$$F(x, y) = y^2 - (x-a)^3, \tag{12.}$$

$$F_1(x, y) = -3(x-a)^2, \quad F_2(x, y) = 2y, \tag{13.}$$

$$F_{11} = -6(x-a), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2, \tag{14.}$$

folglich ist für $x = a$, $y = 0$

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0 \tag{15.}$$

und

$$F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0. \tag{16.}$$

Hier kann die Gleichung der Curve auch in der Form

$$y = \pm (x-a)\sqrt{x-a} \tag{17.}$$

geschrieben werden; dies giebt dann

Fig. 144.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x-a}, \tag{18.}$$

und man erkennt, dass y nur reell ist, wenn $x \geqq a$, und dass für $x = a$ die beiden Tangenten der Curve mit der X-Axe zusammenfallen. Der Punkt S mit den Coordinaten $x = a$, $y = 0$ ist daher eine Spitze der Curve. (Vergl. Fig. 144.)

Andere Beispiele für das Auftreten von Spitzen liefern die *Epicykloiden* und *Hypocykloiden*, insbesondere die *Cardioide* und die *Astroide*; ferner die *Evoluten* oder *Krümmungsmittelpunkts-Curven.*

Gewöhnlich wird von den beiden Zweigen einer Curve, welche in einer Spitze zusammentreffen, der eine nach oben *concav* und der andere nach oben *convex* sein, so dass die gemeinsame Tangente *zwischen* beiden liegt, wie z. B. bei der Evolute der Parabel (Fig. 109 auf S. 423), der Ellipse (Fig. 110, 111 und 112 auf S. 424 und 425) und der Hyperbel (Fig. 113 auf Seite 426). Diese Spitzen nennt man „*Spitzen erster Art*“. Es können aber auch die beiden Zweige, welche in einer Spitze zusammentreffen, auf *derselben* Seite der gemeinsamen Tangente liegen. Es sei z. B.

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}, \tag{19.}$$

oder

$$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0. \tag{19a.}$$

Hier wird

$$F_1(x, y) = -4xy + 4x^3 - 5x^4, \quad F_2(x, y) = 2y - 2x^2, \tag{20.}$$

$$F_{11} = -4y + 12x^2 - 20x^3, \quad F_{12} = -4x, \quad F_{22} = 2. \tag{21.}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, folglich ist der Nullpunkt ein *Doppelpunkt.* Dabei wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = 0, \tag{22.}$$

d. h. die Tangenten an die beiden Curvenzweige in diesem Doppelpunkte fallen mit der X-Axe zusammen. Deshalb hat die Curve in diesem Doppelpunkte eine *Spitze.* Dass der Nullpunkt wirklich eine Spitze ist, erkennt man aus Gleichung (19.), weil y imaginär ist, sobald x negativ wird.

Ferner folgt aus Gleichung (19.)

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}. \tag{23.}$$

Das doppelte Vorzeichen in den Gleichungen (19.) und (23.) entspricht dem Umstande, dass jedem Werthe von x *zwei* Werthe von y, also auch *zwei* Punkte der Curve zugeordnet sind.

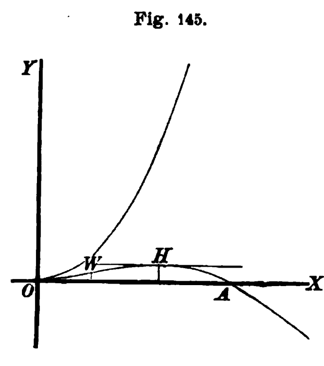


Fig. 145.

Im Nullpunkte fallen diese beiden Punkte zusammen und gleichzeitig auch die beiden Tangenten. So lange $x < 1$ ist, liegen auch *beide* Zweige der Curve über dieser gemeinsamen Tangente, nämlich über der X-Axe, weil *beide* Werthe von y positiv sind. Für kleine Werthe von x, d. h. für $x < \frac{64}{225}$ werden sogar *beide* Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ *positiv*, d. h. beide Zweige der Curve sind in der Nähe der Spitze nach oben *concav*; erst für

$$x = \frac{64}{225} \text{ wird } \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{15}{4}\sqrt{x} = 0,$$

d. h. der untere Curvenzweig hat in dem zugehörigen Punkte einen *Wendepunkt W*, in dem er sich von der Concavität zur Convexität wendet.

Eine solche Spitze nennt man eine „Spitze *zweiter Art*" oder „*Schnabel-Spitze*". (Vergl. Fig. 145.)

XV. Abschnitt.

Herleitung und Anwendungen der Taylor'schen Reihe für Functionen von mehreren Veränderlichen.

§ 123.

Die Taylor'sche Reihe für Functionen von mehreren Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 150.)

Es sei

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

eine Function von zwei Veränderlichen, dann kann man $f(x + h, y + k)$ in ähnlicher Weise nach Potenzen von h und k entwickeln, wie früher (§ 30 und 31) $f(x + h)$ nach Potenzen von h entwickelt wurde.

Man findet diese Entwickelung sehr leicht, indem man zunächst

$$ht \text{ statt } h, \quad kt \text{ statt } k$$

schreibt und $f(x + ht, y + kt)$ nach steigenden Potenzen von t entwickelt. Dies geschieht nach der *Mac-Laurin*'schen *Reihe* in folgender Weise. Man setze

$$x + ht = u, \quad y + kt = v, \quad f(u, v) = F(t), \tag{2.}$$

dann wird nach Formel Nr. 51 der Tabelle, wenn man f mit F und x mit t vertauscht,

$$(3.)\quad F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + R.$$

Bei der Bildung von $F'(t)$, $F''(t), \ldots$ muss man beachten, dass für diese Rechnung t die *einzige Veränderliche* ist, während x, y, h, k *constant* bleiben, dass also

$$(4.)\quad \frac{du}{dt} = h, \quad \frac{dv}{dt} = k$$

wird. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 138 der Tabelle

$$(5.)\quad \begin{cases} F(t) = f(u, v), \\ F'(t) = \dfrac{df(u, v)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k, \\ F''(t) = \dfrac{d^2 f(u, v)}{dt^2} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F^{(n)}(t) = \dfrac{d^n f(u, v)}{dt^n} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(n)}. \end{cases}$$

Die Formel Nr. 138 der Tabelle ist hier anwendbar, weil u und v *lineare* Functionen von t sind. Für $t = 0$ wird

$$(6.)\quad u = x, \quad v = y, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich auch daraus, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

ist, weshalb auch für beliebige Werthe von t

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$$

wird. Aehnliches gilt für die höheren Ableitungen. Daraus folgt

$$
(7.)\quad \left\{
\begin{aligned}
F(0) &= f(x,y),\\
F'(0) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k,\\
F''(0) &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right)^{(2)},\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
F^{(n)}(0) &= \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right)^{(n)},\\
F^{(n+1)}(\Theta t) &= \\
&\left(\frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial y}k\right)^{(n+1)}.
\end{aligned}\right.
$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

$$
(8.)\qquad F(t) = f(x+ht, y+kt) =
$$

$$
f(x,y) + \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)} + \cdots
$$

$$
+ \frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,
$$

wobei

$$
(9.)\qquad R = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\Theta t) =
$$

$$
\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial y}k\right)^{(n+1)},
$$

oder, wenn man die zweite Form des Restes anwendet,

$$
(10.)\quad R = \frac{t^n}{n!}\left[F^{(n)}(\Theta_1 t) - F^{(n)}(0)\right]
$$

$$
= \frac{t^n}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 ht, y+\Theta_1 kt)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 ht, y+\Theta_1 kt)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.
$$

$$
\left. - \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].
$$

Setzt man schliesslich t gleich 1, so geht Gleichung (8.) über in

$$(8a.)\quad f(x+h,y+k)=f(x,y)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)}+R,$$

wobei

$$(9a.)\quad R=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h,y+\Theta k)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x+\Theta h,y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)},$$

oder

$$(10a.)\quad R=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h,y+\Theta_1 k)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x+\Theta_1 h,y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

In den vorstehenden Gleichungen ist wieder von der *symbolischen* Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht, nach welcher z. B.

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$
$$=f_{11}(x,y)h^2+2f_{12}(x,y)hk+f_{22}(x,y)k^2$$

wird. Die Grösse Θ liegt dabei immer zwischen 0 und +1.

Diese Art der Entwickelung lässt sich ohne Weiteres auf Functionen von drei oder von mehr Veränderlichen übertragen. So ist z. B.

$$(12.)\quad f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(2)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)}+R.$$

Aus der *Taylor*'schen Reihe für Functionen von mehreren Veränderlichen lässt sich dann auch die *Mac-Laurin*'sche Reihe herleiten. So braucht man z. B. bei Functionen von *drei* Veränderlichen nur

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0$$

zu setzen und dann

$$x \text{ statt } h, \quad y \text{ statt } k, \quad z \text{ statt } l$$

zu schreiben, um die Function nach steigenden Potenzen von x, y und z zu entwickeln.

§ 124.

Homogene Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 151.)

Eine Function

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{1.}$$

von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heisst eine „homogene Function m^{ten} Grades", wenn sie sich durch Multiplication der sämmtlichen Veränderlichen mit ein und demselben Factor t in sich selbst verwandelt, multiplicirt mit der m^{ten} Potenz dieses Factors.

Eine *homogene* Function m^{ten} Grades wird daher erklärt durch die Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{2.}$$

So ist z. B.

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y + 4yz^2 - 7xyz$$

eine homogene Function *dritten* Grades von x, y, z;

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy + \frac{z^3}{x} - \frac{2x^4 + z^4}{y^2}$$

und

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4} - \frac{3xyz}{\sqrt{x^2 - z^2}}$$

sind homogene Functionen *zweiten* Grades von x, y, z;

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y + z}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{z + x}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

ist eine homogene Function *nullten* Grades von x, y, z.

Satz 1. *Dividirt man eine homogene Function m^{ten} Grades durch die m^{te} Potenz einer ihrer Veränderlichen, z. B. durch x_n^m, so wird der Quotient nur von den $n-1$ Verhältnissen der übrigen Veränderlichen zu dieser einen abhängen,* d. h. der Quotient ist nur noch eine Function von $n-1$ Veränderlichen

$$\frac{x_1}{x_n}, \ \frac{x_2}{x_n}, \ \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n);$$

setzt man in dieser Gleichung $t = \frac{1}{x_n}$, so erhält man

$$(3.)\qquad \frac{(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}{x_n^m} = f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right).$$

Satz 2. *Aus einer nicht homogenen Function mit* $n-1$ *Veränderlichen* $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ *kann man eine homogene Function* m^{ten} *Grades mit n Veränderlichen machen, indem man*

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \ u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \ \ldots u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

setzt und die Function mit x_n^m *multiplicirt.* Dabei ist der Exponent m noch ganz beliebig.

Beweis. Vertauscht man in

$$(4.)\qquad x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

x_1 mit tx_1, x_2 mit tx_2, ... x_n mit tx_n, so geht Gleichung (4.) über in

$$t^m x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n),$$

folglich wird

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ist $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ eine ganze rationale Function, so verfügt man über die beliebige Zahl m gewöhnlich so, dass auch die homogene Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine ganze rationale Function wird.

Man kann diesen Satz benutzen, um Gleichungen zwischen x, y oder zwischen x, y, z homogen zu machen, wodurch ihre Behandlung für viele Zwecke bequemer wird. Ist z. B. die Gleichung

$$(5.)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gegeben, so setze man

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

und multiplicire mit x_3^2. Dadurch erhält man eine *homogene* Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3, nämlich

$$(6.) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Indem man

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x, \; x_2 = y$$

setzt, kann man dann jederzeit von den homogenen Gleichungen zu den nicht homogenen zurückkehren.

Satz 3. *Die ersten partiellen Ableitungen einer homogenen Function* m^{ten} *Grades sind sämmtlich homogene Functionen* $(m-1)^{ten}$ *Grades.*

Beweis. Bezeichnet man, wie gewöhnlich,

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \text{mit} \quad f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

so folgt aus der Voraussetzung, nämlich aus der Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

durch partielle Differentiation nach x_α

$$f_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) \, . \, t = t^m f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$(7.) \quad f_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{m-1} f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

d. h. $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist eine homogene Function $(m-1)^{ten}$ Grades, wobei α die Werthe 1, 2, ... n haben darf.

In derselben Weise kann man zeigen, dass jede zweite partielle Ableitung von einer homogenen Function m^{ten} Grades eine homogene Function $(m-2)^{ten}$ Grades, allgemein, dass jede partielle Ableitung r^{ten} Grades eine homogene Function $(m-r)^{ten}$ Grades ist.

Setzt man

$$(8.) \quad tx_1 = u_1 \quad tx_2 = u_2, \; \ldots tx_n = u_n,$$

so geht Gleichung (2.) über in

$$(9.) \quad f(u_1, u_2, \ldots u_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man t als die einzige Veränderliche ansieht, so erhält man nach Formel Nr. 138 der Tabelle

$$f_1(u_1, u_2, \ldots u_n) \cdot x_1 + f_2(u_1, u_2, \ldots u_n) \cdot x_2 + \cdots$$
$$+ f_n(u_1, u_2, \ldots u_n) \cdot x_n = mt^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder für $t = 1$

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot x_1 + f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot x_2 + \cdots$$
$$+ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot x_n = mf(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Dies kann man noch einfacher schreiben, indem man

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = z$$

setzt; dann erhält man nämlich

$$(10.) \qquad x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz.$$

Beispiel.

Es sei

$$(11.) \quad z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2,$$

und

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

dann findet man

$$(12.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_3} = 2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3); \end{cases}$$

$$(13.) \quad x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)$$
$$+ 2x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)$$
$$+ 2x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$
$$= 2z.$$

Wenn man beachtet, dass $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ wieder homogene Functionen $(m-1)^{ter}$ Ordnung sind, so folgt aus Gleichung (10.), indem man z mit $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ und m mit $m-1$ vertauscht,

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + x_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \cdots + x_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und addirt sie, so erhält man unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise und mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$(14.)\quad \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet

$$(15.)\quad \left(x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(r)} = m(m-1)\ldots(m-r+1)z.$$

Durch diese Formeln kann man die Gleichung der Tangente einer ebenen Curve und die Gleichung der Tangentialebene einer Fläche vereinfachen.

Es sei z. B.

$$(16.)\qquad y = f(x), \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Curve n^{ten} Grades, so erhält man nach Formel Nr. 95 der Tabelle für die Tangente die Gleichung

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

oder

$$(17.)\qquad F_1(x, y)(x' - x) + F_2(x, y)(y' - y) = 0.$$

Macht man jetzt aber die Gleichung (16.) homogen, indem man

(18.) $$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

setzt und mit x_3^n multiplicirt, so wird

(19.) $$x_3^n F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Daraus erhält man durch partielle Differentiation nach x_1 und x_2

$$x_3^{n-1} F_1\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G_1(x_1, x_2, x_3),$$

$$x_3^{n-1} F_2\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = G_2(x_1, x_2, x_3).$$

Deshalb geht Gleichung (17.), wenn man sie mit x_3^n multiplicirt und

$$x' = \frac{x_1'}{x_3}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_3}$$

setzt, über in

(20.) $$G_1(x'_1 - x_1) + G_2(x'_2 - x_2) = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

(21.) $$G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 = nG(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (20.) und (21.) für die Tangente die Gleichung

(22.) $$G_1 x'_1 + G_2 x'_2 + G_3 x_3 = 0.$$

Indem man zum Schlusse

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x'_1 = x',\ x'_2 = y'$$

setzt, gehen

$$G(x_1, x_2, x_3), \quad G_1, \quad G_2$$

bezw. in

$$F(x, y), \qquad F_1, \quad F_2$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangente ist einfacher als die bisher benutzte, denn die Gleichung (17.) ist in Bezug auf x und y vom n^{ten} Grade, während die Gleichung (22.) nur vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist.

Beispiel.

Macht man die Gleichung der Ellipse homogen, so erhält man

$$G(x_1, x_2, x_3) = b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0, \tag{23.}$$

folglich wird

$$G_1 = 2b^2x_1, \quad G_2 = 2a^2x_2, \quad G_3 = -2a^2b^2x_3, \tag{24.}$$

so dass man für die Tangente die Gleichung

$$b^2x_1x'_1 + a^2x_2x'_2 - a^2b^2x_3^2 = 0 \tag{25.}$$

findet, die für $x_3 = 1$ in

$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0 \tag{25a.}$$

übergeht.

Man erkennt, dass das hier allgemein erläuterte Verfahren bei den in § 81 behandelten Aufgaben bereits Anwendung gefunden hat.

Ist

$$F(x, y, z) = 0 \tag{26.}$$

die Gleichung einer Fläche n^{ten} Grades, so hat nach Formel Nr. 145 die Tangentialebene im Flächenpunkte P die Gleichung

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0. \tag{27.}$$

Macht man Gleichung (26.) homogen, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

setzt und mit x_4^n multiplicirt, so erhält man

$$x_4^n F\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0. \tag{26a.}$$

Daraus ergiebt sich durch partielle Differentiation nach x_1, x_2 und x_3

$$x_4^{n-1} F_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_4^{n-1} F_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_4^{n-1} F_3\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_3(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Deshalb geht Gleichung (27.), wenn man noch

$$x' = \frac{x_1'}{x_4}, \quad y' = \frac{x_2'}{x_4}, \quad z' = \frac{x_3'}{x_4}$$

setzt, über in

$$(27\text{a.}) \quad G_1(x'_1 - x_1) + G_2(x'_2 - x_2) + G_3(x'_3 - x_3) = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

$$(28.) \quad G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + G_4 x_4 = nG(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (27a.) und (28.) für die Tangentialebene die Gleichung

$$(29.) \qquad G_1 x'_1 + G_2 x'_2 + G_3 x'_3 + G_4 x_4 = 0.$$

Indem man zum Schlusse

$$x_4 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$
$$x'_1 = x', \; x'_2 = y', \; x'_3 = z'$$

setzt, gehen

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad G_1, \; G_2, \; G_3$$

bezw. in

$$F(x, y, z), \qquad F_1, \; F_2, \; F_3$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangentialebene ist einfacher als die bisher benutzte, denn Gleichung (27.) ist in Bezug auf x, y, z vom n^{ten} Grade, während Gleichung (29.) nur noch vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist.

Beispiel.

Macht man die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

homogen, so erhält man

$$(30.) \qquad G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2 = 0,$$

folglich wird

$$(31.) \qquad G_1 = \frac{2x_1}{a^2}, \; G_2 = \frac{2x_2}{b^2}, \; G_3 = \frac{2x_3}{c^2}, \; G_4 = -2x_4,$$

so dass man für die Tangentialebene die Gleichung

$$\frac{x_1 x'_1}{a^2} + \frac{x_2 x'_2}{b^2} + \frac{x_3 x'_3}{c^2} - x_4^2 = 0 \tag{32.}$$

findet, die für $x_4 = 1$ in

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0 \tag{32 a.}$$

übergeht.

Man erkennt, dass auch diese Vereinfachung bereits in § 116 zur Anwendung gekommen ist.

§ 125.

Maxima und Minima der Functionen von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 152.)

Es sei

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

eine stetige Function der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen x und y; man nennt dann z ein *Maximum*, wenn

$$f(x, y) > f(x + h, y + k)$$

wird für hinreichend kleine, im Uebrigen aber beliebige, ***positive oder negative*** Werthe von h und k. Dagegen nennt man z ein *Minimum*, wenn für die angegebenen Werthe von h und k

$$f(x, y) < f(x + h, y + k)$$

wird. Um die Werthe von x und y zu bestimmen, für welche z ein Maximum oder Minimum wird, muss man also untersuchen, für welche Werthe von x und y die Differenz

$$\Delta = f(x + h, y + k) - f(x, y) \tag{2.}$$

beständig negativ, bezw. ***beständig positiv*** ist.

Zu diesem Zwecke entwickelt man Δ mit Hülfe des *Taylor*'schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von h und k, wobei vorausgesetzt wird, dass $f(x, y)$ und die vorkommenden Ableitungen davon für die betrachteten Werthe von x und y *stetig* und *endlich* sind. Dann erhält man nach Formel Nr. 150 der Tabelle

(3.) $$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + R;$$

dabei ist, wenn man die zweite Form des Restes anwendet und bei Θ den Index 1 fortlässt,

(4.) $$R = [f_1(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_1(x, y)]h + [f_2(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_2(x, y)]k.$$

Da die Stetigkeit der Functionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ vorausgesetzt wird, so kann man die absoluten Beträge der Differenzen

$$f_1(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_1(x, y)$$

und

$$f_2(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_2(x, y)$$

für hinreichend kleine Werthe von h und k so klein machen, als man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Grösse α. Wäre jetzt $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y)$ von Null verschieden, so könnte man $k = 0$ und h so klein machen, dass

$$\alpha < |f_1(x, y)|$$

wird. Da nun aber

(5.) $$R = [f_1(x+\Theta h, y) - f_1(x, y)]h$$

seinem absoluten Betrage nach noch kleiner ist als αh, so hat

(6.) $$\Delta = f_1(x, y)h + R$$

dasselbe Vorzeichen wie $f_1(x, y)h$. Deshalb wechselt Δ mit h zugleich das Zeichen, ist also weder *beständig negativ*, noch *beständig positiv*. Daraus folgt, dass $f(x, y)$ nur dann ein Maximum oder Minimum werden kann, wenn

(7.) $$f_1(x, y) = 0$$

ist. Die Nothwendigkeit dieser Bedingung erkennt man schon daraus, dass $f(x, y)$ ein Maximum bezw. ein Minimum bleiben muss, wenn man y als *unveränderlich*, also x als die *einzige Veränderliche* betrachtet. Wie nun $f(x)$ nur für Werthe von x ein Maximum oder Minimum werden konnte, für welche $f'(x) = 0$ wurde (vergl. Formel Nr. 79 der Tabelle), so kann hier $f(x, y)$ nur für Werthe von x und y ein Maximum oder Minimum werden, für welche die Gleichung (7.) befriedigt ist.

Ebenso kann man jetzt aber auch zeigen, dass

$$f_2(x, y) = 0 \tag{8.}$$

sein muss. Aus den Gleichungen (7.) und (8.) findet man dann die Werthe von x und y, für welche *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ eintritt.

Ob für die so gefundenen Werthepaare von x und y *wirklich* ein Maximum oder Minimum eintritt, darüber entscheidet in vielen Fällen schon der Charakter der Aufgabe, wie das folgende Beispiel zeigen möge.

Aufgabe. In der Ebene seien beliebig viele Punkte P_1, P_2, ... P_n mit den Coordinaten $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n$ gegeben; ihre Massen seien bezw. $M_1, M_2, \dots M_n$; man soll die Coordinaten eines Punktes P finden, so dass die Summe

$$M_1 . \overline{PP_1}^2 + M_2 . \overline{PP_2}^2 + \cdots + M_n . \overline{PP_n}^2$$

ein Minimum wird.

Auflösung. Hier ist die Function, welche ein Minimum werden soll,

$$\begin{aligned} f(x, y) = M_1[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] + M_2[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2] \\ + \cdots + M_n[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2], \end{aligned} \tag{9.}$$

also

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 2M_1(x-x_1) + 2M_2(x-x_2) + \cdots + 2M_n(x-x_n), \\ f_2(x,y) = 2M_1(y-y_1) + 2M_2(y-y_2) + \cdots + 2M_n(y-y_n). \end{cases} \tag{10.}$$

Indem man

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x, y) = 0$$

setzt, findet man

$$\begin{cases} x = \dfrac{M_1x_1 + M_2x_2 + \cdots + M_nx_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n} \\ y = \dfrac{M_1y_1 + M_2y_2 + \cdots + M_ny_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}. \end{cases} \tag{11.}$$

Da bei dieser Aufgabe sicher ein Punkt vorhanden ist, welcher die Eigenschaft des Minimums besitzt, und da man nur ein einziges Werthepaar von x und y findet, für welches die beiden nothwendigen Bedingungen erfüllt sind, so muss dieses Werthepaar das Minimum liefern.

So einfach ist aber die Entscheidung im Allgemeinen nicht. Dagegen ergeben sich für alle Fälle die folgenden Regeln.

Sind die Bedingungsgleichungen (7.) und (8.) befriedigt, so findet man durch die Entwickelung nach der *Taylor*'schen Reihe

$$\Delta = \frac{1}{2!}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + R, \tag{12.}$$

wobei nach Formel Nr. 150 der Tabelle, wenn man $n = 2$ setzt und wieder die zweite Form des Restes anwendet,

$$R = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(2)} - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(2)}\right],$$

also

$$\begin{aligned} 2R = &\ [f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y)]h^2 \\ &+ 2[f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y)]hk \\ &+ [f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y)]k^2 \end{aligned} \tag{13.}$$

ist. Da die Stetigkeit der Functionen $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{22}(x, y)$ vorausgesetzt wird, so kann man die absoluten Beträge der Differenzen

$$\begin{aligned} &f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y), \\ &f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y), \\ &f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y) \end{aligned}$$

für hinreichend kleine Werthe von h und k so klein machen, wie man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Grösse β. Dann wird

$$2|R| < \beta(h^2 + 2|hk| + k^2) = \beta(|h| + |k|)^2. \tag{14.}$$

Setzt man jetzt

$$f_{11}(x, y)h^2 + 2f_{12}(x, y)hk + f_{22}(x, y)k^2 = \varphi(h, k), \tag{15.}$$

so heisst diese homogene Function zweiten Grades „eine *definite Form*“, wenn sie für alle Werthe von h und k, von denen wenigstens der eine von Null verschieden sein muss, entweder ***beständig positiv*** oder ***beständig negativ*** ist. Es soll nun durch die folgenden Untersuchungen gezeigt werden, dass Δ für hinreichend kleine Werthe von h und k mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen hat, wenn diese Function eine definite Form ist, dass

also $f(x, y)$ für die gefundenen Werthe von x und y ein *Minimum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig positiv* ist, und dass $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig negativ* ist.

Um darüber zu entscheiden, ob $\varphi(h, k)$ eine *definite Form* ist, bilde man unter der Voraussetzung, dass $f_{11} \gtrless 0$ ist,

$$\varphi(h, k) . f_{11} = f_{11}^2 h^2 + 2 f_{11} f_{12} hk + f_{12}^2 k^2 + (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) k^2;$$

dies giebt

$$(16.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}} [(f_{11} h + f_{12} k)^2 + (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) k^2].$$

Damit dieser Ausdruck für $k = 0$ positiv ist, muss zunächst

$$(17.)\qquad f_{11} > 0$$

sein; damit ferner $\varphi(h, k)$ auch positiv ist, wenn man

$$f_{11} h + f_{12} k = 0, \quad \text{oder} \quad h = -\frac{f_{12} k}{f_{11}}$$

setzt, muss ausserdem

$$(18.)\qquad f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

sein. Diese beiden Bedingungen (17.) und (18.) sind *nothwendig*, sie sind aber auch *hinreichend*; denn, wie man auch h und k bestimmen mag, $\varphi(h, k)$ ist dann *immer positiv*, so lange h und k nicht beide gleich 0 sind.

In derselben Weise kann man unter der Voraussetzung, dass $f_{22} \gtrless 0$ ist, die Function $\varphi(h, k)$ auf die Form

$$(19.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}} [(f_{11} f_{22} - f_{12}^2) h^2 + (f_{12} h + f_{22} k)^2]$$

bringen. Dabei folgt aus den Bedingungen

$$f_{11} > 0 \text{ und } f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0, \quad \text{oder} \quad f_{11} f_{22} > f_{12}^2 > 0$$

schon ganz von selbst, dass auch $f_{22} > 0$ sein muss.

Gelten die Ungleichungen (17.) und (18.), so kann man für hinreichend kleine Werthe von h und k die oben eingeführte Grösse β kleiner machen als die Werthe von

$$\frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{4 f_{11}} \quad \text{und} \quad \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{4 f_{22}},$$

woraus sich ergiebt, dass auch

$$\beta < f_{11} \quad \text{und} \quad \beta < f_{22}$$

ist. Dadurch wird für $h \gtrless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

(20.) $$\varphi(h, k) = f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2\,|R|,$$
und für $h = 0$, $k \gtrless 0$

(21.) $$\varphi(h, k) = f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2\,|R|.$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|h| \geqq |k| > 0$

(22.) $$\varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}}\,h^2 > 4\beta h^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2\,|R|;$$

und nach Gleichung (16.) für $|k| \geqq |h| > 0$

(23.) $$\varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}\,k^2 > 4\beta k^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2\,|R|.$$

Deshalb wird nach Gleichung (12.)
$$\varDelta = \frac{1}{2}\,\varphi(h, k) + R,$$
gleichviel, ob R positiv oder negativ ist, mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen haben, d. h. $\varDelta$ ist ***beständig positiv.***

Somit sind die Bedingungen

(24.) $$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$
dafür, dass $f(x, y)$ ein *Minimum* wird, auch ***hinreichend.***

Ebenso findet man aus Gleichung (16.), dass die Function $\varphi(h, k)$ *beständig negativ* ist, wenn

(25.) $$f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$
ist. Aus $f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0$ folgt dann, dass auch $f_{22} < 0$ sein muss.

Macht man jetzt die absoluten Beträge von h und k so klein, dass β kleiner wird als die Grössen
$$-f_{11}, \quad -f_{22}, \quad -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{11}}, \quad -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{22}},$$
so wird für $h \gtrless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

(26.) $$-\varphi(h, k) = -f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2\,|R|,$$
und für $h = 0$, $k \gtrless 0$

(27.) $$-\varphi(h, k) = -f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2\,|R|.$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|h| \geqq |k| > 0$

(28.) $$-\varphi(h, k) > -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}} h^2 > 4\beta h^2 \geqq \beta(|h|+|k|)^2 > 2|R|,$$

und nach Gleichung (16.) für $|k| \geqq |h| > 0$

(29.) $$-\varphi(h, k) > -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} k^2 > 4\beta k^2 \geqq \beta(|h| + |k|)^2 > 2|R|.$$

Deshalb hat auch in diesem Falle, gleichviel, ob R positiv oder negativ ist, Δ mit $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werthe von h und k gleiches Vorzeichen, d. h. Δ ist *beständig negativ*.

Somit sind die Bedingungen

(30.) $$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

dafür, dass $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, auch *hinreichend*.

Ist dagegen

(31.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0,$$

so ist $\varphi(h, k)$ *keine definite Form*, denn für $k = 0$ hat $\varphi(h, k) = f_{11}h^2$ *gleiches* Vorzeichen mit f_{11}, und für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$, oder $f_{11}h + f_{12}k = 0$ wird nach Gleichung (16.)

(32.) $$\varphi(h, k) = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} k^2$$

und hat deshalb das *entgegengesetzte* Zeichen wie f_{11}. Dabei wird für diese besonderen Werthe von h und k die Function $\varphi(h, k)$ über das Vorzeichen von Δ entscheiden, denn für $k = 0$ wird

(33.) $$2\Delta = f_{11}h^2 + [f_{11}(x + \Theta h, y) - f_{11}(x, y)]h^2,$$

wobei man den Ausdruck in der eckigen Klammer für hinreichend kleine Werthe von h beliebig klein machen kann; und für $f_{11}h = -f_{12}k$ wird

(34.) $$2\Delta = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} k^2 + 2R,$$

wobei nach Ungleichung (14.) in diesem Falle

$$2|R| < \beta(|h| + |k|)^2 = \frac{\beta k^2}{f_{11}^2}(|f_{11}| + |f_{12}|)^2$$

ist. Für hinreichend kleine Werthe von k kann man aber den Ausdruck

$$\frac{\beta}{f_{11}^2}(|f_{11}| + |f_{12}|)^2 < \left|\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}\right|$$

machen. Deshalb wird, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0$$

ist, $f(x, y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum*, da Δ weder beständig negativ noch beständig positiv ist.

Ist endlich

$$(35.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2,$$

so wird nach Gleichung (16.), wenn $f_{11} \gtrless 0$ ist,

$$(36.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2,$$

oder nach Gleichung (19.), wenn $f_{22} \lesseqgtr 0$ ist,

$$(37.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}}(f_{12}h + f_{22}k)^2.$$

In diesem Falle nennt man die homogene Function $\varphi(h, k)$ eine „*semidefinite Form*"; sie verschwindet nämlich für $h = 0$, $k = 0$ und *ausserdem* noch für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$, während sie für alle anderen Werthe von h und k dasselbe Vorzeichen hat wie f_{11}, bezw. wie f_{22}. Deshalb kann jetzt $\varphi(h, k)$ nicht mehr für alle Werthsysteme von h und k über das Vorzeichen von Δ entscheiden. Man kann vielmehr über die Werthe von h und k so verfügen, dass $\varphi(h, k)$ (vom Vorzeichen abgesehen) selbst dann kleiner als $2|R|$ wird, wenn man die absoluten Beträge von h und k beliebig klein macht.

Wie dies geschieht, möge zunächst bei einem Beispiele gezeigt werden. Es sei

$$(38.)\qquad \begin{aligned} f(x, y) &= (2px - y^2)(2qx - y^2) \\ &= 4pqx^2 - 2(p + q)xy^2 + y^4, \end{aligned}$$

also

(39.) $f_1(x, y) = 8pqx - 2(p+q)y^2, \quad f_2(x, y) = -4(p+q)xy + 4y^3,$

(40.) $$f_{11}(x, y) = 8pq, \quad f_{12}(x, y) = -4(p+q)y,$$
$$f_{22}(x, y) = -4(p+q)x + 12y^2.$$

Da die Functionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ beide verschwinden, so muss man untersuchen, ob für diese Werthe von x und y ein Maximum oder Minimum eintritt. Aus den Gleichungen (40.) ergiebt sich für $x = 0$, $y = 0$

(41.) $$f_{11}(0, 0) = 8pq, \quad f_{12}(0, 0) = 0, \quad f_{22}(0, 0) = 0,$$

also

(42.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Die Bedingungen, welche *bisher* für das Eintreten eines Maximums oder Minimums aufgestellt worden sind, werden also nicht erfüllt.

Dagegen folgt aus

(43.) $f(0 + h, 0 + k) = f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4,$

dass die Function $\varphi(h, k)$, welche sich in diesem Falle auf das eine Glied $8pqh^2$ reducirt, nicht immer über das Vorzeichen von

(44.) $$\varDelta = f(h, k) - f(0, 0) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4$$

entscheidet. Setzt man z. B.

(45.) $$k^2 = 2lh,$$

wo man über die Grösse l noch beliebig verfügen darf, so wird

(46.) $$\varDelta = 4[pq - (p+q)l + l^2]h^2 = 4(l-p)(l-q)h^2.$$

Unter der Voraussetzung, dass $p > q$ ist, wird deshalb $\varDelta$ *positiv*, wenn $l > p$, oder $l < q$ ist; dagegen wird $\varDelta$ *negativ*, wenn $p > l > q$ ist. Obgleich also $\varphi(h, k)$ *niemals negativ* werden kann, wenn p und q dasselbe Vorzeichen haben, wird $\varDelta$ doch *positive und negative* Werthe annehmen, so dass $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist.

Bemerkung.

In dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, liegt die folgende, *fehlerhafte* Schlussweise nahe. Wenn z. B. $f_{11} \gtrless 0$ ist, so folgt aus Gleichung (16.) für $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$, dass

(47.) $$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2$$

ist, folglich hat $\varphi(h, k)$ immer dasselbe Vorzeichen wie f_{11}. Nur für $f_{11}h = -f_{12}k$ wird $\varphi(h, k)$ gleich Null und kann deshalb nicht mehr über das Vorzeichen von Δ entscheiden. Für diesen besonderen Werth von $h:k$ muss also das Vorzeichen von Δ noch untersucht werden, indem man

$$\Delta = f\left(x - \frac{f_{12}k}{f_{11}}, y + k\right) - f(x, y)$$

nach steigenden Potenzen von k entwickelt. Da man es hierbei nur mit einer einzigen Veränderlichen k zu thun hat, und da unter den gemachten Voraussetzungen die Glieder erster und zweiter Dimension verschwinden, so wird

$$\Delta = Ck^3 + Dk^4 + Ek^5 + \cdots.$$

Ist $C \gtrless 0$, so wechselt für hinreichend kleine Werthe von k die Grösse Δ mit k zugleich das Vorzeichen, so dass *weder ein Maximum noch ein Minimum* eintreten kann. Ist aber $C = 0$, so tritt ein *Minimum* ein, wenn f_{11} und D *beide positiv* sind, und ein *Maximum*, wenn f_{11} und D *beide negativ* sind. Haben f_{11} und D *verschiedenes* Vorzeichen, so tritt *weder ein Maximum noch ein Minimum* ein.

Dass diese Schlussweise *fehlerhaft* ist, lehrt schon das oben angeführte Beispiel, in welchem $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist, obgleich in

$$\Delta = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4$$

alle soeben angegebenen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums erfüllt sind. Es ist nämlich unter der Voraussetzung, dass p und q gleiches Vorzeichen haben,

1) $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$,
2) $f_{11} = 8pq > 0$,
3) der Coefficient C von k^3 in der Entwickelung von Δ nach steigenden Potenzen von k ist gleich 0, weil $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}} = 0$ ist,
4) der Coefficient D von k^4 in dieser Entwickelung ist gleich $+1$, also *positiv*.

Der Fehler der angeführten Schlussweise liegt darin, dass für das Vorzeichen von Δ die Glieder höherer Dimensionen nicht nur in dem Falle den Ausschlag geben, wo $\varphi(h, k)$ *verschwindet*, sondern auch schon dann, wenn $\varphi(h, k)$ sich dem Werthe 0 *nähert*, ohne dass h und k gleich 0 werden. Indem die Function $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werthe von h und k beliebig klein wird von einer höheren als der zweiten Ordnung, kann sie, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner sein als die Summe der Glieder dritter und höherer Dimensionen.

Will man in dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, die Untersuchung, ob $f(x,y)$ ein Maximum, oder ein Minimum, oder keines von beiden ist, zu Ende führen, so muss man beachten, dass Δ eine Function $F(h, k)$ ist, deren Vorzeichen für sehr kleine Werthe von h und k bestimmt werden soll. Indem man zunächst annimmt, dass h einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *constanten* Werth besitzt, kann man $F(h, k)$ als eine Function der einzigen Veränderlichen k betrachten und nach den Regeln, welche für die Theorie der Maxima und Minima bei Functionen von *einer* Veränderlichen gelten, die Werthe von k bestimmen, für welche $F(h, k)$ ein Maximum oder Minimum wird. Zu diesem Zwecke sucht man die Werthe von k auf, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial k} = F_2(h, k) = 0$$

wird. Von diesen Werthen braucht man aber nur diejenigen zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *constanten* Grenzen $-h$ und $+h$ liegen; sie seien (der Grösse nach geordnet)

$$k_1 = \varphi_1(h), \ k_2 = \varphi_2(h), \dots k_m = \varphi_m(h).$$

Ebenso kann man annehmen, dass k einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *constanten* Werth besitzt, und $F(h, k)$ als Function der einzigen Veränderlichen h betrachten. Indem man die Werthe von h aufsucht, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial h} = F_1(h, k) = 0$$

wird, findet man die Werthe von h, für welche $F(h, k)$ möglicher Weise ein Maximum oder Minimum wird. Auch hier braucht man nur diejenigen Werthe von h zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *constanten* Grenzen $-k$ und $+k$ liegen; sie seien (der Grösse nach geordnet)

$$h_1 = \psi_1(k), \ h_2 = \psi_2(k), \dots h_n = \psi_n(k).$$

Ergiebt sich jetzt, dass die Grössen

$$(48.) \quad \begin{cases} F(h, -h), \ F(h, k_1), \ F(h, k_2), \dots F(h, k_m), \ F(h, +h), \\ F(-k, k), \ F(h_1, k), \ F(h_2, k), \dots F(h_n, k), \ F(+k, k) \end{cases}$$

sämmtlich negativ sind, so ist Δ für *alle* in Betracht kommenden Werthe von h und k negativ, weil auch die *grössten* Werthe von Δ noch negativ sind. Ergiebt sich aber, dass die in (48.) angegebenen Grössen *sämmtlich positiv* sind, so ist Δ für alle in Betracht kommenden Werthe von h und k positiv, weil auch die *kleinsten* Werthe von Δ noch positiv sind. In dem ersten Falle wird also $f(x, y)$ ein *Maximum* und in dem zweiten Falle ein *Minimum*.

Diese Bedingungen sind gleichzeitig auch die *nothwendigen*: denn sind die unter (48.) angegebenen Grössen theilweise positiv und theilweise negativ, so wechselt Δ das Vorzeichen, woraus dann folgt, dass $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum wird.

Die vorstehenden Umformungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt worden, dass $f_{11} \gtrless 0$ ist. Fällt diese Voraussetzung fort, so wird im Allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.

Ist nämlich

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} \gtrless 0, \quad f_{22} \gtrless 0, \tag{49.}$$

so wird

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= 2f_{12}hk + f_{22}k^2 \\ &= \frac{1}{f_{22}}[(f_{12}h + f_{22}k)^2 - f_{12}^2h^2]. \end{aligned} \tag{50.}$$

Für $h = 0$ hat daher $\varphi(h, k)$ mit f_{22} *gleiches* Vorzeichen: für $h = -\frac{f_{22}k}{f_{12}}$ dagegen sind die Vorzeichen von $\varphi(h, k)$ und f_{22} *ungleich*.

In ähnlicher Weise kann man den Fall erledigen, wo

$$f_{11} \gtrless 0, \quad f_{12} \gtrless 0, \quad f_{22} = 0 \tag{51.}$$

ist; man braucht nur die Indices 1 und 2 und die Grössen h und k mit einander zu vertauschen.

Ist ferner

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} \gtrless 0, \quad f_{22} = 0, \tag{52.}$$

so wechselt

(53.) $$\varphi(h, k) = 2f_{12}hk$$

mit h (und ebenso mit k) das Vorzeichen. Wenn also die Voraussetzungen (49.), (51.) oder (52.) gelten, ***kann weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.*** Denn Δ wechselt mit $\varphi(h, k)$ zugleich das Vorzeichen, da die betrachteten Werthe von $\varphi(h, k)$ kleine Grössen *zweiter* Ordnung sind und sich von Δ nur durch kleine Grössen *dritter* Ordnung unterscheiden.

Die Fälle, in denen

(54.) $$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} \gtreqless 0,$$

oder

(55.) $$f_{11} \gtreqless 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0$$

ist, geben

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

und sind oben schon ausführlich behandelt worden.

Es bleibt daher nur der Fall übrig, wo

(56.) $$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0$$

ist: dann wird nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze

(57.) $$\Delta = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(3)} + R,$$

oder

(57a.) $$6\Delta = f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3 + 6R,$$

wobei nach Formel Nr. 150 der Tabelle

(58.) $$\begin{aligned} 6R = \; & [f_{111}(x + \Theta h, y + \Theta k) - f_{111}(x, y)]h^3 \\ & + 3[f_{112}(x + \Theta h, y + \Theta k) - f_{112}(x, y)]h^2k \\ & + 3[f_{122}(x + \Theta h, y + \Theta k) - f_{122}(x, y)]hk^2 \\ & + \; [f_{222}(x + \Theta h, y + \Theta k) - f_{222}(x, y)]k^3 \end{aligned}$$

ist. Da man die Stetigkeit der Functionen $f_{111}(x, y)$, $f_{112}(x, y)$, $f_{122}(x, y)$, $f_{222}(x, y)$ voraussetzt, so kann man für hinreichend kleine Werthe von h und k die absoluten Beträge der Grössen, welche bei Gleichung (58.) in den eckigen Klammern stehen, kleiner machen als eine beliebige kleine Grösse γ, folglich wird

(59.) $$6\,|R| < \gamma(|h| + |k|)^3.$$

Sind die Grössen f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} von 0 verschieden, und sind u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung

$$f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222} = 0, \tag{60.}$$

so wird $f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222}$ für alle Werthe von u, welche von u_1, u_2 und u_3 verschieden sind, eine *endliche* Grösse sein. Indem man für einen solchen positiven Werth von u

$$\gamma < \frac{f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222}}{(u+1)^3} \tag{61.}$$

macht und $h = u \,.\, k$ setzt, wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\begin{aligned} &f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3 \\ &= (f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3 > \gamma(u+1)^3k^3 > 6\ R\,. \end{aligned} \tag{62.}$$

Deshalb hat Δ das gleiche Vorzeichen wie $(f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3$, ein Ausdruck, der mit k das Vorzeichen wechselt; folglich hat Δ positive und negative Werthe, so dass $f(x, y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* werden kann, wenn die Grössen f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} nicht alle vier gleich 0 sind.

Gelten die 9 Bedingungen

$$\begin{cases} f_1 = 0, f_2 = 0, f_{11} = 0, f_{12} = 0, f_{22} = 0, \\ f_{111} = 0, f_{112} = 0, f_{122} = 0, f_{222} = 0, \end{cases} \tag{63.}$$

so findet man nach dem *Taylor*'schen Lehrsatze

$$\Delta = \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)} + R. \tag{64.}$$

Der Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)}$ ist eine homogene Function $g(h, k)$ *vierten* Grades von h und k und kann nach den Sätzen der Algebra in zwei homogene Functionen *zweiten* Grades $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zerlegt werden. Sind $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zwei *definite Formen*, so lässt sich zeigen, dass Δ für hinreichend kleine Werthe von h und k gleiches Vorzeichen mit $g(h, k)$ hat, dass also $f(x, y)$ ein *Maximum* oder *Minimum* wird, jenachdem $g(h, k)$ *beständig negativ* oder *beständig positiv* ist.

Diese Untersuchung wird jedoch nur in äusserst seltenen Fällen erforderlich sein und möge deshalb an dieser Stelle nicht weitergeführt werden.

Im Allgemeinen wird man schon mit der folgenden Regel auskommen:

$z = f(x, y)$ wird ein Minimum, wenn

(65.) $f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$

und $z = f(x, y)$ wird ein Maximum, wenn

(66.) $f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$

dagegen wird $z = f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn zwar

(67.) $f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0,$ *aber* $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$

§ 126.

Geometrische Deutung der vorhergehenden Untersuchungen.*)

Die vorstehenden Untersuchungen werden anschaulich, wenn man

(1.) $$z = f(x, y)$$

als Gleichung einer Fläche auffasst. Nach Formel Nr. 145 der Tabelle hat dann die Tangentialebene im Flächenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Gleichung

(2.) $$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y).$$

Sind nun die Bedingungen

(3.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 0$$

erfüllt, so reducirt sich Gleichung (2.) auf

(4.) $$z' - z = 0,$$

d. h. *die Tangentialebene im Punkte P wird parallel zur XY-Ebene.* Setzt man jetzt noch

(5.) $x' = x + h, \quad y' = y + k,$ also $h = x' - x, \quad k = y' - y,$

so kann man die Gleichung der Fläche auf die Form

*) Der Leser, welcher mit der analytischen Geometrie des Raumes noch nicht vertraut ist, kann diesen Paragraphen überschlagen, ohne dass der Zusammenhang gestört wird.

(6.) $z' = f(x', y') = z + \frac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + [h, k]_3$

bringen, wobei mit $[h, k]_3$ die Glieder dritter und höherer Dimension bezeichnet sind. Deshalb wird $z' - z$ mit h und k zugleich unendlich klein von der zweiten Ordnung. Sind nun h und k wirklich beliebig klein und so bestimmt, dass $z' - z$ einen constanten Werth l beibehält, so ist

(7.) $$z' - z = l$$

die Gleichung einer Ebene, welche der Tangentialebene im Punkte P parallel ist und ihr beliebig nahe liegt. Für den Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche findet man aus Gleichung (6.), unter Vernachlässigung der beliebig kleinen Grössen *dritter* und *höherer* Ordnung,

(8.) $$f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 = 2l,$$

oder

(8a.) $$f_{11}(x' - x)^2 + 2f_{12}(x' - x)(y' - y) + f_{22}(y' - y)^2 = 2l.$$

Diese Gleichung stellt einen kleinen Kegelschnitt dar, welcher die dem Flächenpunkte P entsprechende „*Indicatrix*" genannt wird; und zwar ist bekanntlich die Curve eine *Ellipse*, wenn

(9.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

wird. Damit aber diese Ellipse *reell* ist, müssen f_{11} (und ebenso f_{22}) mit l gleiches Zeichen haben.

Dies entspricht ganz der Anschauung. Ist nämlich der Punkt ein *tiefster* Punkt, dann muss in Gleichung (7.) die Grösse l einen *positiven* Werth haben, weil die Tangentialebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *oben* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Curve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

(10.) $$f_{11} > 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

befriedigt sein.

Ist der Punkt P ein *höchster* Punkt, so muss in Gleichung (7.) die Grösse l einen *negativen* Werth haben, weil die Tangential-

ebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *unten* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Curve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

$$(11.)\qquad f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

befriedigt werden. In beiden Fällen nennt man den Punkt P „*elliptisch*".

Die Gleichung (8a.) stellt dagegen eine Hyperbel dar, wenn

$$(12.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0,$$

gleichviel, ob l positiv oder negativ ist. Die Schnittcurve der Fläche mit jeder Ebene, welche zur Tangentialebene parallel ist und ihr sehr nahe liegt, hat dann in der Nähe des Flächenpunktes P die Gestalt einer kleinen *Hyperbel*, was nur dadurch möglich wird, dass die Fläche im Punkte P *sattelförmig* ist.

In diesem Falle nennt man den Punkt P „*hyperbolisch*" und erkennt, dass P weder ein *höchster* noch ein *tiefster* Punkt der Fläche sein kann.

Die dem Flächenpunkte P entsprechende *Indicatrix* ist also eine *Ellipse*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0,$$

sie ist eine *Hyperbel*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo

$$(13.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2$$

wird; dann kann man die Gleichung (8a.) auf die Form

$$f_{11}^2(x' - x)^2 + 2f_{11}f_{12}(x' - x)(y' - y) + f_{12}^2(y' - y)^2 = 2f_{11}l$$

bringen und erhält, indem man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel auszieht,

$$(14.)\qquad f_{11}(x' - x) + f_{12}(y' - y) = \pm\sqrt{2f_{11} \,.\, l}.$$

Die Indicatrix zerfällt daher in diesem Falle in *zwei parallele Gerade*. Ein solcher Flächenpunkt entspricht im Allgemeinen *weder einem eigentlichen Maximum noch einem eigentlichen Minimum von z*, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

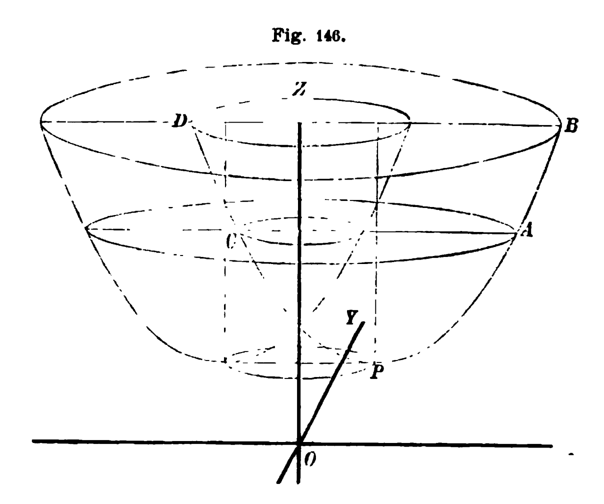
Es rotire eine Parabel mit der Gleichung

$$2p(z - c) = (x - a)^2 \tag{15.}$$

um die Z-Axe (Fig. 146), dann hat die Rotationsfläche die Gleichung

$$2p(z - c) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2. \tag{16.}$$

Fig. 146.



Bezeichnet man der Kürze wegen $\sqrt{x^2 + y^2}$ mit r, so wird

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \tag{17.}$$

$$z = f(x, y) = c + \frac{(r - a)^2}{2p}. \tag{18.}$$

Um einen höchsten oder tiefsten Punkt P der Fläche aufzufinden, muss man seine Coordinaten x, y, z so bestimmen, dass ausser der Gleichung (18.) noch die beiden Gleichungen

$$f_1(x, y) = \frac{(r - a)x}{pr} = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{(r - a)y}{pr} = 0 \tag{19.}$$

befriedigt werden. Dies geschieht, indem man

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad r = a \text{ und } z = c \tag{20.}$$

setzt, wobei der Winkel φ noch beliebig ist. Nun ist aber

$$(21.)\quad f_{11} = -\frac{r^3 - ay^2}{pr^3}, \quad f_{12} = \frac{axy}{pr^3}, \quad f_{22} = -\frac{r^3 - ax^2}{pr^3},$$

oder für die Coordinaten des Punktes P

$$(22.)\quad f_{11} = \frac{\cos^2\varphi}{p}, \quad f_{12} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{p}, \quad f_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{p},$$

$$(23.)\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Der Punkt P ist hier kein tiefster Punkt, denn er liegt auf dem Kreise, welchen der Scheitel der Parabel bei der Rotation beschreibt, so dass es allerdings Punkte in seiner unmittelbaren Nachbarschaft giebt, welche dieselbe Coordinate z haben und deshalb mit P in gleicher Höhe liegen. Aus dem vorstehenden Beispiele erkennt man auch, dass ein Flächenpunkt P durchaus nicht immer ein tiefster Punkt ist, wenn seine Tangentialebene zur XY-Ebene *parallel* ist, und wenn die Schnittcurven der Fläche mit allen durch P gelegten verticalen Ebenen nach oben *concav* sind.

Verschiebt man die Tangentialebene im Punkte P um die kleine Grösse l nach oben, indem man

$$(24.)\quad z = c + l$$

setzt, so schneidet diese Ebene aus der Fläche zwei concentrische Kreise mit den Gleichungen

$$(25.)\quad x^2 + y^2 = (a + \sqrt{2pl})^2 \text{ und } x^2 + y^2 = (a - \sqrt{2pl})^2$$

aus. Die Indicatrix besteht in diesem Falle also aus zwei parallelen Linien, da in hinreichender Nähe des Punktes P die beiden Kreise mit ihren Tangenten zusammenfallen.

§ 127.

Maxima und Minima der Functionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 153 und 154.)

Bei Functionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen gestaltet sich die Untersuchung ganz ähnlich wie bei Functionen von zwei Veränderlichen. Soll z. B.

(1.) $$u = f(x, y, z)$$

ein Maximum oder Minimum werden, so muss

(2.) $$\Delta = f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z)$$

für alle hinreichend kleinen, positiven oder negativen Werthe von h, k, l bei einem *Minimum beständig positiv* und bei einem *Maximum beständig negativ* sein. Aus der Entwickelung nach der *Taylor*'schen Reihe findet man, dass dies nur möglich ist, wenn

(3.) $$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0$$

ist. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so folgt weiter aus der Entwickelung nach der *Taylor*'schen Reihe, dass für hinreichend kleine Werthe von h, k, l die Differenz Δ dasselbe Zeichen hat wie

(4.) $$\varphi(h, k, l) = f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 + 2f_{13}hl + 2f_{23}kl + f_{33}l^2,$$

es sei denn, dass diese Function $\varphi(h, k, l)$ gleich Null wird für Werthe von h, k, l, die von Null verschieden sind. Die Entscheidung, unter welchen Bedingungen $\varphi(h, k, l)$ eine *„definite Form"* ist, d. h. die Entscheidung darüber, ob $\varphi(h, k, l)$ *beständig positiv*, bezw. *beständig negativ* ist, ergiebt sich durch eine Umformung von $\varphi(h, k, l)$ unter Anwendung der Determinantentheorie.

Es seien die Grössen $D_1, D_2, D_3, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, h', k', h''$ durch die folgenden Gleichungen erklärt:

(5.) $$D_1 = f_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix},$$

(6.) $$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} f_{12} f_{13} \\ f_{22} f_{23} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} f_{13} f_{11} \\ f_{23} f_{21} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} = D_2,$$

(7.) $$h' = h - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} l, \quad k' = k - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} l, \quad h'' = h' + \frac{f_{12}}{f_{11}} k';$$

dann wird nach den Formeln Nr. 122 und 124 der Tabelle

(8.) $$D_3 = f_{31}\alpha_{31} + f_{32}\alpha_{32} + f_{33}\alpha_{33},$$

(9.) $$f_{11}\alpha_{31} + f_{12}\alpha_{32} + f_{13}\alpha_{33} = 0,$$

(10.) $$f_{21}\alpha_{31} + f_{22}\alpha_{32} + f_{23}\alpha_{33} = 0.$$

Bringt man also Gleichung (4.) auf die Form

$$(4a.)\quad \varphi(h, k, l) = h(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) + k(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) + l(f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l)$$

und setzt, den Gleichungen (7.) entsprechend,

$$h = h' + \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} l, \quad k = k' + \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} l,$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.), (9.) und (10.)

$$(11.)\quad f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l = f_{11}h' + f_{12}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{11}\alpha_{31} + f_{12}\alpha_{32} + f_{13}\alpha_{33}) = f_{11}h' + f_{12}k',$$

$$(12.)\quad f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l = f_{21}h' + f_{22}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{21}\alpha_{31} + f_{22}\alpha_{32} + f_{23}\alpha_{33}) = f_{21}h' + f_{22}k',$$

$$(13.)\quad f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l = f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{31}\alpha_{31} + f_{32}\alpha_{32} + f_{33}\alpha_{33}) = f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{D_3 l}{\alpha_{33}};$$

folglich geht Gleichung (4a.) über in

$$(14.)\quad \varphi(h, k, l) = h(f_{11}h' + f_{12}k') + k(f_{21}h' + f_{22}k') + l(f_{31}h' + f_{32}k') + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}}$$
$$= h'(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) + k'(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}}.$$

Dies giebt, wenn man die Gleichungen (11.) und (12.) nochmals anwendet, mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.)

$$(15.)\quad \varphi(h, k, l) = h'(f_{11}h' + f_{12}k') + k'(f_{21}h' + f_{22}k') + \frac{D_3 l^2}{D_2},$$

oder

$$(16.)\quad \varphi(h, k, l) = f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 + \frac{D_3 l^2}{D_2}.$$

Jetzt ist noch, wie schon in § 125 gezeigt wurde,

$$f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 = f_{11}\left(h' + \frac{f_{12}}{f_{11}}k'\right)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}} k'^2,$$

folglich wird

$$\varphi(h, k, l) = D_1 h''^2 + \frac{D_2}{D_1} k'^2 + \frac{D_3}{D_2} l^2. \tag{17.}$$

Damit dieser Ausdruck *beständig positiv* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Minimum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0 \tag{18.}$$

erfüllt sein; und damit $\varphi(h, k, l)$ *beständig negativ* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Maximum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0 \tag{19.}$$

erfüllt sein.

In ähnlicher Weise findet man, dass

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{20.}$$

ein Minimum wird, wenn die ersten partiellen Ableitungen $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *sämmtlich gleich Null sind, und wenn*

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0. \tag{21.}$$

Dabei ist

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \ldots f_{1\alpha} \\ f_{21} f_{22} \ldots f_{2\alpha} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{\alpha 1} f_{\alpha 2} \ldots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}. \tag{22.}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots n$.

Dagegen wird u ein Maximum, wenn die ersten partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wieder sämmtlich gleich Null, und wenn die Determinanten D_α mit geradem Index sämmtlich positiv und die mit ungeradem Index sämmtlich negativ sind.

Sind nämlich für ein Werthsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ die ersten partiellen Ableitungen $f_1, f_2, \ldots f_n$ sämmtlich gleich Null, so wird

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) + [h_1, h_2, \ldots h_n]_3, \end{aligned} \tag{23.}$$

wobei der Rest der *Taylor*'schen Reihe mit $[h_1, h_2, \ldots h_n]_3$ bezeichnet ist, um anzudeuten, dass er mit den Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ zugleich unendlich klein wird von der *dritten* Ordnung. Die Differenz Δ wird für hinreichend kleine Werthe von $h_1, h_2, \ldots h_n$

beständig positiv oder *beständig negativ* sein, wenn die homogene Function zweiter Ordnung

$$(24.)\quad \begin{aligned}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n)\\ & + h_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n)\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + h_n(f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n)\end{aligned}$$

eine *definite Form* ist. Bezeichnet man wieder die Unterdeterminanten von D_n mit $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{nn}$, so erhält man nach den Formeln Nr. 122 und 124 der Tabelle

$$(25.)\quad D_n = f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{nn}\alpha_{nn},$$

$$(26.)\quad f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn} = 0 \text{ für } r < n.$$

Daraus folgt, wenn man

$$(27.)\quad \begin{cases} h_1 = h'_1 + \dfrac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} h_n, \quad h_2 = h'_2 + \dfrac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} h_n, \ldots \\ \qquad h_{n-1} = h'_{n-1} + \dfrac{\alpha_{n,n-1}}{\alpha_{nn}} h_n \end{cases}$$

setzt, mit Rücksicht auf Gleichung (26.) für $r < n$

$$(28.)\quad \begin{aligned} f_{r1}h_1 + f_{r2}h_2 + \cdots + f_{rn}h_n &= f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,n-1}h'_{n-1}\\ &\quad + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn})\\ &= f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,n-1}h'_{n-1},\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (25.)

$$(29.)\quad \begin{aligned} f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n &= f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,n-1}h'_{n-1}\\ &\quad + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{nn}\alpha_{nn})\\ &= f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,n-1}h'_{n-1}\\ &\qquad + \frac{D_n h_n}{D_{n-1}}.\end{aligned}$$

Dies giebt

$$(30.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h\ ) = h_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,n-1}h'_{n-1}) \\ + h_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,n-1}h'_{n-1}) \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + h_n(f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,n-1}h'_{n-1}) \\ + \frac{D_n h^2_n}{D_{n-1}},$$

oder, wenn man anders ordnet,

$$(31.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = h'_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n) \\ + h'_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n) \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h_1 + f_{n-1,2}h_2 + \cdots + f_{n-1,n}h_n) \\ + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}}.$$

Indem man die Gleichungen (28.) noch einmal anwendet, findet man

$$(32.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \\ h'_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,n-1}h'_{n-1}) \\ + h'_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,n-1}h'_{n-1}) \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h'_1 + f_{n-1,2}h'_2 + \cdots + f_{n-1,n-1}h'_{n-1}) \\ + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}},$$

oder

$$(33.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0) + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2.$$

Da nun hierbei die homogene Function zweiten Grades $\varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0)$ nur noch $n-1$ Veränderliche enthält, so kann man diese Function in ähnlicher Weise auf die Form

$$\varphi(h''_1, h''_2, \ldots h''_{n-2}, 0, 0) + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2$$

bringen und so fortfahren, bis man erhält

$$(34.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \\ D_1\left(h_1^{(n-1)}\right)^2 + \frac{D_2}{D_1}\left(h_2^{(n-2)}\right)^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2 + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2.$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich dann ohne Weiteres die oben aufgeführten Sätze.

§ 128.
Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werthe von x und y bestimmen, für welche

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10 \tag{1.}$$

ein Maximum oder Minimum wird.

Auflösung. Hier ist

$$f_1(x, y) = 2x + y - 5, \quad f_2(x, y) = x + 2y - 4, \tag{2.}$$

$$f_{11} = 2, \quad f_{12} = 1, \quad f_{22} = 2. \tag{3.}$$

Die beiden ersten partiellen Ableitungen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ verschwinden nur für

$$x = 2, \quad y = 1, \tag{4.}$$

und zwar wird z für diese Werthe von x und y ein *Minimum*, weil

$$f_{11} = 2 > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 3 > 0. \tag{5.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Zahl a so in drei Theile theilen, dass ihr Product ein Maximum wird.

Auflösung. Bezeichnet man zwei von diesen Theilen mit x und y, so wird der dritte $a - x - y$, und das Product, welches ein Maximum werden soll, ist

$$z = f(x, y) = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2. \tag{6.}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} f_1(x, y) = ay - 2xy - y^2 = y\,(a - 2x - y), \\ f_2(x, y) = ax - x^2 - 2xy = x\,(a - x - 2y), \end{cases} \tag{7.}$$

$$f_{11} = -2y, \quad f_{12} = a - 2x - 2y, \quad f_{22} = -2x. \tag{8.}$$

Da die Werthe $x = 0$, oder $y = 0$ hier nicht in Betracht kommen können, wie schon aus der Natur der Aufgabe hervorgeht, so erhält man, indem man $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ gleich Null setzt, die Gleichungen

$$a - 2x - y = 0, \quad a - x - 2y = 0, \tag{9.}$$

welche nur für

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3} \tag{10.}$$

befriedigt werden. Da für dieses Werthepaar

$$(11.)\quad f_{11} = -\frac{2a}{3} < 0,\quad f_{12} = -\frac{a}{3},\quad f_{22} = -\frac{2a}{3},\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{a^2}{3} > 0,$$

so tritt ein *Maximum* ein.

Dieser Aufgabe kann man auch die folgende Fassung geben: Von einem rechtwinkligen Parallelepipedon ist die Summe aller Kanten gleich $4a$; wie gross müssen die einzelnen Kanten sein, damit das Volumen ein Maximum wird?

Aus der vorstehenden Lösung sieht man, dass das rechtwinklige Parallelepipedon mit möglichst grossem Volumen ein Würfel ist.

Aufgabe 3. Man soll unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfange dasjenige ermitteln, welches den grössten Flächeninhalt hat.

Auflösung. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist bekanntlich

$$(12.)\quad F = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)},$$

wenn man die Seiten mit a, b, c und den Umfang mit $2u$ bezeichnet. Setzt man aber

$$(13.)\quad u = 3m,\quad a = x,\quad b = y,$$

so wird

$$(14.)\quad c = 6m - x - y,\quad u - c = x + y - 3m,$$

$$(15.)\quad F^2 = 3m(3m - x)(3m - y)(x + y - 3m),$$

also

$$(16.)\quad f(x, y) = \frac{F^2}{3m} = (3m - x)(3m - y)(x + y - 3m)$$

$$= (3m - x)[-9m^2 + 3m(x + 2y) - xy - y^2]$$

$$= (3m - y)[-9m^2 + 3m(y + 2x) - xy - x^2].$$

Da F mit $f(x, y)$ zugleich ein Maximum wird, so bilde man

$$(17.)\quad f_1(x, y) = (3m - y)(6m - 2x - y),$$

$$(18.)\quad f_2(x, y) = (3m - x)(6m - x - 2y).$$

Die Summe aller drei Seiten ist gleich $6m$, und jede Seite muss kleiner sein als die Summe der beiden anderen Seiten, so dass jede der Seiten kleiner sein muss als $3m$. Deshalb dürfen in $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ die Factoren $3m - y$, bezw. $3m - x$ nicht gleich 0 sein; man muss vielmehr

$$6m - 2x - y = 0, \quad 6m - x - 2y = 0, \tag{19.}$$

oder

$$x = 2m, \quad y = 2m \tag{20.}$$

setzen. Für diese Werthe von x und y tritt auch wirklich ein Maximum ein, denn es ist

$$f_{11} = 2y - 6m = -2m < 0, \tag{21.}$$

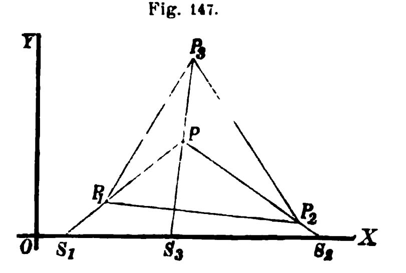
$$f_{12} = 2x + 2y - 9m = -m, \quad f_{22} = 2x - 6m = -2m, \tag{22.}$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 3m^2 > 0. \tag{23.}$$

Unter allen Dreiecken mit gleichem Umfange hat also das gleichseitige den grössten Inhalt.

Aufgabe 4. Von einem Dreieck sind die Coordinaten der Eckpunkte P_1, P_2, P_3, nämlich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gegeben; man soll die Coordinaten eines Punktes P finden, dessen Abstände von den Ecken eine möglichst kleine Summe haben. (Vergl. Fig. 147.)

Fig. 147.



Auflösung. Die Abstände des Punktes P von den Ecken seien s_1, s_2, s_3, und die Winkel, welche diese Linien mit der positiven Richtung der X-Axe bilden, seien

$$\sphericalangle XS_1P = \varphi_1, \quad \sphericalangle XS_2P = \varphi_2, \quad \sphericalangle XS_3P = \varphi_3,$$

dann wird

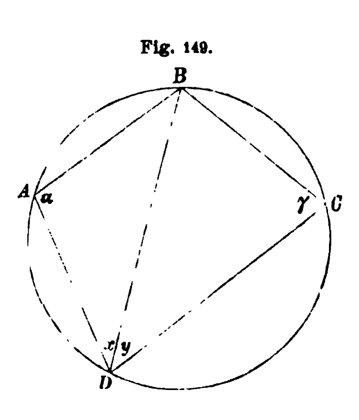
$$s_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad s_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}, \tag{24.}$$
$$s_3 = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2},$$

und es ist

$$f(x, y) = s_1 + s_2 + s_3 \tag{25.}$$

die Function, welche ein Minimum werden soll. Nun ist für $\alpha = 1, 2, 3$

Fig. 149.



Auflösung. Bezeichnet man die Winkel ADB und BDC bezw. mit x und y, und die Winkel BAD und BCD bezw. mit α und γ, so ist bekanntlich

$$\gamma = 180^0 - \alpha,$$

$$(38.)\quad \begin{cases} AB = 2a\sin x, \\ BC = 2a\sin y, \end{cases}$$

$$(39.)\quad \begin{cases} CD = 2a\sin(y + \gamma), \\ DA = 2a\sin(x + \alpha); \end{cases}$$

folglich wird der doppelte Flächeninhalt des Vierecks

$$2F = 4a^2\sin x\sin(x + \alpha)\sin\alpha + 4a^2\sin y\sin(y + \gamma)\sin\gamma,$$

also, da man den constanten positiven Factor $4a^2\sin\alpha = 4a^2\sin\gamma$ fortlassen darf,

$$(40.)\qquad f(x, y) = \sin x\sin(x + \alpha) + \sin y\sin(y + \gamma).$$

Dies giebt

$$(41.)\quad f_1(x, y) = \sin(x + \alpha)\cos x + \cos(x + \alpha)\sin x = \sin(2x + \alpha),$$

$$(42.)\quad f_2(x, y) = \sin(y + \gamma)\cos y + \cos(y + \gamma)\sin y = \sin(2y + \gamma).$$

Deshalb wird

$$f_1(x, y) = 0 \text{ für } 2x + \alpha = 180^0,$$
$$f_2(x, y) = 0 \text{ für } 2y + \gamma = 180^0,$$

$$(43.)\qquad x = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}, \quad y = 90^0 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Die Diagonale AC muss daher die Winkel α und γ in den Eckpunkten A nnd C halbiren; dabei gehen die Gleichungen (38.) und (39.) über in

$$AB = 2a\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad BC = 2a\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$CD = 2a\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = 2a\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$DA = 2a\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \alpha\right) = 2a\sin\frac{\gamma}{2},$$

folglich wird

$$AB = AD, \quad CB = CD. \tag{44.}$$

Der Flächeninhalt wird für die angegebenen Werthe von x und y wirklich ein Maximum, denn es ist

$$f_{11}(x, y) = 2\cos(2x + \alpha) = -2 < 0,$$
$$f_{12} = 0, \quad f_{22} = 2\cos(2y + \gamma) = -2,$$
$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = +4 > 0.$$

§ 129.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Bisher war immer die Voraussetzung gemacht worden, dass in der Function

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{1.}$$

welche ein Maximum oder Minimum werden soll, die n Veränderlichen von einander *unabhängig* sind. Das wird aber bei den wenigsten Aufgaben der Fall sein. Soll man z. B. die Zahl a so in drei Theile theilen, dass das Product dieser Theile ein Maximum wird, so ist die Function, welche ein Maximum werden soll,

$$u = xyz, \tag{2.}$$

wo zwischen den drei Veränderlichen die Bedingungsgleichung

$$x + y + z = a \tag{3.}$$

besteht. Diese Aufgabe wurde in dem vorhergehenden Paragraphen so gelöst, dass man aus Gleichung (3.) den Werth von z berechnete und in die Gleichung (2.) einsetzte.

Dadurch erhält man

$$u = xy(a - x - y) = f(x, y), \tag{4.}$$

also eine Function, welche nur noch die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y enthält.

In ähnlicher Weise kann man häufig zum Ziele kommen. Soll z. B. in die Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ein Dreieck $P_1P_2P_3$ mit möglichst grossem Flächeninhalte einbeschrieben werden, so hängt die Function

$$(5.) \qquad 2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

welche ein Maximum werden soll, von *sechs* Veränderlichen $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ ab. Diese sind aber nicht von einander unabhängig, sondern sie müssen den drei Gleichungen

$$(6.) \quad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2, \quad b^2x_3^2 + a^2y_3^2 = a^2b^2$$

genügen, damit die drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf der Ellipse liegen. Jetzt kann man aber aus den Gleichungen (6.) die Werthe von y_1, y_2, y_3 bezw. als Functionen von x_1, x_2, x_3 ausrechnen und in den Ausdruck für $2F$ einsetzen. Dann hat man nur noch eine Function von *drei unabhängigen* Veränderlichen x_1, x_2, x_3, welche ein Maximum werden soll.

In den meisten Fällen wird aber eine derartige Elimination viel zu umständlich sein, als dass man an ihre Ausführung denken könnte. Dagegen führt die folgende Methode im Allgemeinen viel leichter zum Ziele.

Es sei wieder

$$(7.) \qquad u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

die Function, welche ein Maximum oder Minimum werden soll. Dabei seien die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den m Bedingungsgleichungen

$$(8.) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

unterworfen, wobei aber $m < n$ sein muss. Da nur solche Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in Betracht kommen, für welche diese Gleichungen (8.) befriedigt werden, so ist es gleichgültig, ob man das Maximum bezw. das Minimum der Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ oder der Function

$$(9.) \quad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

aufsucht, wenn man auch für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ noch ganz beliebige Grössen einsetzt. Um nun die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, für welche $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum oder Minimnm wird, muss man wieder

$$(10.)\quad \varDelta = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

nach Potenzen von $h_1, h_2, \ldots h_n$ entwickeln. Dies geschieht nach der *Taylor*'schen Reihe, und zwar erhält man

$$(11.)\quad \varDelta = F_1h_1 + F_2h_2 + \cdots + F_nh_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2,$$

wobei die ersten partiellen Ableitungen von $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. mit $F_1, F_2, \ldots F_n$ und der Rest mit $[h_1, h_2, \ldots h_n]_2$ bezeichnet sind. Damit nun $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Minimum* wird, muss $\varDelta$ für alle *zulässigen*, hinreichend kleinen Werthe der Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig positiv* sein, und damit $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Maximum* wird, muss $\varDelta$ für alle *zulässigen*, hinreichend kleinen Werthe der Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig negativ* sein. Hierbei muss man aber beachten, dass nur solche Werthe von $h_1, h_2, \ldots h_n$ zulässig sind, für welche die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_m(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0 \end{cases}$$

befriedigt sind. Von den n Grössen $h_1, h_2, \ldots h_n$ sind daher nur $n - m$, z. B. $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ *willkürlich*, während sich die Werthe der m übrigen $(h_1, h_2, \ldots h_m)$ aus den m Gleichungen (12.) ergeben. Bezeichnet man jetzt

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} \quad \text{mit} \quad \varphi_{\alpha\beta},$$

wobei α alle Werthe von 1 bis m und β alle Werthe von 1 bis n annehmen darf, so kann man die m Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ so bestimmen, dass die m *linearen* Gleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} F_1 = f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ F_2 = f_2 + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m2} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_m = f_m + \lambda_1\varphi_{1m} + \lambda_2\varphi_{2m} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mm} = 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Dadurch geht Gleichung (11.) über in

$$(14.)\quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + F_{m+2}h_{m+2} + \cdots + F_n h_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2.$$

Da nun $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ willkürlich sind, so kann man

$$h_{m+2} = 0, \ldots h_n = 0$$

setzen, so dass sich die Grösse Δ auf

$$(15.)\quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + [h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$$

reducirt. Macht man jetzt h_{m+1} hinreichend klein, so müssen auch $h_1, h_2, \ldots h_m$ beliebig klein werden, wenn die Gleichungen (12.) befriedigt werden sollen. Wäre also F_{m+1} von Null verschieden, so könnte man h_{m+1} so klein machen, dass, vom Vorzeichen abgesehen, $F_{m+1}h_{m+1}$ grösser würde als $[h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$, dass also Δ dasselbe Vorzeichen hätte wie $F_{m+1}h_{m+1}$. Diese Grösse *wechselt* aber das Vorzeichen zugleich mit h_{m+1}, folglich kann nur dann ein Maximum oder Minimum eintreten, wenn

$$F_{m+1} = 0$$

ist. In derselben Weise kann man zeigen, dass auch

$$F_{m+2} = 0, \ldots F_n = 0$$

sein muss. Dies giebt zur Bestimmung der n Grössen x_1, $x_2, \ldots x_n$ ausser den m Gleichungen (8.) noch die $n-m$ Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} F_{m+1} = f_{m+1} + \lambda_1\varphi_{1,m+1} + \lambda_2\varphi_{2,m+1} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,m+1} = 0, \\ F_{m+2} = f_{m+2} + \lambda_1\varphi_{1,m+2} + \lambda_2\varphi_{2,m+2} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,m+2} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F_n = f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0. \end{cases}$$

Bei der Herleitung wurden allerdings die m Gleichungen (13.) zur Berechnung der m Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ und die n Gleichungen (8.) und (16.) zur Berechnung der n Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ benutzt. Man ist aber natürlich an diese Reihenfolge in der Ausführung der Rechnungen nicht gebunden, sondern hat nach dem Vorhergehenden im Ganzen $m+n$ Gleichungen, nämlich die Gleichungen

$$
(17.) \quad \begin{cases}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\
f_1 + \lambda_1 \varphi_{11} + \lambda_2 \varphi_{21} + \cdots + \lambda_m \varphi_{m1} = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
f_n + \lambda_1 \varphi_{1n} + \lambda_2 \varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m \varphi_{mn} = 0,
\end{cases}
$$

die gerade zur Berechnung der $m + n$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$, $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausreichen.

Auf diese Weise findet man *alle* Werthsysteme der n Veränderlichen, für welche *möglicher Weise* ein Maximum oder Minimum eintreten kann. Ob dann für ein so gefundenes Werthsystem *wirklich* ein Maximum oder Minimum eintritt, geht in vielen Fällen schon aus der Natur der Aufgabe hervor. Deshalb möge hier die etwas weitläufige Entwickelung eines allgemein gültigen Kriteriums übergangen werden.

§ 130.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Es soll das grösste rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, das einer *Kugel* mit dem Halbmesser a einbeschrieben werden kann.

Auflösung. Da der Mittelpunkt des Parallelepipedons zugleich auch der Mittelpunkt der Kugel sein muss, so ist der Durchmesser der Kugel, nämlich $2a$, eine Diagonale des Parallelepipedons. Nennt man also drei an einander stossende Kanten $2x$, $2y$, $2z$, so wird

$$(1.) \qquad V = f(x, y, z) = 8xyz$$

die Function, welche ein Maximum werden soll, und

$$(2.) \qquad \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

ist die Bedingung, welche zwischen den drei Veränderlichen stattfindet. In diesem Falle wird deshalb

$$(3.) \quad F(x, y, z) = f + \lambda\varphi = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2),$$

$$(4.) \quad F_1 = 8yz + 2\lambda x = 0, \quad F_2 = 8zx + 2\lambda y = 0, \quad F_3 = 8xy + 2\lambda z = 0.$$

Dies giebt

$$(5.)\qquad -\frac{\lambda}{\frac{1}{2}} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} = \frac{xy}{z},$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

$$(6.)\qquad x^2 = y^2 = z^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{oder} \quad x = y = z = \frac{a}{3}\sqrt{3}.$$

Der *Würfel* ist daher das grösste rechtwinklige Parallelepipedon, welches der Kugel einbeschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Es soll das grösste rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, welches dem Ellipsoid

$$(7.)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

einbeschrieben werden kann.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorigen Aufgabe findet man hier für die halben Seitenkanten die Werthe

$$(8.)\qquad x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad y = \frac{b}{3}\sqrt{3}, \quad z = \frac{c}{3}\sqrt{3}.$$

Aufgabe 3. Unter allen Kegeln mit gleichem Volumen V denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Fig. 150.

Auflösung. Der Halbmesser der Grundfläche sei x, die Höhe sei y, und die Seitenkante sei z (vergl. Fig. 150); dann wird die Gesammtoberfläche

$$(9.)\qquad f(x, y, z) = x^2\pi + xz\pi = \pi(x^2 + xz).$$

Dies ist die Function, welche ein Minimum werden soll. Zwischen x, y und z bestehen dabei noch die Bedingungsgleichungen

$$V = \frac{x^2\pi y}{3}, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

oder

$$\text{(10.)}\quad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 3V - x^2\pi y = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Dies giebt

$$\text{(11.)}\quad F(x, y, z) = \pi(x^2 + xz) + \lambda_1(3V - x^2\pi y) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z^2),$$

$$\text{(12.)}\quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = \pi(2x + z) - 2\lambda_1\pi xy + 2\lambda_2 x = 0, \\ F_2(x, y, z) = \qquad\qquad - \lambda_1\pi x^2 + 2\lambda_2 y = 0, \\ F_3(x, y, z) = \pi x \qquad\qquad\qquad - 2\lambda_2 z = 0. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man

$$\text{(13.)}\quad \lambda_2 = \frac{\pi x}{2z}, \quad \lambda_1 = \frac{y}{xz}, \quad x^2 + 2xz + z^2 = 2y^2,$$

oder

$$\text{(14.)}\quad x + z = y\sqrt{2}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10.) erhält man daher

$$z^2 = x^2 + y^2 = 2y^2 - 2\sqrt{2}\,xy + x^2,$$

oder

$$\text{(15.)}\quad y = 2x\sqrt{2}, \quad 3V = 2x^3\pi\sqrt{2},$$

also

$$\text{(16.)}\quad x\sqrt{2} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \quad y = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \quad z\sqrt{2} = 3x\sqrt{2} = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}.$$

Die Gesammtoberfläche dieses Kegels ist dann

$$\text{(17.)}\quad O = 4x^2\pi = 2\sqrt[3]{9V^2\pi}.$$

Aufgabe 4. Von einem Viereck sind die vier Seiten a, b, c, d gegeben, wie gross müssen die Winkel sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird? (Vergl. Fig. 151.)

Auflösung. Ist $ABCD$ das gesuchte Viereck, und setzt man

$$\sphericalangle ABC = x, \quad \sphericalangle ADC = y,$$

so wird

$$2\triangle ABC = ab\sin x, \quad 2\triangle ADC = cd\sin y.$$

Hätte das Viereck einen einspringenden Winkel, z. B. bei D_1, so könnte man seinen Flächeninhalt F um das Stück AD_1CD

folglich ist auch

$$b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0; \tag{30.}$$

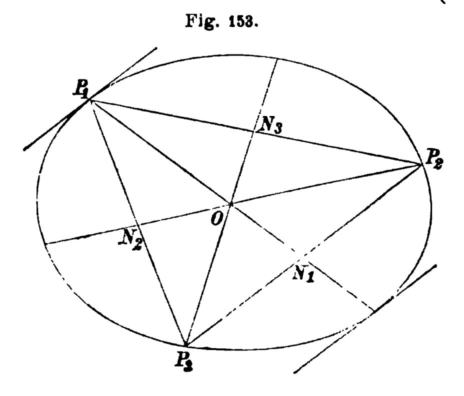
d. h. die Gleichung (29.) wird befriedigt für

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{31.}$$

und stellt deshalb einen Durchmesser dar, welcher die Sehne P_1P_2 halbirt. Nennt man die Endpunkte dieses Durchmessers P und P', so haben diese beiden Punkte die verlangte Eigenschaft des Maximums, denn nach der Lehre von den conjugirten Durchmessern sind die Tangenten in P und P' zu P_1P_2 parallel. In dem Dreieck P_1P_2P (und ebenso in dem Dreieck P_1P_2P') ist deshalb die Höhe grösser als in einem jeden Dreieck P_1P_2P'', welches dieselbe Grundlinie P_1P_2 hat, dessen Spitze P'' aber auf der Ellipse dem Punkte P (bezw. dem Punkte P') benachbart liegt.

Aufgabe 6. In eine Ellipse soll ein möglichst grosses Dreieck $P_1P_2P_3$ einbeschrieben werden. (Vergl. Fig. 153.)

Fig. 153.



Auflösung. Diese Aufgabe lässt sich unmittelbar auf die vorhergehende zurückführen, indem man z. B. die Punkte P_1 und P_2 als gegeben ansieht und den Punkt P_3 sucht. Die Verlängerung des Halbmessers OP_3 muss daher die Sehne P_1P_2 halbiren. Ebenso muss die Verlängerung von OP_1 die Gerade P_2P_3, und die Verlängerung von OP_2 die Gerade P_3P_1 halbiren, d. h. der *Mittelpunkt O* der Ellipse ist gleichzeitig der *Schwerpunkt* des gesuchten Dreiecks $P_1P_2P_3$.

Da in jedem Dreieck der Schwerpunkt die drei Halbirungstransversalen im Verhältniss von $1:2$ theilt, so kann man ein

solches Dreieck $P_1P_2P_3$ construiren, indem man auf der Ellipse einen Punkt P_1 beliebig annimmt, den Halbmesser OP_1 über O bis N_1 verlängert, so dass

$$P_1O = 2ON_1 \tag{32.}$$

wird, und durch N_1 eine Parallele zu der Tangente im Punkte P_1 zieht; dann schneidet diese Parallele die Ellipse in zwei Punkten P_2 und P_3, so dass das Dreieck $P_1P_2P_3$ seinen Schwerpunkt in O hat. Dabei sind nach der Lehre von den conjugirten Durchmessern die Coordinaten des Punktes N_1

$$-\frac{x_1}{1} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad -\frac{y_1}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

folglich gelten die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{33.}$$

Da bei dieser Construction der Punkt P_1 noch ganz beliebig auf der Ellipse angenommen werden durfte, so findet man hierdurch *unendlich viele* Dreiecke, von denen aber sogleich gezeigt werden soll, dass sie alle *gleichen* Flächeninhalt haben. Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ wird nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (33.)

$$\begin{aligned} 2F &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\ &= 3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned} \tag{34.}$$

Da die Punkte P_1 und P_2 auf der Ellipse liegen, gelten die Gleichungen

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2,$$

welche durch Multiplication die Gleichung

$$b^4x_1^2x_2^2 + a^4y_1^2y_2^2 + a^2b^2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = a^4b^4 \tag{35.}$$

geben. Ferner hat die Tangente im Punkte P_1 die Gleichung

$$b^2x_1x' + a^2y_1y' - a^2b^2 = 0,$$

folglich ist die Gleichung der Geraden, welche man durch N_1 parallel zu dieser Tangente legt,

$$2b^2x_1x' + 2a^2y_1y' + a^2b^2 = 0. \tag{36.}$$

Da diese Gerade durch den Punkt P_2 hindurchgeht, so wird

$$2b^2x_1x_2 + 2a^2y_1y_2 = -a^2b^2,$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung in's Quadrat erhebt,

$$4b^4x_1^2x_2^2 + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 + 4a^4y_1^2y_2^2 = a^4b^4, \tag{37.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (35.)

$$4a^4b^4 - 4a^2b^2(x_1{}^2y_2{}^2 + x_2{}^2y_1{}^2) + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 = a^4b^4,$$

oder

$$(38.)\qquad 4(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 3a^2b^2, \quad 2(x_1y_2 - x_2y_1) = ab\sqrt{3}.$$

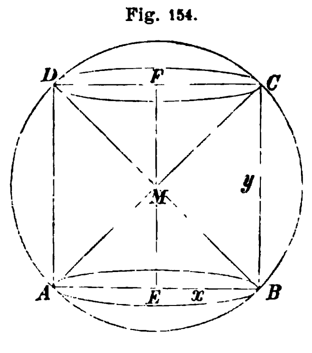
Dies giebt mit Rücksicht auf Gleichung (34.)

$$(39.)\qquad 4F = 3ab\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt ist also unabhängig von der Lage des Punktes P_1, so dass es *unendlich viele* Dreiecke $P_1P_2P_3$ giebt, welche *gleichen* Inhalt besitzen, und welche *grösser* sind als alle übrigen der Ellipse einbeschriebenen Dreiecke.

Aufgabe 7. In eine Kugel mit dem Halbmesser a soll ein Cylinder mit möglichst grosser Oberfläche einbeschrieben werden. (Vergl. Fig. 154.)

Fig. 154.



Auflösung. Bezeichnet man die Halbmesser der Grundkreise mit x und die Höhe des Cylinders mit y, so wird die Oberfläche

$$(40.)\qquad F = 2x^2\pi + 2x\pi y,$$

also

$$(41.)\qquad f(x, y) = x^2 + xy,$$

wobei noch zwischen x und y die Gleichung

$$(42.)\qquad \varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$$

besteht. Daraus folgt

$$(43.)\qquad F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

$$(44.)\qquad \begin{cases} F_1(x, y) = 2x + y + 8\lambda x = 0, \\ F_2(x, y) = \qquad\quad x + 2\lambda y = 0, \end{cases}$$

$$(45.)\qquad 2xy + y^2 - 4x^2 = 0,$$

oder

$$(45\text{a}.)\qquad (x + y)^2 = 5x^2, \quad y = x(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Da x und y beide positiv sein müssen, so kann hierbei nur das obere Vorzeichen gelten. Es wird also

$$y = x(-1 + \sqrt{5}), \tag{45b.}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (42.)

$$x^2(10 - 2\sqrt{5}) = 4a^2, \tag{46.}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad y = a\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}; \tag{47.}$$

$$f(x, y) = x(x + y) = x^2\sqrt{5} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} + 1). \tag{48.}$$

Dasselbe Resultat war bereits in § 57, Aufgabe 21 (Seite 283) gefunden worden.

Aufgabe 8. Durch den Mittelpunkt O eines Ellipsoids

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{49.}$$

ist eine Ebene

$$\varphi_2(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0 \tag{50.}$$

gelegt; man soll die Axen der von dieser Ebene ausgeschnittenen Ellipse bestimmen.

Auflösung. Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Schnittcurve mit O, so wird

$$OP^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \tag{51.}$$

wobei die Veränderlichen x, y, z den Gleichungen (49.) und (50.) genügen müssen. Unter diesen Halbmessern OP ist die *grosse* Halbaxe ein *Maximum* und die *kleine* Halbaxe ein *Minimum*. Man findet daher die beiden Axen, indem man die Werthe von x, y, z bestimmt, für welche $f(x, y, z)$ ein Maximum oder Minimum wird. Hierbei ist

$$F(x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2, \tag{52.}$$

$$F_1 = 2x + \frac{2\lambda_1 x}{a^2} + A\lambda_2 = 0, \tag{53.}$$

$$F_2 = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{b^2} + B\lambda_2 = 0, \tag{54.}$$

$$F_3 = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{c^2} + C\lambda_2 = 0, \tag{55.}$$

also

$$(56.)\quad 2x = -\frac{A\lambda_2 a^2}{a^2+\lambda_1},\quad 2y = -\frac{B\lambda_2 b^2}{b^2+\lambda_1},\quad 2z = -\frac{C\lambda_2 c^2}{c^2+\lambda_1}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (50.) und (49.) folgt hieraus

$$(57.)\qquad \frac{A^2a^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{B^2b^2}{b^2+\lambda_1} + \frac{C^2c^2}{c^2+\lambda_1} = 0,$$

$$(58.)\qquad \lambda_2^2\left[\frac{A^2a^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{B^2b^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{C^2c^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right] = 4.$$

Aus Gleichung (57.) findet man die beiden Werthe von λ_1 und aus Gleichung (58.) die zugehörigen Werthe von λ_2. Indem man diese Werthe von λ_1 und λ_2 in die Gleichungen (56.) einsetzt, erhält man schliesslich die gesuchten Werthe von x, y, z.

XVI. Abschnitt.

Theorie der complexen Grössen.

§ 131.

Erklärung der complexen Grössen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 155—163.)

Bekanntlich führt schon die Auflösung der quadratischen Gleichungen häufig auf *imaginäre* Wurzeln. Ist z. B.

$$x^2 + 6x + 13 = 0,$$

so wird

$$x = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i,$$

wobei $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet worden ist. Aus $\sqrt{-1} = i$ folgt

$$(1.) \qquad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \ldots$$

Es ist nicht nur von *grossem* Vortheil, imaginäre Grössen in die Rechnung einzuführen, sondern es stellt sich sogar bei vielen Untersuchungen die *Nothwendigkeit* heraus, mit solchen Grössen zu rechnen. Da die Bezeichnung *„imaginär“* leicht die falsche Vorstellung erwecken könnte, dass die Rechnung mit *imaginären* Grössen unzulässig sei, nennt man dieselben gewöhnlich zum Unterschiede von den *reellen* Grössen *„complexe* Grössen“ und kann zeigen, dass sich alle Rechnungen mit ihnen in derselben Weise ausführen lassen wie mit reellen Grössen. Ihre allgemeine Form ist

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{oder} \quad a + bi,$$

wobei a und b *reelle* Grössen sind. Man nennt a „den *reellen Theil*“ und b „den *Factor des imaginären Theils*“. Ist der reelle Theil einer complexen Grösse gleich 0, so heisst sie *„rein imaginär“*.

Wie die *reellen* Grössen aus den *beiden* Einheiten $+1$ und -1 gebildet sind, so werden die *complexen* Grössen aus den vier Einheiten

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i$$

gebildet. Auf die so erklärten Grössen kann man ohne Weiteres die Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, wie sie für *reelle* Grössen gelten, anwenden. Das Resultat dieser Operationen ist, wie sogleich gezeigt werden soll, wieder eine Grösse von der Form $A + Bi$. Daraus folgt dann die *Berechtigung*, mit *complexen* Grössen ebenso zu rechnen, wie mit *reellen*.

I. Addition. *Complexe Grössen werden addirt, indem man die reellen Theile zu den reellen und die Factoren der imaginären Theile zu den Factoren der imaginären Theile addirt,* also

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{2.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$.

II. Subtraction. *Zwei complexe Grössen werden von einander subtrahirt, indem man die reellen Theile und die Factoren der imaginären Theile von einander subtrahirt,* also

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \tag{3.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$.

III. Multiplication. *Zwei complexe Grössen werden mit einander multiplicirt, indem man jeden Theil des einen Factors mit jedem Theile des andern Factors multiplicirt,* also

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned} \tag{4.}$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A + Bi$.

In dem besonderen Falle, wo $c = a$, $d = -b$ ist, erhält man

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{5.}$$

Hier ist das Resultat sogar eine *positive reelle* Grösse.

Zwei solche complexe Grössen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Theiles von einander unterscheiden, heissen „*conjugirt*“; es gelten für sie die folgenden Sätze:

1) *Die Summe zweier conjugirt complexen Grössen ist reell:*

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a. \tag{6.}$$

2) *Die Differenz zweier conjugirt complexen Grössen ist rein imaginär:*

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi. \tag{7.}$$

3) *Das Product zweier conjugirt complexen Grössen ist reell und positiv:*

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Dieses Product heisst nach *Gauss* „die *Norm von* $a + bi$“ und ebenso „die *Norm von* $a - bi$“. Um die Norm einer complexen Grösse zu bezeichnen, setzt man ein N vor dieselbe; es ist also

$$N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{8.}$$

Die Quadratwurzel aus der Norm, mit positivem Vorzeichen genommen, heisst „der *Modul*“ oder (nach *Weierstrass*) „der *absolute Betrag*“ der complexen Grösse. Das Zeichen dafür ist ein vorgesetztes M oder zwei senkrechte Striche, von denen die complexe Grösse eingeschlossen wird, also

$$\begin{cases} M(a + bi) = |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}, \\ M(a - bi) = |a - bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{9.}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \tag{10.}$$

folgt der Satz:

4) *Der reciproke Werth einer complexen Grösse ist gleich ihrer conjugirten, dividirt durch die Norm.*

IV. Division. Bei der Division complexer Grössen multiplicirt man Zähler und Nenner mit der zum Nenner conjugirten Grösse, dann hat man nur noch durch eine *reelle* Grösse, nämlich nur durch die *Norm* des Nenners zu dividiren. Dies giebt

$$\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}\,i. \tag{11.}$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A + Bi$.

Da eine *Potenz mit positivem, ganzzahligen Exponenten* ein Product ist, so kann man auch eine complexe Grösse potenziren; und zwar findet man

$$(12.)\quad (a+bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - + \cdots\right] + \left[\binom{n}{1}a^{n-1}b - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + - \cdots\right]i.$$

§ 132.

Einige Sätze über complexe Grössen. Moivre'sche Formeln.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 164—169.)

Da eine rein imaginäre Grösse die Quadratwurzel aus einer *negativen* Zahl ist, so kann eine *reelle* Grösse, welche von 0 verschieden ist, niemals einer *rein imaginären* Grösse gleich sein. Ist also

$$(1.)\quad a + bi = 0,$$

so müssen a und b *einzeln* gleich 0 sein. Dies giebt

Satz 1. *Sind zwei complexe Grössen einander gleich, so müssen die reellen Theile und ebenso auch die Factoren der imaginären Theile einander gleich sein.*

Beweis. Aus

$$(2.)\quad a + bi = c + di$$

folgt

$$(3.)\quad (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i = 0.$$

Dies giebt aber

$$(4.)\quad a - c = 0,\quad b - d = 0,\quad \text{oder}\quad a = c,\quad b = d.$$

Jede Gleichung zwischen complexen Grössen umfasst daher *zwei* Gleichungen zwischen reellen Grössen.

Die complexen Grössen lassen sich auch noch in einer etwas anderen Form darstellen. Setzt man nämlich

$$(5.)\quad |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2} = r,$$

so wird $r \geqq a$ und $r \geqq b$, folglich kann man zwischen 0 und 2π (bezw. zwischen 0^0 und 360^0) einen Winkel φ so bestimmen, dass

$$(6.) \qquad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

wird. Dabei liegt der Winkel φ

zwischen	0^0	und	90^0,	wenn	$a > 0,\ b > 0$,
„	90^0	„	180^0,	„	$a < 0,\ b > 0$,
„	180^0	„	270^0,	„	$a < 0,\ b < 0$,
„	270^0	„	360^0,	„	$a > 0,\ b < 0$.

Dieser Winkel φ heisst das *Argument* der complexen Grösse $a + bi$. Durch Einführung dieser Bezeichnungen wird

$$(7.) \qquad a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Multiplicirt man jetzt die complexen Grössen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ mit einander, so erhält man

$$(8.) \qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Diese nach *Moivre* genannte Formel giebt

Satz 2. *Complexe Grössen werden mit einander multiplicirt, indem man ihre absoluten Beträge mit einander multiplicirt und ihre Argumente addirt.*

Dieser Satz lässt sich ohne Weiteres auf Producte von drei oder mehr Factoren übertragen; es ist also

$$(9.) \qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \,.\, r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$
$$= r_1 r_2 r_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)].$$

Sind die Factoren alle einander gleich, so erhält man

$$(10.) \qquad [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

und damit zunächst für positive, ganzzahlige Exponenten

Satz 3. *Eine complexe Grösse wird potenzirt, indem man den absoluten Betrag potenzirt und das Argument mit dem Potenzexponenten multiplicirt.*

Für $r = 1$ geht die Gleichung (10.) über in

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$

$$\left[\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots\right]$$

$$+ i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots\right].$$

Dies giebt mit Rücksicht auf Satz 1

$$(11.)\quad \cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots,$$

$$(12.)\quad \sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots.$$

Durch diese Formeln, in denen das *Multiplicationstheorem* der trigonometrischen Functionen ausgesprochen ist, lassen sich $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ als rationale Functionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ darstellen.

Es wird z. B. für $n = 5$, wenn man noch die Relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ anwendet,

$$\begin{aligned}\cos(5\varphi) &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi \\ &= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi, \\ \sin(5\varphi) &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi \\ &= 16\sin^5\varphi - 20\sin^3\varphi + 5\sin\varphi.\end{aligned}$$

Für die Division zweier complexen Grössen erhält man jetzt

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2},$$

oder

$$(13.)\quad \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Daraus folgt

Satz 4. *Complexe Grössen werden durch einander dividirt, indem man die absoluten Beträge durch einander dividirt und die Argumente von einander subtrahirt.*

Satz 3 macht es jetzt auch möglich, aus einer complexen Grösse die n^{te} Wurzel auszuziehen. Unter $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ versteht man nämlich eine Grösse, deren n^{te} Potenz gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist. Diese Eigenschaft besitzt für ganzzahlige Werthe von h die complexe Grösse

$$(14.)\qquad A = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$$

denn es wird nach Gleichung (10.)

$$A^n = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)],$$

oder, weil

$$\cos(\varphi + 2h\pi) = \cos\varphi \quad\text{und}\quad \sin(\varphi + 2h\pi) = \sin\varphi$$

ist,

$$(15.)\qquad A^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dies giebt

$$(16.)\quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right].$$

Dabei erhält man für die n^{te} Wurzel aus einer complexen Grösse im Ganzen n von einander verschiedene Werthe, wenn man der ganzen Zahl h die Werthe $0, 1, 2, \ldots n - 1$ beilegt.

Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Aus einer complexen Grösse wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus dem absoluten Betrage zieht und das Argument durch den Wurzel-Exponenten dividirt.*

Gleichzeitig sind hiermit auch die Potenzen, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist, ebenso für *complexe* Grössen erklärt wie für *reelle*, indem man

$$(17.)\qquad A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p} = (\sqrt[q]{A})^p$$

findet.

§ 133.

Geometrische Darstellung der complexen Grössen.

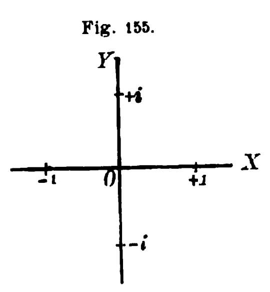
Wie man die *reellen* Grössen durch Punkte oder Strecken in einer *geraden Linie* geometrisch darstellen kann, so kann man

die *complexen* Grössen durch Punkte oder Strecken in einer *Ebene* darstellen. Dabei soll der folgende Grundsatz gelten:

Zwei Strecken sind einander gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben.

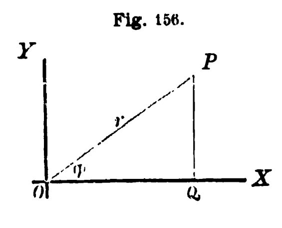
Dann bezeichne man mit $+1$ eine Strecke, deren Länge gleich 1 ist, und deren Richtung parallel ist zur positiven Richtung der X-Axe. Mit $+i$ dagegen bezeichne man eine Strecke, deren Länge auch gleich 1 ist, deren Richtung aber parallel ist zur positiven Richtung der Y-Axe. (Vergl. Fig. 155.)

Fig. 155.



Damit ist natürlich noch nicht gesagt, dass $+i$ dieselbe Bedeutung habe wie in den vorhergehenden Paragraphen, dass nämlich i gleich $\sqrt{-1}$ sei; es sollen vielmehr die hier folgenden Untersuchungen zunächst ganz unabhängig von den vorhergehenden geführt werden. Demnach werde hier die complexe Grösse $a + bi$ durch eine Strecke OP erklärt, welche den Anfangspunkt der Coordinaten O und einen Punkt P mit den Coordinaten $OQ = a$, $QP = b$ verbindet. (Vergl. Fig. 156.) Man gelangt nämlich vom Punkte O aus zum Punkte P, indem man a Einheiten in der Richtung der X-Axe und dann b Einheiten in der Richtung der Y-Axe durchläuft, oder indem man zuerst b Einheiten in der Richtung der Y-Axe und dann a Einheiten in der Richtung der X-Axe durchläuft.

Fig. 156.



So entspricht jeder complexen Grösse $a + bi$ ein Punkt P in der Ebene und jedem Punkte P eine complexe Grösse $a + bi$.

Durch die Gleichungen

$$(1.)\quad a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

kann man auch Polarcoordinaten einführen. Dabei heisst r der *„absolute Betrag* der Strecke OP“, weil ihre Länge gleich r ist, und der Winkel φ heisst das *„Argument* der complexen Grösse“.

Die so erklärten complexen Grössen kann man nun durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division mit einander verbinden, indem man dieselben Regeln anwendet, welche für reelle Grössen gebräuchlich sind, und zwar geschieht das in folgender Weise:

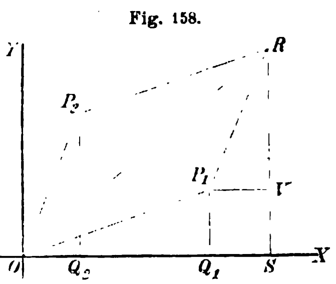
I. Addition. Will man die Addition zweier *reellen* Grössen geometrisch ausführen, so trägt man auf einer Geraden, z. B. auf der X-Axe vom Anfangspunkte O aus eine Strecke OP ab, welche der einen Grösse entspricht, und darauf vom Punkte P aus eine zweite Strecke PR, welche der anderen Grösse entspricht. Dadurch erhält man eine Strecke OR, welche die Summe der beiden gegebenen Grössen geometrisch darstellt. In welcher Reihenfolge man die beiden Strecken auf einander folgen lässt, ist dabei gleichgültig.

Fig. 157.

O P R

Genau ebenso kann man zwei complexe Grössen $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$, welche durch die Strecken OP_1 und OP_2 geometrisch dargestellt sind, addiren (vergl. Fig. 158). Man macht zu diesem Zwecke den Punkt P_1 zum Anfangspunkte einer Strecke P_1R, welche der Strecke OP_2 *gleich* ist, d. h. welche mit OP_2 gleiche Länge und gleiche Richtung hat. Dadurch erhält man ein Parallelogramm OP_1RP_2, in welchem der Punkt R, bezw. die Diagonale OR die Summe der beiden gegebenen Strecken OP_1 und OP_2 ist.

Fig. 158.



Da die Seite P_2R der Seite OP_1 gleich und parallel ist, so hätte man auch P_2 zum Anfangspunkte einer Strecke P_2R machen können, welche der Strecke OP_1 gleich ist, und wäre zu demselben Punkte R gekommen.

Wie man sehr leicht aus Figur 158 nachweisen kann, sind dabei die Coordinaten des Punktes R gleich $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, so dass er in der That der complexen Grösse

$$(2.) \qquad (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

entspricht.

In dieser Construction ist der Satz vom *Parallelogramm der Kräfte* enthalten. Stellen nämlich die Strecken OP_1 und OP_2 durch ihre Länge und Richtung die Intensität und Richtung zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkte O dar, so haben dieselben mit der Diagonale OR des Parallelogramms OP_1RP_2 gleiche Wirkung. Dabei sind

a_1 und b_1	die Componenten von	OP_1,
a_2 „ b_2	„ „	„ OP_2,
$a_1 + a_2$ „ $b_1 + b_2$	„ „	„ OR.

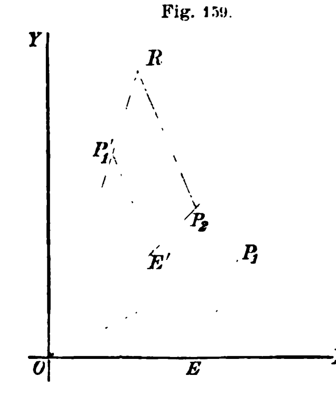
Die Componenten der resultirenden Kraft findet man also, indem man die Einzelkräfte in ihre Componenten zerlegt und die gleichgerichteten Componenten addirt.

II. Subtraction. Da eine Grösse von der anderen subtrahirt wird, indem man die entgegengesetzte Grösse addirt, so kann man die Subtraction auf die Addition zurückführen und findet

$$(3.) \qquad (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i)$$
$$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i.$$

III. Multiplication. Für reelle Grössen gilt die Regel: *Das Product $A \cdot B$ entsteht aus B wie A aus der Einheit.* Dieselbe Regel kann man auch bei der Multiplication zweier complexen Grössen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, welche den Strecken OP_1 und OP_2 entsprechen, anwenden.

Fig. 159.



Hat der Punkt E (Fig. 159) die Coordinaten $a = 1$ und $b = 0$, so entsteht die Strecke OP_1 aus der Einheit OE, indem man durch O eine Gerade legt, welche mit OE den Winkel φ_1 bildet, und auf dieser Geraden die Länge der Einheit (OE) r_1-mal abträgt. Ebenso findet man das Product der beiden Strecken OP_1 und OP_2, indem man durch den Anfangspunkt O eine Gerade legt, welche

mit der Geraden OP_2 den Winkel φ_1 bildet, und auf dieser Geraden die Länge von OP_2 (also r_2) r_1-mal abträgt. Dadurch erhält man einen Punkt R, welcher dem Producte der beiden complexen Grössen entspricht.

Durch den Umstand, dass die beiden Dreiecke OEP_1 und OP_2R einander ähnlich sind, wird auch die Construction des Punktes R verhältnissmässig einfach. Man mache zu diesem Zwecke das Dreieck $OE'P'_1$ dem Dreieck OEP_1 congruent und ziehe P_2R parallel zu $E'P'_1$. Dabei hat die Strecke OR nach Construction die Länge r_1r_2 und bildet mit der positiven Richtung der X-Axe den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$, so dass man erhält

$$(4.)\qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Es gilt also auch hier der Satz: *Complexe Grössen werden mit einander multiplicirt, indem man die absoluten Beträge mit einander multiplicirt und die Argumente addirt.*

In dem besonderen Falle, wo

$$r_1 = 1,\quad r_2 = 1,\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist, geht Gleichung (4.) über in

$$(5.)\qquad i^2 = -1.$$

Damit ist bewiesen, dass *die complexen Grössen, welche in diesem Paragraphen geometrisch erklärt wurden, mit den früher betrachteten identisch sind.*

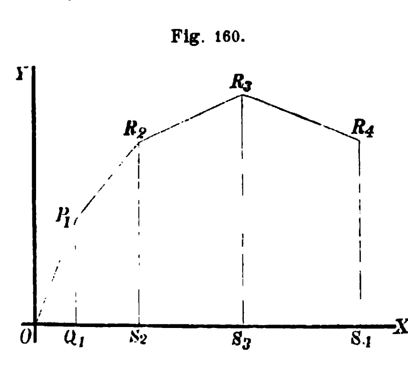
IV. Division. Da die Division die Umkehrung der Multiplication ist, so liegt in der eben angegebenen Construction auch die Anleitung zur Division complexer Grössen. Soll man nämlich die den Strecken OR und OP_1 entsprechenden complexen Grössen durch einander dividiren, so macht man wieder das Dreieck OP_2R (Fig. 159) ähnlich dem Dreieck OEP_1, so dass P_2 und E homologe Punkte sind. Die Strecke OP_2 entspricht dann dem gesuchten Quotienten, und es gilt der Satz: *Complexe Grössen werden durch einander dividirt, indem man die absoluten Beträge durch einander dividirt und die Argumente von einander subtrahirt.*

Man kann die Sätze über Addition und Multiplication ausdehnen auf Summen von beliebig vielen Summanden, bezw. auf Producte mit beliebig vielen Factoren. Soll man z. B. die Strecken

$$a_1 + b_1 i, \quad a_2 + b_2 i, \ldots a_n + b_n i$$

addiren, so erhält man für die Summe der beiden ersten Strecken einen Punkt R_2 mit den Coordinaten $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, für die Summe der drei ersten Strecken einen Punkt R_3 mit den Coordinaten $a_1 + a_2 + a_3$ und $b_1 + b_2 + b_3$; in dieser Weise kann man fortfahren, bis man einen Punkt R_n mit den Coordinaten $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ und $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ erhält, welcher der Summe entspricht. Ist das Polygon $OP_1R_2R_3\ldots R_n$ geschlossen, so dass der letzte Punkt R_n mit dem Anfangspunkte O zusammenfällt, so ist die Summe gleich Null; die Bedingung für einen geschlossenen Streckenzug ist daher

Fig. 160.



$$\Sigma(a + bi) = 0, \tag{6.}$$

welche die beiden Bedingungen

$$\Sigma a = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma b = 0$$

in sich einschliesst.

§ 134.

Vier Sätze über die absoluten Beträge.

Satz 1. *Der absolute Betrag der Summe zweier complexen Grössen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) grösser als die Differenz derselben.*

Beweis. Die Summe der beiden complexen Grössen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ist

$$(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2) + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2);$$

der absolute Betrag dieser Summe wird daher

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Dieser Ausdruck erhält seinen *grössten* Werth, nämlich den Werth $r_1 + r_2$, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$ wird; den *kleinsten* Werth dagegen, nämlich den Werth $|r_1 - r_2|$, erhält er, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ wird. Deshalb ist

$$(1.)\qquad |r_1 - r_2| \leqq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \leqq r_1 + r_2.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Viel einfacher gestaltet sich der Beweis mit Hülfe der geometrischen Darstellung; denn da ist dieser Satz identisch mit dem Satze: *In einem Dreiecke OP_1R* (Fig. 158) *ist die Seite OR kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der beiden anderen Seiten OP_1 und P_1R.*

Satz 2. *Der absolute Betrag der Differenz zweier complexen Grössen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) grösser als die Differenz derselben.*

Beweis. Man kann die Differenz auch als eine Summe auffassen, indem man die Grösse, welche subtrahirt werden soll, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, addirt. Deshalb folgt dieser Satz schon aus dem vorhergehenden Satze.

Man kann somit Satz 1 auch ohne Weiteres ausdehnen auf die algebraische Summe beliebig vieler Grössen.

Satz 3. *Der absolute Betrag des Productes zweier complexen Grössen ist gleich dem Product der absoluten Beträge.*

Der Beweis des Satzes folgt aus der Gleichung

$$(2.)\qquad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Satz 4. *Der absolute Betrag des Quotienten zweier complexen Grössen ist gleich dem Quotienten der absoluten Beträge.*

Auch hier folgt der Beweis unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

§ 135.

Unendliche Reihen mit complexen Gliedern.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 74 und 75.)

Erklärung. *Eine unendliche Reihe*

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots,$$

bei der die einzelnen Glieder complexe Grössen sind, heisst convergent, wenn die reellen Theile und die Factoren der imaginären Theile für sich zwei convergente Reihen bilden, wenn also die Reihen

$$(1.)\qquad \begin{cases} A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \\ B = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots, \end{cases}$$

convergent sind; und zwar heisst sie „*unbedingt convergent*", wenn A und B *unbedingt convergente* Reihen sind. Ihre *Summe* wird sich dann derselben Grenze

$$(2.)\qquad S = A + Bi$$

nähern, wie man auch die Glieder der Reihe anordnen mag.

Satz 1. *Eine Reihe (mit reellen oder complexen Gliedern) ist unbedingt convergent, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt.*

Beweis. Ist

$$(3.)\qquad r_0 = |a_0 + b_0 i|, \quad r_1 = |a_1 + b_1 i|, \quad r_2 = |a_2 + b_2 i| \cdots;$$

so convergirt nach Voraussetzung die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots.$$

Nun ist aber

$$r_0 \geqq |a_0|, \quad r_1 \geqq |a_1|, \quad r_2 \geqq |a_2|, \ldots,$$
$$r_0 \geqq |b_0|, \quad r_1 \geqq |b_1|, \quad r_2 \geqq |b_2|, \ldots,$$

folglich sind die Reihen

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots,$$
$$|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots;$$

erst recht convergent, d. h. die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{und} \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

sind nach Formel Nr. 74 der Tabelle *unbedingt convergent.* Deshalb gilt auch dasselbe für die Reihe

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots.$$

Der Wortlaut dieses Satzes stimmt genau überein mit dem letzten Satze in § 48 (S. 225, vergl. auch Formel Nr. 74 der Tabelle); dort handelte es sich aber nur um Reihen mit positiven und negativen *reellen* Gliedern, während hier die einzelnen Glieder *complexe* Grössen sind.

Auch die Sätze, welche in § 49 für die Addition, Subtraction, Multiplication und Division zweier *unbedingt convergenten* Reihen und über die Wurzelausziehung aus Reihen mit *reellen* Gliedern bewiesen wurden, lassen sich jetzt auf Reihen mit *complexen* Gliedern übertragen. Dadurch erhält man die folgenden Sätze:

Satz 2. *Sind*

(4.) $U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *und* $V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$

zwei (bedingt oder unbedingt) convergente Reihen, so werden diese Reihen addirt, indem man die gleichstelligen Glieder addirt; es wird also

(5.) $U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots.$

Ebenso findet man für die Subtraction der beiden convergenten Reihen

(6.) $U - V = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots.$

In derselben Weise kann man auch die algebraische Summe von drei oder mehr convergenten Reihen mit complexen Gliedern bilden.

Satz 3. *Sind*

(7.) $U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *und* $V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$

zwei unbedingt convergente Reihen (deren Glieder jetzt auch complex sein dürfen), *und ist*

$$w_0 = u_0 v_0,$$
$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0,$$
$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt convergent, und ihre Summe W ist gleich dem Producte UV der Summen der beiden ersten Reihen.

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Reihen

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + |v_2| + \cdots$$

convergent. Bezeichnet man ihre Summen bezw. mit U' und V', und mit W' die Reihe, welche durch Multiplication der beiden Reihen U' und V' entsteht, so kann man in diesen drei Reihen die Summen U'_n, V'_n, W'_n der n ersten Glieder absondern und findet ebenso wie in § 49, dass

$$\begin{aligned} U'_n V'_n - W'_n &= |u_{n-1}|\cdot|v_{n-1}| + (|u_{n-2}|\cdot|v_{n-1}| + |u_{n-1}|\cdot|v_{n-2}|) + \cdots \\ &\quad + (|u_1|\cdot|v_{n-1}| + |u_2|\cdot|v_{n-2}| + \cdots + |u_{n-2}|\cdot|v_2| + |u_{n-1}|\cdot|v_1|) \\ &= |u_{n-1}v_{n-1}| + (|u_{n-2}v_{n-1}| + |u_{n-1}v_{n-2}|) + \cdots \end{aligned}$$

für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein wird: folglich wird nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen der absolute Betrag von

$$\begin{aligned} U_n V_n - W_n &= u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-2}v_{n-1} + u_{n-1}v_{n-2}) + \cdots \\ &\quad + (u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-2}v_2 + u_{n-1}v_1) \end{aligned}$$

erst recht beliebig klein, denn der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge. Es wird daher

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} U_n V_n = UV. \tag{8.}$$

Dabei ist auch $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ *unbedingt convergent*; denn ersetzt man die Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots$ durch ihre absoluten Beträge, so verwandeln sich die Grössen w_0, w_1, $w_2, \ldots$ in w'_0, w'_1, $w'_2, \ldots$, und es wird

$$|w_0| = w'_0, \quad |w_1| \leqq w'_1, \quad |w_2| \leqq w'_2, \ldots .$$

Jetzt ist die Reihe $w'_0 + w'_1 + w'_2 + \cdots$ convergent, folglich ist die Reihe

$$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots$$

erst recht convergent.

Daraus ergiebt sich dann auch ohne Weiteres, wie man das Product von drei oder mehr *unbedingt convergenten* Reihen bilden kann.

Macht man die Factoren eines solchen Productes sämmtlich einander gleich, so erhält man die *Potenz* einer Reihe. Ist z. B. wieder

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{9.}$$

eine unbedingt convergente Reihe, so wird auch

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \tag{10.}$$

eine unbedingt convergente Reihe. Für die Bildung der einzelnen Glieder $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ gilt auch hier die in § 49 bewiesene Recursionsformel

$$\begin{aligned} nu_0A_n + [n-(m+1)]u_1A_{n-1} + [n-2(m+1)]u_2A_{n-2} \\ + [n-3(m+1)]u_3A_{n-3} + \cdots + [n-(n-1)(m+1)]u_{n-1}A_1 \\ + [n-n(m+1)]u_nA_0 = 0. \end{aligned} \tag{11.}$$

Aus der *Multiplication* ergiebt sich durch Umkehrung auch die *Division* und aus der *Potenzirung* ergiebt sich durch Umkehrung die *Wurzelausziehung*. Dabei gelten auch hier dieselben Beziehungen und Gleichungen wie die in § 49 für Reihen mit *reellen* Gliedern aufgeführten. Bei der Uebertragung der Wurzelausziehung auf Reihen mit complexen Gliedern ist nur noch zu beachten, dass die Grösse

$$u_0 = \sqrt[m]{A_0} \tag{12.}$$

nach Formel Nr. 169 der Tabelle m verschiedene Werthe besitzt.

§ 136.

Functionen einer complexen Veränderlichen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 170.)

Da man die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division bei complexen Grössen in derselben Weise ausführen kann wie bei reellen, so kann man auch ganze und gebrochene rationale Functionen von einer complexen Veränderlichen

$$z = x + yi \tag{1.}$$

bilden. Eine solche Function kann immer auf die Form

$$f(z) = f(x+yi) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = u + vi \tag{2.}$$

gebracht werden, wenn man die Operationen, welche durch die Bildung der Function gefordert werden, wirklich ausführt. Dabei sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ wieder *rationale* Functionen der beiden Veränderlichen x und y, die nur reelle Grössen enthalten.

Auch *irrationale* Functionen von $x + yi$ kann man bilden, da es möglich ist, bei jeder complexen Grösse n Werthe der Wurzel n^{ten} Grades anzugeben. Ausserdem kann man noch *transcendente* Functionen von $x + yi$ durch convergente Reihen erklären. Beispiele hierzu bieten die Reihen

$$1 + \frac{x + yi}{1!} + \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^3}{3!} + \cdots,$$

$$\frac{x + yi}{1!} - \frac{(x + yi)^3}{3!} + \frac{(x + yi)^5}{5!} - + \cdots,$$

$$1 - \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^4}{4!} - + \cdots$$

u. s. w., welche bezw. in e^x, $\sin x$, $\cos x$ übergehen, wenn y gleich 0 wird. Diese Reihen sind auch convergent, weil die Summe der absoluten Beträge convergirt. Auf die so gebildeten Functionen lassen sich ohne Weiteres alle Erklärungen und Sätze ausdehnen, welche in der Differential-Rechnung für Functionen von einer *reellen* Veränderlichen gegeben worden sind. Handelt es sich z. B. um die Bildung der Ableitung von z^n, so findet man in derselben Weise wie bei reellen Veränderlichen

$$\frac{d(z^n)}{dz} = \lim_{z_1 = z} \frac{z_1^n - z^n}{z_1 - z} = \lim_{z_1 = z} (z_1^{n-1} + zz_1^{n-2} + \cdots + z^{n-2}z_1 + z^{n-1})$$
$$= nz^{n-1},$$

wobei $z_1 = x_1 + y_1 i$ sich dem Werthe $z = x + yi$ beliebig nähert, indem sich x_1 dem Werthe x und y_1 dem Werthe y beliebig nähern. Dabei ist

$$(3.) \qquad dz = dx + idy, \quad df(z) = d(u + vi) = du + idv,$$

so dass man es, abgesehen von dem Factor i, auch hier nur mit den Differentialen *reeller* Grössen zu thun hat.

Bemerkenswerth sind hier aber noch die folgenden Formeln.

Man kann $f(z)$ als Function der beiden Veränderlichen x und y betrachten und erhält deshalb

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

oder

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z). \tag{4.}$$

Dies giebt

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\frac{\partial f(z)}{\partial y} = 0, \tag{5.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{6.}$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{7.}$$

§ 137.

Zusammenhang der Exponential-Function mit den trigonometrischen Functionen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 171—179.)

Es sei eine Function $f(z)$ erklärt durch die Gleichung

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \tag{1.}$$

wobei z jetzt auch complexe Werthe $x + yi$ haben darf.

Multiplicirt man diese Reihe mit

$$f(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \cdots, \tag{2.}$$

so erhält man

$$f(z) \cdot f(z_1) = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \tag{3.}$$

wobei nach Formel Nr. 75 der Tabelle

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{z}{1!} + \frac{z_1}{1!} = \frac{z + z_1}{1!},$$

$$w_2 = \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} = \frac{z^2 + 2zz_1 + z_1^2}{2!} = \frac{(z + z_1)^2}{2!},$$

. . . .

$$w_n = \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_1}{1!} + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{z_1^2}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n!}\left[z^n + \frac{n}{1} z^{n-1} z_1 + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} z_1^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{(z + z_1)^n}{n!}$$

wird. Deshalb ist

$$f(z)f(z_1) = 1 + \frac{z+z_1}{1!} + \frac{(z+z_1)^2}{2!} + \frac{(z+z_1)^3}{3!} + \cdots = f(z+z_1). \tag{4.}$$

Beschränkt man z und z_1 auf *reelle* Werthe, so wird

$$f(z) = e^z, \quad f(z_1) = e^{z_1}, \quad f(z + z_1) = e^{z+z_1},$$

und Gleichung (4.) giebt die bekannte Relation

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}. \tag{5.}$$

Man bezeichnet nun die durch Gleichung (1.) erklärte Function $f(z)$ auch dann noch mit e^z und nennt sie „*Exponential-Function*“, wenn z beliebige *complexe* Werthe annimmt, obgleich dann z kein eigentlicher Exponent mehr ist. Es ist also bei dieser Erweiterung des Begriffes die Function e^z nicht mehr als eine *Potenz* aufzufassen, sondern als die Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

Wie aber soeben gezeigt wurde, gilt auch dann noch die Gleichung (5.), in welcher das *Additionstheorem* der Exponential-Function ausgesprochen ist.

Um zu untersuchen, welchen Sinn e^z für complexe Werthe von z hat, setze man zunächst $x = 0$, also $z = yi$; dann wird

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right) \tag{6.}$$

$$= \cos y + i \sin y.$$

Ebenso findet man für $z = -yi$

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y. \tag{7.}$$

Daraus folgt

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{8.}$$

Setzt man jetzt $z = x + yi$, so wird nach Gleichung (5.)

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{9.}$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich auch mit grosser Leichtigkeit die *Moivre*'schen Formeln (vergl. die Formel-Tabelle Nr. 165 bis 169). Die Gleichung

$$e^{\varphi_1 i} \cdot e^{\varphi_2 i} = e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}$$

kann nämlich auch in der Form

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{10.}$$

geschrieben werden. Dies bestätigt Formel Nr. 165 der Tabelle. Ferner ist

$$e^{-\varphi_2 i} = \cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2 = \frac{1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \frac{1}{e^{\varphi_2 i}}, \tag{11.}$$

also

$$\frac{e^{\varphi_1 i}}{e^{\varphi_2 i}} = e^{\varphi_1 i} \cdot e^{-\varphi_2 i} = e^{(\varphi_1 - \varphi_2) i}, \tag{12.}$$

oder

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{13.}$$

Dies bestätigt Formel Nr. 168 der Tabelle.

Durch wiederholte Anwendung des *Additionstheorems* ergiebt sich das *Multiplicationstheorem* der Exponential-Function, das in der Gleichung

$$(e^{\varphi i})^n = e^{n\varphi i} \tag{14.}$$

ausgesprochen ist. Diese Gleichung enthält aber zugleich auch das *Multiplicationstheorem* der trigonometrischen Functionen, denn sie kann auch in der Form

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

geschrieben werden und liefert dann die Formeln Nr. 167 der Tabelle, nämlich

$$(15.)\quad \begin{cases} \cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi \\ \qquad\qquad + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots, \\ \sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots. \end{cases}$$

Besonders zu beachten ist es noch, dass aus Gleichung (6.) für $y = 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots 2h\pi$

$$(16.)\qquad e^{2\pi i} = 1,\quad e^{4\pi i} = 1,\ \ldots e^{2h\pi i} = 1$$

folgt, wenn h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl ist. Ferner wird deshalb

$$(17.)\qquad e^{z+2h\pi i} = e^z \,.\, e^{2h\pi i} = e^z.$$

Die Exponential-Function hat also die Eigenschaft, dass sich ihr Werth gar nicht ändert, wenn man die Veränderliche z um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt. Man nennt deshalb $2\pi i$ eine „*Periode* der Exponential-Function“ und e^z selbst eine „*periodische* Function“. In ähnlicher Weise sind auch die trigonometrischen Functionen periodische Functionen, und zwar ist ihre Periode 2π; denn sie ändern ihren Werth nicht, wenn man den Werth der Veränderlichen um ein Vielfaches von 2π vermehrt.

Setzt man der Kürze wegen

$$(18.)\quad e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi = u,\qquad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi = v,$$

so wird

$$(19.)\quad \begin{cases} u + v = 2\cos\varphi,\quad u - v = 2i\sin\varphi,\quad uv = 1, \\ u^m + v^m = e^{m\varphi i} + e^{-m\varphi i} = 2\cos(m\varphi), \\ u^m - v^m = e^{m\varphi i} - e^{-m\varphi i} = 2i\sin(m\varphi). \end{cases}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man dann

$$(u+v)^{2n} = u^{2n} + \binom{2n}{1}u^{2n-1}v + \binom{2n}{2}u^{2n-2}v^2 + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{2}u^2v^{2n-2} + \binom{2n}{1}uv^{2n-1} + v^{2n},$$

oder, wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung je zwei Glieder mit einander vereinigt, von denen das eine ebenso weit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht,

$$(u+v)^{2n} = (u^{2n}+v^{2n}) + \binom{2n}{1} uv\,(u^{2n-2}+v^{2n-2})$$
$$+\binom{2n}{2} u^2v^2(u^{2n-4}+v^{2n-4}) + \cdots$$
$$+\binom{2n}{n-1} u^{n-1}v^{n-1}(u^2+v^2) + \binom{2n}{n} u^n v^n.$$

Dies giebt mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.) und (19.)

$$2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi \tag{20.}$$
$$+\binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi + \cdots$$
$$+\binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}.$$

Ebenso findet man

$$2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} = \tag{21.}$$
$$2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1} 2\cos(2n-1)\varphi + \cdots$$
$$+\binom{2n+1}{n-1} 2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n} 2\cos\varphi.$$

Bildet man jetzt in ähnlicher Weise

$$(u-v)^{2n} = (u^{2n}+v^{2n}) - \binom{2n}{1} uv(u^{2n-2}+v^{2n-2})$$
$$+\binom{2n}{2} u^2v^2(u^{2n-4}+v^{2n-4}) + \cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} u^{n-1}v^{n-1}(u^2+v^2) + (-1)^n\binom{2n}{n} u^n v^n,$$

so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (18.) und (19.)

$$(22.)\quad (-1)^n 2^{2n} (\sin\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi$$
$$+ \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi - + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Dagegen wird

$$(u-v)^{2n+1} = (u^{2n+1} - v^{2n+1}) - \binom{2n+1}{1} uv(u^{2n-1} - v^{2n-1}) + - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1} u^{n-1} v^{n-1} (u^3 - v^3)$$
$$+ (-1)^n \binom{2n+1}{n} u^n v^n (u - v).$$

Berücksichtigt man jetzt wieder die Gleichungen (18.) und (19.) und dividirt beide Seiten der Gleichung durch i, so erhält man

$$(23.)\quad (-1)^n 2^{2n+1} (\sin\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1} 2\sin(2n-1)\varphi + - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1} 2\sin(3\varphi) + (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2\sin\varphi.$$

Bemerkungen.

1. Dem Anfänger wird dringend empfohlen, diese Formeln durch Zahlenbeispiele einzuüben, also die Ausdrücke für $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$, $\cos^3\varphi$, $\sin^3\varphi$, $\cos^4\varphi$, $\sin^4\varphi$, ... wirklich zu bilden.

2. Die vorstehenden Formeln finden in der Integral-Rechnung eine wichtige Anwendung.

§ 138.

Logarithmen der complexen Grössen.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 180 und 181.)

Nach Gleichung (9.) des vorhergehenden Paragraphen war

$$(1.)\quad e^{x+yi} = e^x . e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = u + vi,$$

wo

$$(2.)\quad u = e^x\cos y, \quad v = e^x\sin y$$

reelle Grössen sind. Hierbei waren x und y ganz beliebige Grössen. Man kann aber auch die Gleichung (1.) befriedigen, wenn die Grössen u und v beliebig gegeben sind, denn aus den Gleichungen (2.) folgt dann

$$(3.)\quad \begin{cases} e^{2x} = u^2 + v^2, & \text{oder} \quad x = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(u^2 + v^2), \\ \mathrm{tg}\, y = \frac{v}{u}, & \text{oder} \quad y = \mathrm{arctg}\left(\frac{v}{u}\right), \end{cases}$$

wobei man den Werth von y so bestimmen muss, dass

$$\begin{aligned} 0 < y < \frac{\pi}{2}, &\quad \text{wenn} \quad u > 0,\ v > 0, \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi, &\quad\ \text{„} \quad\ u < 0,\ v > 0, \\ \pi < y < \frac{3\pi}{2}, &\quad\ \text{„} \quad\ u < 0,\ v < 0, \\ \frac{3\pi}{2} < y < 2\pi, &\quad\ \text{„} \quad\ u > 0,\ v < 0 \end{aligned}$$

ist, damit die Gleichungen (2.) befriedigt werden.

Für *reelle* Grössen war nun der natürliche Logarithmus einer Zahl a der Exponent, zu welchem die Basis e erhoben werden muss, damit man a erhält, d. h. aus der Gleichung

$$e^\alpha = a \quad \text{folgte} \quad \alpha = \mathrm{l}\,a.$$

Man erkennt aus dem Vorstehenden, dass man diese Erklärung jetzt ohne Weiteres auf complexe Grössen ausdehnen kann, indem man aus Gleichung (1.) die Gleichung

$$(4.)\qquad x + yi = \mathrm{l}(u + vi)$$

ableitet. Dabei tritt aber der äusserst bemerkenswerthe Umstand ein, dass der Logarithmus von $u + vi$ *unendlich viele* Werthe haben kann, denn nach Formel Nr. 175 der Tabelle wird für ganzzahlige Werthe von h auch

$$(5.)\qquad e^{x+yi+2h\pi i} = u + vi.$$

Dies giebt

$$(6.)\qquad \mathrm{l}(u + vi) = x + yi + 2h\pi i.$$

Liegt y zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so nennt man $x + yi$ den „*Hauptwerth* von $l(u + vi)$". Aus diesem gehen alle übrigen Werthe von $l(u + vi)$ durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ hervor.

Aus der Gleichung

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \tag{7.}$$

folgt z. B.

$$l(-1) = \pi i + 2h\pi i = (2h + 1)\pi i. \tag{8.}$$

§ 139.

Zusammenhang der Functionen lx und $\operatorname{arctg} x$.

(Vergl. die Formel-Tabelle Nr. 182.)

Nach Formel Nr. 59 der Tabelle ist für $-1 < x < +1$

$$\left\{\begin{array}{l} l(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots, \\ l(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - - \cdots, \end{array}\right. \tag{1.}$$

also

$$l\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \tag{2.}$$

Damals war x eine *reelle* Grösse; jetzt gelten aber die zur Herleitung dieser Reihenentwickelung nothwendigen Voraussetzungen auch noch, wenn x eine *complexe* Grösse ist, deren absoluter Betrag kleiner als 1 bleibt. Setzt man z. B. $x = \varphi i$, wo φ eine reelle Grösse zwischen -1 und $+1$ sein möge, so erhält man

$$l\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} - \frac{\varphi^7}{7} + - \cdots\right). \tag{3.}$$

Dies giebt aber nach Formel Nr. 65 der Tabelle

$$l\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg}\varphi. \tag{4.}$$

§ 140.

Auftreten complexer Wurzeln einer Gleichung.

In § 82 war bewiesen worden, dass jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln hat, und dass sich die ganze rationale Function n^{ten} Grades $f(x)$ auf die Form

$$(1.)\quad f(x) = (x - x_1)f_1(x) = (x - x_1)\,(ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1})$$

bringen lässt, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung

$$(2.)\qquad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

ist. Daraus ergiebt sich der folgende Satz:

Sind die Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ sämmtlich reell, und ist $x_1 = g + hi$ eine Wurzel dieser Gleichung, so muss auch $g - hi$ eine Wurzel derselben sein.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$(3.)\qquad f(x) = (x - x_1)f_1(x) = (x - g - hi)f_1(x).$$

Diese Gleichung gilt für alle Werthe von x, folglich bleibt sie auch richtig, wenn man x auf reelle Werthe beschränkt. Bringt man dann $\dfrac{f(x)}{x - x_1} = f_1(x)$ auf die Form $P + Qi$, wo P und Q reelle Grössen sind, so wird

$$f(x) = (x - g - hi)\,(P + Qi).$$

Nun ist

$$(4.)\quad (x - g - hi)(P + Qi) = [(x - g)P + Qh] + [(x - g)Q - Ph]i,$$

$$(5.)\quad (x - g + hi)(P - Qi) = [(x - g)P + Qh] - [(x - g)Q - Ph]i.$$

Da aber

$$(6.)\qquad (x - g - hi)\,(P + Qi) = f(x)$$

eine *reelle* Grösse ist, so muss

$$(7.)\qquad (x - g)Q - Ph = 0$$

sein, d. h. $(x - g)Q - Ph$ muss für alle Werthe von x gleich Null sein. Daraus erkennt man nach Gleichung (5.), dass auch

$$(8.)\qquad (x - g + hi)\,(P - Qi) = f(x)$$

wird. Die complexen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten treten also paarweise auf, so dass jeder

complexen Wurzel die conjugirte Grösse als eine zweite Wurzel der Gleichung zugeordnet ist.

Dies gilt auch noch, wenn $x_1 = g + hi$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung ist; denn man kann in derselben Weise wie oben zeigen, dass $f(x)$ durch $(x - g + hi)^\alpha$ theilbar sein muss, wenn $f(x)$ durch $(x - g - hi)^\alpha$ theilbar ist.

Sind die Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades sämmtlich reell, und ist n eine ungerade Zahl, so muss *mindestens eine* Wurzel der Gleichung reell sein.

Tabelle

der wichtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung.

1.) $\lim\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1.$ [§ 4, Gl. (5.)]

2.) $\lim(X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y.$ [§ 5, Gl. (1.)]

3.) $\lim(X \, . \, Y) = \lim X \, . \lim Y.$ [§ 5, Gl. (2.)]

4.) $\lim\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{\lim Y}{\lim X},$ wenn $\lim X \gtrless 0$ ist. [§ 5, Gl. (3.)]

5.) Eine Function

$$y = f(x)$$

heisst für solche Werthe von x stetig, für welche die Differenz

$$\varDelta = f(x + \varepsilon) - f(x - \delta)$$

mit den positiven Grössen δ und ε zugleich unendlich klein wird. [§ 8.]

6.) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\dots k}.$ [§ 9, Gl. (1.)]

7.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$ [§ 9, Gl. (2.)]

8.) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$ [§ 9, Gl. (3.)]

Die Formel Nr. 8 gilt nur unter der Voraussetzung, dass n eine positive, ganze Zahl ist.

9.) $$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m-2}x^{m-2} + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m$$
$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{1}x^{m-1} + x^m.$$
[§ 9, Gl. (4.) und Gl. (6.)]

10.) $$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m.$$
(§ 9, Gl. (7.) und § 29, Gl. (5.)]

Bei den Formeln Nr. 9 und 10 wird vorausgesetzt, dass m eine *positive*, *ganze* Zahl ist.

11.) $$S = A + Ap + Ap^2 + \cdots + Ap^{n-1} = \frac{A(1-p^n)}{1-p}.$$
[§ 10, Gl. (1.) und (2.)]

11a.) Ist p ein positiver oder negativer ächter Bruch, und wird n unendlich gross, so ist
$$S = A + Ap + Ap^2 + Ap^3 + \cdots = \frac{A}{1-p}.$$ [§ 10, Gl. (5.)]

12.) $$x_1^{n-1} + xx_1^{n-2} + x^2x_1^{n-3} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$
[§ 10, Gl. (3.) und (4.)]

13.) $$e = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} S_k + \lim_{n=\infty} S_k',$$
wo
$$\lim_{n=\infty} S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!},$$
$$\lim_{n=\infty} S_k' < \frac{1}{k!\,k}.$$ [§ 11, Gl. (2.), (5.), (6.) und (10.)]

14.) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
$$= 2{,}718\,281\,828\,459\ldots.$$ [§ 11, Gl. (12.) und (13.)]

15.) Die Ableitung (der Differential-Quotient) einer stetigen Function $y = f(x)$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$ [§ 12, Gl. (5.), (5a.), (5b.) und (6.)]

16.) Ist α der Winkel, welchen die Tangente einer Curve mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, so wird

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

wobei $y = f(x)$ die Gleichung der Curve und x, y die Coordinaten des Berührungspunktes sind. [§ 13, Gl. (3.)]

17.) $\frac{d(y + C)}{dx} = \frac{dy}{dx}$. [§ 14, Gl. (1a.)]

18.) $\frac{d(Ay)}{dx} = A \frac{dy}{dx}$. [§ 14, Gl. (2a.)]

19.) $\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$. [§ 14, Gl. (3.)]

20.) $\frac{d(u - v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$. [§ 14, Gl. (4.)]

21.) $\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$. [§ 15, Gl. (6.) und Gl. (9.); § 17, Gl. (8.); § 21, Gl. (17.), (22a.) und (26.)]

22.) $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}$; $\frac{d(\mathrm{l} x)}{dx} = \frac{1}{x}$. [§ 18, Gl. (9.) und (9a.)]

23.) $\log x = \frac{\mathrm{l} x}{\mathrm{l}(10)} = \mathrm{l} x \cdot \log e$. [§ 18, Gl. (13.) und (14.)]

24.) $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$. [§ 19, Gl. (8.)]

25.) $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$. [§ 19, Gl. (15.)]

26.) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. [§ 20, Gl. (6.)]

27.) $\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$. [§ 20, Gl. (12.)]

28.) $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$. [§ 21, Gl. (6a.)]

29.) $$\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_m)}{dx} =$$
$$u_2 u_3 \ldots u_m \frac{du_1}{dx} + u_1 u_3 \ldots u_m \frac{du_2}{dx} + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1}\frac{du_m}{dx}.$$
[§ 21, Gl. (16.)]

29a.) $\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$. [§ 21, Gl. (17.), (22.) und (26.)]

30.) $\frac{d\sqrt{a^2+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. [§ 21, Gl. (27.)]

31.) $\frac{d\sqrt{x^2-a^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. [§ 21, Gl. (27a.)]

32.) $\frac{d\sqrt{a^2-x^2}}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. [§ 21, Gl. (28.)]

33.) $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$. [§ 21, Gl. (34a.)]

34.) $dy = df(x) = f'(x)dx$. [§ 22, Gl. (7.)]

35.) Ist
$$y = f(u) \quad \text{und} \quad u = \varphi(x),$$
so wird
$$du = \varphi'(x)dx, \quad dy = f'(u)du = f'(u)\varphi'(x)dx,$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$ [§ 22, Gl. (6.), (6a.) und (8.)]

36.) Aus $x = \varphi(y)$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}$. [§ 24, Gl. (4.)]

37.) $\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 24, Gl. (8a.)]

38.) $\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 24, Gl. (12a.)]

39.) $\frac{d(\mathrm{arc\,tg}\, x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. [§ 24, Gl. (16a.)]

40.) $\dfrac{d(\operatorname{arcctg} x)}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$. [§ 24, Gl. (20a.)]

41.) $\dfrac{d(\operatorname{arcsec} x)}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. [§ 24, Gl. (24a.)]

42.) $\dfrac{d(\operatorname{arccosec} x)}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. [§ 24, Gl. (28a.)]

43.) $\dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \operatorname{l}a, \quad \dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x.$ [§ 24, Gl. (32a.) und (33.)]

44.) $f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx}, f'''(x) = \dfrac{df''(x)}{dx}, \ldots f^{(n)}(x) = \dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx}$.

[§ 26, Gl. (2.) und (3.)]

44a.) $f''(x) = \lim\limits_{\Delta x=0} \dfrac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}$. [§ 26, Gl. (7.)]

45.) $d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2,$

$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3,$

. . . .

$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$ [§ 26, Gl. (11.) bis (14.)]

46.) $\dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$ [§ 26, Gl. (14a.)]

47.) $\dfrac{d^n(u \pm v)}{dx^n} = \dfrac{d^nu}{dx^n} \pm \dfrac{d^nv}{dx^n}$. [§ 27, Aufgabe 11.]

48.) $\dfrac{d^n(uv)}{dx^n} = \varphi(x)\,\psi^{(n)}(x) + \binom{n}{1}\varphi'(x)\psi^{(n-1)}(x)$

$+\binom{n}{2}\varphi''(x)\,\psi^{(n-2)}(x) + \cdots + \binom{n}{1}\varphi^{(n-1)}(x)\psi'(x) + \varphi^{(n)}(x)\,\psi(x),$

wenn $u = \varphi(x), \quad v = \psi(x)$ ist. [§ 27, Aufgabe 12.]

49.) $f(x+h) = f(x) + \dfrac{f'(x)}{1!}h + \dfrac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R,$

wobei

$$R = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(x+\Theta_2 h) - f^{(n)}(x)\right]h^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_3 h)}{n!}(1-\Theta_3)^n h^{n+1}.$$

Die Grössen Θ_1, Θ_2, Θ_3 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 31, Gl. (31.) und (32.), § 36, Gl. (3a.) und (15.)]

49a.) $f(x+h)-f(x)=h\,.\,f'(x+\Theta h).$ [§ 31, Gl. (33.)]

50.) $$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R,$$

wobei

$$R=\frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_1(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}[a+\Theta_2(x-a)]-f^{(n)}(a)\right\}(x-a)^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_3(x-a)]}{n!}(1-\Theta_3)^n(x-a)^{n+1}.$$

Die Grössen Θ_1, Θ_2, Θ_3 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 31, Gl. (34.) und (35.); § 36, Gl. (5.) und (17.)]

50a.) $f(x)-f(a)=(x-a)f'[a+\Theta(x-a)].$ [§ 31, Gl. (36.)]

51.) $$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R,$$

wobei

$$R=\frac{f^{(n+1)}(\Theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{1}{n!}[f^{(n)}(\Theta_2 x)-f^{(n)}(0)]x^n$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\Theta_3 x)}{n!}(1-\Theta_3)^n x^{n+1}.$$

Die Grössen Θ_1, Θ_2, Θ_3 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 32, Gl. (1.) und (2.); § 36, Gl. (7.) und (19.)]

51a.) $f(x)-f(0)=x\,.\,f'(\Theta x).$ [§ 32, Gl. (3.)]

52.) $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.$$ [§ 33, Gl. (6.)]

53.) $$a^x=1+\frac{x\,\mathrm{l}a}{1!}+\frac{x^2(\mathrm{l}a)^2}{2!}+\frac{x^3(\mathrm{l}a)^3}{3!}+\frac{x^4(\mathrm{l}a)^4}{4!}+\cdots.$$ [§ 33, Gl. (9.)]

54.) $$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\cdots.$$ [§ 34, Gl. (5.)]

55.) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots.$$ [§ 34, Gl. (10.)]

In den Formeln 52 bis 55 darf x jeden beliebigen endlichen Werth haben.

56.) $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$

für $-1 < x < +1$. [§ 37, Gl. (19.) und (20.)]

57.) $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots$

für $|b| < |a|$. [§ 37, Gl. (31.)]

58.) $(a+b)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{3}a^3b^{m-3} + \cdots$

für $|b| > |a|$. [§ 37, Gl. (32.)]

59.) $\mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$

für $-1 < x \leqq +1$. [§ 38, Gl. (8.)]

60.) $\mathrm{l}2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$. [§ 38, Gl. (8a.)]

61.) $\mathrm{l}(a+y) = \mathrm{l}a + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots$

für $|y| < |a|$. [§ 38, Gl. (9.)]

62.) $\mathrm{l}(a+1) = \mathrm{l}a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^4} + - \cdots$.

[§ 38, Gl. (9a.)]

63.) $\mathrm{l}(y+z) = \mathrm{l}y + 2\left[\frac{z}{2y+z} + \frac{z^3}{3(2y+z)^3} + \frac{z^5}{5(2y+z)^5} + \cdots\right]$

für $-1 < \frac{z}{2y+z} < +1$. [§ 38, Gl. (12.)]

64.) $\mathrm{l}(y+1) = \mathrm{l}y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right]$.

[§ 38, Gl. (12a.)]

65.) $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$

für $-1 < x < +1$. [§ 42, Gl. (4.)]

66.) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$.

[§ 43, Gl. (1.) und § 47, Beispiel 2 auf Seite 219 und 220.]

67.) $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots$.

[§ 43, Gl. (14.)]

68.) $\frac{\pi}{4}=4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\,.\,5^3}+\frac{1}{5\,.\,5^5}-+\cdots\right)-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+-\cdots\right).$

[§ 43, Gl. (23.)]

69.) $\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7}+\cdots$

für $-1<x<1$. [§ 44, Gl. (3.)]

70.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *convergirt*, wenn von einer bestimmten Stelle ab eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq k<1,$

II. $\sqrt[n]{u_n}\leqq k<1,$

III. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geqq p>1.$ [§ 46, Satz 4, 6, und 11.]

71.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *divergirt*, wenn von einer bestimmten Stelle ab eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1,$

II. $\sqrt[n]{u_n}\geqq 1,$

III. $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\leqq 1.$ [§ 46, Satz 5, 7 und 12.]

72.) Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern convergirt, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt.

[§ 47, vergl. auch Formel Nr. 74.]

73.) Eine alternirende Reihe convergirt, wenn der absolute Betrag der einzelnen Glieder immer kleiner und schliesslich unendlich klein wird. [§ 47.]

74.) Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn die Summe der absoluten Beträge convergirt. [§ 48 und 135.]

75.) Sind

$$U=u_0+u_1+u_2+\cdots \quad \text{und} \quad V=v_0+v_1+v_2+\cdots$$

zwei unbedingt convergente Reihen, und ist

$$w_0 = u_0 v_0,$$
$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0,$$
$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt convergent, und ihre Summe W ist gleich dem Producte UV der Summen der beiden ersten Reihen. [§ 49 und 135.]

76.) Eine Potenzreihe convergirt unbedingt für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Grösse x_0, wenn von einer bestimmten Stelle ab

$$|a_n x_0^n| \leqq g$$

ist, wobei g eine bestimmte endliche Grösse bedeutet. [§ 50, Satz 2.]

77.) Wenn die Grössen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiv sind und eine bis in's unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, so ist die Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots$$

convergent für alle Werthe von x, welche von $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ verschieden sind; und die Reihe

$$\tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) - a_3 \cos(3x) + - \cdots$$

ist convergent für alle Werthe von x, welche von $\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$ verschieden sind. [§ 51.]

78.) Wenn die Grössen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiv sind und eine bis in's unendlich Kleine abnehmende Reihe bilden, so sind die Reihen

$$b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \cdots$$

und

$$b_1 \sin x - b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) - b_4 \sin(4x) + - \cdots$$

für alle Werthe von x convergent. [§ 51.]

79.) Um die Werthe von x zu bestimmen, für welche $f(x)$ ein Maximum oder Minimum wird, bestimme man die Werthe von x, für welche $f'(x)$ gleich Null wird. Ein solcher Werth sei x, und $f^{(n)}(x)$ sei die erste spätere Ableitung, welche für diesen

Werth von x nicht verschwindet; dann ist $f(x)$ ein *Maximum*, wenn n *gerade* und $f^{(n)}(x)$ *negativ* ist; $f(x)$ ist ein *Minimum*, wenn n *gerade* und $f^{(n)}(x)$ *positiv* ist. Dagegen *tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn n ungerade ist.* [§ 54.]

80.) Ist

$$f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

so wird für alle Werthe von x, für welche $P(x)$ verschwindet,

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}. \qquad \text{[§ 56, Gl. (3.)]}$$

81.)

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)},$$

wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = 0;$$

[§ 58, Gl. (19.), (20.) und (24.)]

oder wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} f'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = \infty.$$

[§ 60, Gl. (12.)]

82.) Ist

$$z = F(u, v),$$

so wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u=0} \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u} = F_1(u, v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v=0} \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} = F_2(u, v).$$

[§ 69, Gl. (5.) und (6.)]

83.) Ist

$$z = F(u, v),$$

und sind u und v beide Functionen von x, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \qquad \text{[§ 69, Gl. (16.) und (16a.)]}$$

84.) $$\frac{d\,\mathrm{l}(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$ [§ 69, Gl. (24.)]

85.) $$\frac{d\,\mathrm{l}\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$ [§ 69, Gl. (26.)]

86.) $$\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v . \mathrm{l}u\frac{dv}{dx}.$$ [§ 69, Gl. (28.)]

87.) Ist $z = F(x, y)$ und $y = f(x)$, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$ [§ 70, Gl. (6.)]

88.) Ist $F(x, y) = 0$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}.$$ [§ 70, Gl. (12.)]

89.) $$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}p.$$ [§ 72, Gl. (2a.)]

90.) $$r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}p.$$ [§ 72, Gl. (3a.)]

91.) Sind x und y so bestimmt, dass

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(x, y) = 0$$

werden, so ist y ein Maximum oder Minimum, jenachdem F_2 und F_{11} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 74.]

91a.) Sind x und y so bestimmt, dass

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = 0$$

werden, so ist x ein Maximum oder Minimum, jenachdem F_1 und F_{22} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 74.]

92.) Ist $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx},$$

oder

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

[§ 76, Gl. (11.), (12.), (12a.) und (12b.)]

93.) $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

[§ 78, Gl. (4.) und (7.)]

94.) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{q}{p^3}, \quad \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{pr - 3q^2}{p^5}.$

[§ 78, Gl. (5.) und (8.)]

95.) Gleichung der Tangente:

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

[§ 80, Gl. (6.)]

96.) Gleichung der Normale:

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x).$$

[§ 80, Gl. (7.)]

97.) Subnormale $(Sn) = y\,\frac{dy}{dx}$. [§ 80, Gl. (9.)]

98.) Subtangente $(St) = y\,\frac{dx}{dy}$. [§ 80, Gl. (10.)]

99.) $ds^2 = dx^2 + dy^2,$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

[§ 80, Gl. (13.) und (13a.)]

100.) Normale $(N) = y\,\frac{ds}{dx}$. [§ 80, Gl. (14.)]

101.) Tangente $(T) = y\,\frac{ds}{dy}$. [§ 80, Gl. (14.)]

102.) Die Asymptoten $y' = mx' + \mu$ einer Curve

$$F(x, y) = U_n(x, y) + U_{n-1}(x, y) + \cdots + U_1(x, y) + U_0 = 0$$

findet man, indem man die n Werthe von m aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_n(x, y)}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{ay^n + a_1xy^{n-1} + a_2x^2y^{n-2} + \cdots + a_nx^n}{x^n}$$

$$= am^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ausrechnet und darauf aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-1}} = 0$$

die zugehörigen Werthe von μ bestimmt.

Sind α Werthe von m einander gleich so liegen möglicher Weise etliche von den zugehörigen Asymptoten im Unendlichen. Ist das nicht der Fall, so findet man die α zugehörigen Werthe von μ aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-\alpha}} = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Vertauschung von x mit y auch die Asymptoten, wenn die Gleichung derselben die Form $x' = ly' + \lambda$ hat. [§ 82.)]

103.) Eine Curve $y = f(x)$ ist nach oben concav oder convex, jenachdem $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ grösser oder kleiner als Null ist.

[§ 84, Gl. (8.) und Gl. (10.)]

104.) Ein Wendepunkt tritt ein, wenn für den zugehörigen Werth von x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \infty$$

wird und ausserdem das Zeichen wechselt. [§ 84.]

105.) Zwei Curven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ haben im Punkte P eine Berührung (oder Osculation) von der n^{ten} Ordnung, wenn für den zugehörigen Werth von x

$$f(x) = g(x),\ f'(x) = g'(x),\ f''(x) = g''(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$

[§ 86.]

106.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Coordinaten

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 p}{q},$$

$$\eta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q},$$

oder

$$\xi = x - \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = x - \frac{ds^2 dy}{dx\, d^2y - dy\, d^2x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = y + \frac{ds^2 dx}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

[§ 87, Gl. (21.) und (25.); § 88.]

107.) Der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q},$$

oder

$$\varrho = \pm \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = \pm \frac{ds^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

[§ 87, Gl. (21.) und (25.); § 88.]

108.) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$ [§ 92, Gl. (6.)]

109.) Nennt man den Winkel, den eine Tangente mit dem zugehörigen Radius vector bildet, μ, so ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r d\varphi}{dr}.$$ [§ 92, Gl. (7a.)]

110.) Polar-Subnormale $(Sn) = \frac{dr}{d\varphi}$. [§ 92, Gl. (10.)]

111.) Polar-Subtangente $(St) = r \operatorname{tg}\mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr}$. [§ 92, Gl. (11.)]

112.) Polar-Normale $(N) = \frac{ds}{d\varphi}$. [§ 92, Gl. (12.)]

113.) Polar-Tangente $(T) = N.\operatorname{tg}\mu = \frac{rds}{dr}$. [§ 92, Gl. (13.)]

114.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Coordinaten

$$\xi = r\cos\varphi - \frac{ds^2(r\cos\varphi d\varphi + dr.\sin\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi},$$

$$\eta = r\sin\varphi + \frac{ds^2(-r\sin\varphi d\varphi + dr.\cos\varphi)}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi},$$

und der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{(r^2d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi}.$$

[§ 94, Gl. (8.) und (9.)]

115.)

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu},$$

wo

$$\lambda = \binom{\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu}{1\,2\,3 \dots n}$$

die Transpositionszahl zwischen den Permutationsformen $\alpha\beta\gamma\dots\nu$ und $1\,2\,3\dots n$ ist, und wo sich die Summation über alle $n!$ Permutationsformen $\alpha\beta\gamma\dots\nu$ der Zahlen $1\,2\,3\dots n$ erstreckt. [§ 98, Gl. (1.)]

116.)

$$\begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & a_{f\gamma} & \dots & a_{f\nu} \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & a_{g\gamma} & \dots & a_{g\nu} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & a_{h\gamma} & \dots & a_{h\nu} \\ . & . & . & . & . \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & \dots & a_{l\nu} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$\lambda = \binom{f\,g\,h \dots l}{\alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu}.$$

[§ 99, Satz 4 und Gleichung (9.), (10.) und (17.)]

117.) Entsteht $\varDelta_1$ aus $\varDelta$ durch Vertauschung zweier parallelen Reihen, so ist

$$\varDelta_1 = -\varDelta.$$ [§ 99, Satz 5.]

118.) Sind die Elemente zweier parallelen Reihen der Determinante identisch, so ist

$$\Delta = 0. \qquad \text{[§ 99, Satz 6.]}$$

119.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad \text{[§ 99, Satz 7.]}$$

120.) Ist α_{fr} der Coefficient von a_{fr} in Δ, so ist

$$\alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,1} & \dots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \dots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \dots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,r+1} & a_{f+1,r+2} & \dots & a_{f+1,r-1} \\ a_{f+2,r+1} & a_{f+2,r+2} & \dots & a_{f+2,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,r+1} & a_{f-1,r+2} & \dots & a_{f-1,r-1} \end{vmatrix}.$$

[§ 100, Gl. (9.) und (10.)]

121.) $\Delta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \dots + a_{nr}\alpha_{nr}$. [§ 100, Gl. (12.)]

122.) $\Delta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + \dots + a_{fn}\alpha_{fn}$. [§ 100, Gl. (13.)]

123.) $a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + \dots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0$ für $r \gtrless s$. [§ 100, Gl. (14a.)]

124.) $a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + \dots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0$ für $f \gtrless g$. [§ 100, Gl. (15a.)]

125.) Sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

gegeben, so wird unter der Voraussetzung, dass die Determinante Δ der Coefficienten von Null verschieden ist,

$$\Delta \,.\, x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \dots + c_n\alpha_{nr},$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot x_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & c_1 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,r-1} & c_2 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & c_n & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[§ 101, Gl. (1.), (7.) und (7a.)]

126.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
[§ 102, Satz 1.]

127.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
[§ 102, Satz 2.]

128.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}.$$
[§ 102, Satz 3.]

129.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & m a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & m a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & m a_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nr} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$
[§ 102, Satz 4.]

130.)
$$\begin{vmatrix} m a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ m a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$
[§ 102, Satz 5.]

131.)
$$\begin{vmatrix} A_1 + B_1, & C_1, & D_1, & \ldots \\ A_2 + B_2, & C_2, & D_2, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n + B_n, & C_n, & D_n, & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 & \ldots \\ A_2 & C_2 & D_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & C_n & D_n & \ldots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 & \ldots \\ B_2 & C_2 & D_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_n & C_n & D_n & \ldots \end{vmatrix}.$$
[§ 102, Satz 6.]

132.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r}, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r}, & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} + ma_{nr}, & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[§ 102, Satz 7.

133.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$c_{fr} = a_{f1}b_{r1} + a_{f2}b_{r2} + \dots + a_{fn}b_{rn},$$

oder

$$c_{fr} = a_{f1}b_{1r} + a_{f2}b_{2r} + \dots + a_{fn}b_{nr},$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f}b_{r1} + a_{2f}b_{r2} + \dots + a_{nf}b_{rn},$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f}b_{1r} + a_{2f}b_{2r} + \dots + a_{nf}b_{nr}.$$

[§ 103, Gl. (7.) und (12.) bis (15.)]

134.) Ist

$$z = f(x, y)$$

eine Function von zwei von einander unabhängigen Veränderlichen x und y, so wird

$$\partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

[§ 106, Gl. (8.), (9.) und (14.)]

135.) Das *partielle* Differential einer Function

$$z = f(u_1, u_2, \dots u_n)$$

in Bezug auf u_α ist gleich der partiellen Ableitung von z nach u_α, multiplicirt mit du_α, also

$$\partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1, \; \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2, \dots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

[§ 108, Gl. (13.)]

136.) Das *vollständige* (oder *totale*) Differential von

$$z = f(u_1, u_2, \dots u_n)$$

ist

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n,$$

und zwar gleichviel, ob $u_1, u_2, \ldots u_n$ von einander unabhängig sind, oder ob $u_1, u_2, \ldots u_n$ selbst wieder Functionen von einer oder von mehreren Veränderlichen sind. Wenn z. B. $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämmtlich Functionen einer Veränderlichen t sind, so kann man auch schreiben

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}.$$

[§ 108, Gl. (14.), (17.) und 23.)]

137.)
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

oder

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y).$$ [§ 109, Gl. (14.) und (16.)]

138.) Ist

$$z = f(u_1 u_2 \ldots u_n),$$

und sind die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von einander *unabhängig*, so ist

$$d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n\right)^{(m)}.$$

Diese Formel bleibt noch richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ *lineare* Functionen einer Veränderlichen t sind, wenn also

$$u_1 = a_1 t + b_1, \quad u_2 = a_2 t + b_2, \ldots u_n = a_n t + b_n;$$

dann kann man auch schreiben

$$\frac{d^m z}{dt^m} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(m)}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1} a_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} a_n\right)^{(m)}.$$

[§ 111, Gl. (20.), (33.) und (39.)]

139.) Gelten die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

gemeinschaftlich, so wird

$$dx : dy : dz = (F_2 G_3 - F_3 G_2) : (F_3 G_1 - F_1 G_3) : (F_1 G_2 - F_2 G_1).$$

[§ 112, Gl. (9.)]

140.) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$ [§ 113, Gl. (3.)]

141.) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wo α, β, γ die Winkel sind, welche das Bogenelement ds mit den positiven Richtungen der Coordinaten-Axen bildet.

[§ 113, Gl. (4.)]

142.) Sind

$$F(x,y,z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x,y,z) = 0$$

die Gleichungen einer Raumcurve, so hat die Tangente im Curvenpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - z}{dz},$$

oder

$$\frac{x' - x}{F_2 G_3 - F_3 G_2} = \frac{y' - y}{F_3 G_1 - F_1 G_3} = \frac{z' - z}{F_1 G_2 - F_2 G_1}.$$

[§ 113, Gl. (13.) und (13a.)]

142a.) Sind x, y, z Functionen einer vierten Veränderlichen t, so hat die Tangente im Curvenpunkte P die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z' - z}{\frac{dz}{dt}}.$$ [§ 113, Gl. (13b.)]

143.) Gleichung der Normalebene

$$(x' - x)\,dx + (y' - y)\,dy + (z' - z)\,dz = 0,$$

oder

$$(F_2 G_3 - F_3 G_2)(x' - x) + (F_3 G_1 - F_1 G_3)(y' - y) + (F_1 G_2 - F_2 G_1)(z' - z) = 0.$$

[§ 113, Gl. (16.) und (16a.)]

143a.) Gleichung der Normalebene

$$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} + (z' - z)\frac{dz}{dt} = 0.$$

[§ 113, Gl. (16b.)]

144.) Die Gerade

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z)$$

ist eine Tangente der Fläche

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y),$$

wenn

$$F_1 m + F_2 n + F_3 = 0, \quad \text{oder}, \quad m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0.$$

[§ 115, Gl. (10.) und (14.)]

145.) Die Tangentialebene der Fläche

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y)$$

hat die Gleichung

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0,$$

oder

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y).$$

[§ 115, Gl. (18.), (18a.) und (25.)]

146.) Die Enveloppe (Umhüllungscurve) der Curvenschaar

$$F(x, y, u) = 0$$

erhält man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0.$$

[§ 117.]

147.) Hat die Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte D mit den Coordinaten x, y einen *Doppelpunkt*, so müssen die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die beiden zugehörigen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = 0,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}};$$

und darauf die zugehörigen Werthe von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

[§ 119, Gl. (7.), (8.) und (8a); § 120, Gl. (14a.)]

148.) Hat die Curve $F(x, y) = 0$ im Punkte D mit den Coordinaten x, y einen *dreifachen* Punkt, so müssen die sechs Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \; F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die drei zugehörigen Werthe von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0. \qquad \text{[§ 121, Gl. (2.)]}$$

149.) Hat die Curve $F(x, y) = 0$ im Punkt D mit den Coordinaten x, y eine *Spitze* (einen *Rückkehrpunkt*), so müssen die vier Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad \text{und} \quad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. [§ 122, Gl. (2.)]

150.) $$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wo

$$R = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

[§ 123, Gl. (8a.), (9a.) und (10a.)]

151.) $$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

heisst eine „*homogene Function* m^{ten} *Grades*", wenn

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n);$$

dann wird

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = mz,$$

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z,$$

. . . .

[§ 124, Gl. (2.), (10.) und (14.)]

152.) $z = f(x, y)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird dagegen *weder* ein Maximum *noch* ein Minimum, wenn zwar

$$f_1(x, y) = 0, \; f_2(x, y) = 0, \quad \text{aber} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

[§ 125, Gl. (65.) bis (67.)]

153.) $u = f(x, y, z)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 = f_{11} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix} > 0;$$

$u = f(x, y, z)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0.$$

[§ 127, Gl. (3.), (5.), (18.) und (19.)]

154.) $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0,$$

wobei

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1\alpha} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2\alpha} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{\alpha 1} f_{\alpha 2} \cdots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix};$$

$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Maximum*, wenn wieder

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_{2r-1} < 0, \quad D_{2r} > 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \cdots \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n+1}{2}.$$

[§ 127.]

155.) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$ [§ 131, Gl. (2.)]

156.) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$ [§ 131, Gl. (3.)]

157.) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$ [§ 131, Gl. (4.)]

158.) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 131, Gl. (5.)]

159.) $N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 131, Gl. (8.)]

160.) $|a + bi| = |a - bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}.$ [§ 131, Gl. (9.)]

161.) $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$ [§ 131, Gl. (10.)]

162.) $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i.$ [§ 131, Gl. (11.)]

163.) $$(a + bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - + \cdots\right] + \left[\binom{n}{1}a^{n-1}b - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + - \cdots\right]i.$$ [§ 131, Gl. (12.)]

164.) $$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
wobei
$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$
[§ 132, Gl. (5.), (6.) und (7.)]

165.) $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \,.\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$ [§ 132, Gl. (8.)]

166.) $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$ [§ 132, Gl. (10.)]

167.) $$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots,$$
$$\sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots.$$
[§ 132, Gl. (11.) und (12.)]

168.) $$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$ [§ 132, Gl. (13.)]

169.) $$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$$
wobei h eine beliebige ganze Zahl ist. [§ 132, Gl. (16.)]

170.) Ist $f(z) = f(x + yi) = u + vi$ eine Function der complexen Veränderlichen $x + yi$, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{[§ 136, Gl. (7.)]}$$

171.) $e^{yi} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$ [§ 137, Gl. (6.) und (7.)]

172.) $\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$ [§ 137, Gl. (8.)]

173.) $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$ [§ 137, Gl. (9.)]

174.) $e^{2h\pi i} = 1$, wenn h eine ganze Zahl ist. [§ 137, Gl. (16.)]

175.) $e^{z+2h\pi i} = e^z$, wenn h eine ganze Zahl ist. [§ 137, Gl. (17.)]

176.)
$$2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} =$$
$$2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi +$$
$$\cdots + \binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}. \qquad \text{[§ 137, Gl. (20.)]}$$

177.)
$$2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1} 2\cos(2n-1)\varphi +$$
$$\cdots + \binom{2n+1}{n-1} 2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n} 2\cos\varphi.$$
[§ 137, Gl. (21.)]

178.)
$$(-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} =$$
$$2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi - +$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + (-1)^n\binom{2n}{n}. \qquad \text{[§ 137, Gl. (22.)]}$$

179.)
$$(-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} =$$
$$2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1} 2\sin(2n-1)\varphi + -$$
$$\cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1} 2\sin(3\varphi) + (-1)^n\binom{2n+1}{n} 2\sin\varphi.$$
[§ 137, Gl. (23.)]

180.) Aus der Gleichung
$$e^{x+yi} = u + vi \quad \text{folgt} \quad l(u + vi) = x + yi + 2h\pi i.$$

Dabei ist h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl und

$$x = \frac{1}{2} l(u^2 + v^2), \quad y = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right),$$

und zwar ist

$$0 < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad u > 0, \quad v > 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < y < \pi \quad „ \quad u < 0, \quad v > 0,$$

$$\pi < y < \frac{3\pi}{2} \quad „ \quad u < 0, \quad v < 0,$$

$$\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi \quad „ \quad u > 0, \quad v < 0.$$

[§ 138, Gl. (1.), (3.) und (6.)]

181.) $l(-1) = (2h + 1)\pi i.$ [§ 138, Gl. (8.)]

182.) $l\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg} \varphi.$ [§ 139, Gl. (4.)]

Druckfehler.

Seite 59, Zeile 11 v. u. fehlt $\binom{m}{k}$ vor dem Worte ebenfalls,

„ 63, „ 9 v. u. lies $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$ statt $\frac{m(m-1)(m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3$.

„ 77, „ 3 v. u. „ $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ statt $\frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta x}$.

„ 137, „ 15 v. u. „ $1 + \frac{1}{2}$ statt $1 = \frac{1}{2}$,

„ 207, „ 12 v. o. „ $\sqrt[n]{u_n}$ statt $\sqrt[n]{u^n}$,

„ 341, „ 3 v. u. „ $\frac{d^2y}{dx^2}$ „ $\frac{d^2y}{dx}$,

„ 468, „ 1 v. u. „ α_{nr} „ α^{nr}.

Gebauer-Schwetschke'sche Buchdruckerei in Halle (Saale).



